MATHS

4ème

Ensemble,Construisons Demain

Edu+

Maths

4ème

Chapitre 1 : PPCM et PGCD de nombres entiers naturels et fractions

Objectifs

- Calculer le PPCM et le PGCD de nombres entiers naturels ;
- réduire deux fractions au même dénominateur en utilisant le PPCM des dénominateurs ;
- utiliser le PGCD du numérateur et du dénominateur d'une fraction pour la simplifier.

1 PPCM de deux nombres entiers naturels

Définition

Le PPCM de deux nombres entiers naturels a et b est le produit de tous les facteurs premiers des décompositions de a et b, chaque facteur commun étant affecté du plus grand exposant apparu dans les deux décompositions.

Remarque

Cette définition peut se généraliser à trois, à quatre, …, à un nombre quelconque d'entiers naturels.

Exemple

Calculons le PPCM des nombres 8, 12 et 18.

Faisons les décompositions suivantes :

$8 = 2^3$

$12 = 2^2 \times 3$

$18 = 2 \times 3^2$

Le PPCM (8, 12, 18) = $2^3 \times 3^2 = 8 \times 9 = 72$.

Exercices

1) Recopie et complète le tableau suivant

Nombre a	Nombre b	PPCM (a, b)
$2 \times 3^3 \times 5$	$2^2 \times 3^2 \times 5^2$	
$3 \times 5^2 \times 7^2$	$3^2 \times 5 \times 7$	
$5^3 \times 7^3 \times 11$	$5^2 \times 7 \times 11^2$	

2) Calcule le PPCM des nombres suivants : 720 et 504 ; 1944 et 2266 ; 40, 70 et 84.

2 PGCD de deux nombres entiers naturels

Définition

Le PGCD de deux nombres entiers naturels a et b est le produit des facteurs premiers communs aux deux décompositions de a et b, chaque facteur étant affecté du plus petit exposant apparu dans les deux décompositions.

Remarque

Cette définition peut se généraliser à trois, à quatre, …. à un nombre quelconque d'entiers naturels.

Exemple

Calculons le PGCD des nombres 8, 12 et 18.

Faisons les décompositions suivantes :

$8 = 2^3$

$12 = 2^2 \times 3$

$18 = 2 \times 3^2$
Le PGCD (8, 12, 18) = 2.

Exercice
Recopie et complète le tableau suivant :

Nombre a	Nombre b	PGCD (a, b)
$2 \times 3^5 \times 7$	$2^2 \times 3^4 \times 5 \times 7^2$	
$2^4 \times 3^2 \times 11^2$	$2^3 \times 3^3 \times 11$	
$2^2 \times 3 \times 7^3 \times 11$	$2^3 \times 3^2 \times 5^2 \times 7 \times 11^2$	

3 Réduction de fractions au même dénominateur en utilisant le PPCM des dénominateurs

Règle
Pour réduire au même dénominateur des fractions quelconques, on détermine le PPCM de leurs dénominateurs.
Ce PPCM obtenu est le plus petit dénominateur commun à ces fractions.
Exercices
Réduis au plus petit dénominateur commun possible les fractions suivantes en utilisant le PPCM des dénominateurs:
$\frac{15}{24}$ et $\frac{11}{18}$; $\frac{33}{270}$ et $\frac{45}{108}$; $\frac{15}{42}$, $\frac{66}{80}$ et $\frac{105}{180}$.

Exercices

1) Calcule le PPCM des nombres suivants :
   5400 et 6200
   60, 80 et 88
   70, 130 et 190

2) Calcule le PGCD des nombres suivants :
   126 et 132
   436, 644 et 840

3) Ecris l'ensemble A des diviseurs de 300 et l'ensemble B des diviseurs de 630. Déduis-en le PGCD de 300 et 630.

4) En calculant le PGCD des deux termes de chacune des fractions suivantes, remplace chacune d'elle par une fraction irréductible : $\frac{120}{280}$; $\frac{432}{450}$; $\frac{525}{650}$.

5) Complète les égalités suivantes en rendant les fractions irréductibles:
   $\frac{2^7 \times 3^3}{2^5 \times 3^2} = \cdots$; $\frac{2 \times 3^2 \times 7^2}{2 \times 3^3 \times 7} = \ldots.$; $\frac{2 \times 3 \times 5 \times 7}{3^2 \times 5^2} = \ldots.$
6) Parmi les trois nombres 1 000 ; 10 000 et 100 000, quels sont ceux qui sont divisibles par 32 ? Par 625?
7) Dans chacun des cas suivants, réduis au même dénominateur les deux fractions données en utilisant le PPCM des dénominateurs.
   $a)$ $\frac{5}{18}$ et $\frac{2}{27}$.
   $b)$ $\frac{3}{4}$ et $\frac{5}{6}$.

$c)$ $\frac{14}{18}$ et $\frac{16}{36}$.

8) Ecris chacun des nombres décimaux suivants sous la forme d'une fraction ayant pour dénominateur 10 ; 100 ; 1000 ou 10 000 (tu choisiras le dénominateur le plus petit possible) :

0,25 ; 0,6 ; 2,77 ; 11,80 ; 0,7822 ; 0,0072 ; 0,0004 ; 1000,001.

Chapitre 2 : Opérations sur les fractions

Objectifs

- Calculer et simplifier la somme ou la différence des fractions ;
- déterminer l'inverse d'une fraction ;
- diviser entre elles deux fractions ;
- calculer la puissance d'une fraction.

1 Calcul et simplification de la somme ou de la différence de deux fractions

Règle

Pour calculer la somme ou la différence de deux fractions :
- *on les réduit à un même dénominateur ;*
- *on calcule la somme ou la différence des numérateurs des fractions réduites au même dénominateur.*

NB : lorsque la somme ou la différence obtenue est réductible, on procède à la simplification pour rendre le résultat irréductible.

Exercice

Calcule et simplifie le résultat :

a) $\frac{11}{15} + \frac{2}{3}$; b) $\frac{5}{6} - \frac{3}{4}$; c) $\frac{3}{20} + \frac{2}{5}$; d) $\frac{26}{12}$ - $\frac{3}{18}$.

2 Inverse d'une fraction

Définition

a et b sont des nombres entiers relatifs non nuls. On a : $\frac{a}{b} \times \frac{b}{a}$ = 1. On dit que les fractions $\frac{a}{b}$ et $\frac{b}{a}$ sont inverses l'une de l'autre.

Exemple

L'inverse de $\frac{7}{5}$ est $\frac{5}{7}$.

Exercice

Ecris l'inverse de chacune des fractions suivantes :

$\frac{7}{10}$; $\frac{3}{5}$; $\frac{-5}{9}$.

3 Division de fractions

Règle

$\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ sont deux fractions telles que b, c et d sont tous non nuls.

Faire le quotient ou diviser $\frac{a}{b}$ par $\frac{c}{d}$, c'est multiplier $\frac{a}{b}$ par $\frac{d}{c}$,

c'est-à-dire $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$.

Exercice

Calcule les quotients des fractions suivantes:

a) $\frac{5}{3} \div \frac{2}{7}$; b) $5 \div \frac{4}{13}$; c) $\frac{4}{-15} \div \frac{8}{-3}$; d) $\frac{6}{17} \div \frac{3}{5}$.

4 Puissance d’une fraction

Définition
Soit n *un entier naturel supérieur ou égal à 2, a et b deux entiers relatifs tels que* $b \neq 0$
L’écriture $\left(\frac{a}{b}\right)^n$ *désigne le produit de* n *fractions égales chacune à* $\frac{a}{b}$. *On dit que* $\left(\frac{a}{b}\right)^n$ *est une puissance de la fraction* $\frac{a}{b}$ *d’exposant* n.
Pour élever une fraction à une puissance, on élève les deux termes de cette fraction à cette puissance. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$.

Exemple

$\left(\frac{3}{5}\right)^3 = \frac{3}{5} \text{ x } \frac{3}{5} \text{ x } \frac{3}{5} = \frac{3^3}{5^3} = \frac{3x3x3}{5x5x5} = \frac{27}{125}$.

Exercice

Calcule : $\left(\frac{3}{7}\right)^2$; $\left(\frac{2}{3}\right)^4$; $\left(\frac{1}{2}\right)^5$; $\left(\frac{-2}{5}\right)^3$.

Exercices

1) Calcule les sommes suivantes :
   a) $\frac{2}{3} + \frac{1}{5} + \frac{3}{4}$; $\frac{-2}{7} + \frac{5}{21}$; $\frac{1}{3} + \frac{13}{-9}$.

   b) $\frac{-3}{4} + \frac{-5}{7}$; $\frac{8}{-15} + \frac{3}{24}$; $\frac{6}{9} + \frac{7}{12} + \frac{8}{15}$.

2) Calcule les différences suivantes :
   a) $\frac{5}{3} - \frac{1}{2}$; $\frac{2}{5} - \frac{7}{-10}$; $\frac{9}{10} - \frac{7}{20}$.

   b) $\frac{23}{8} - \frac{5}{16}$; $\frac{34}{48} - \frac{7}{12}$; $\frac{-4}{9} - \frac{2}{15}$.

3) Ecris les fractions inverses des fractions suivantes :
   $\frac{7}{10}$; $\frac{-5}{9}$; $\frac{7}{-3}$; $\frac{-4}{-10}$
4) Recopie et complète le tableau suivant :

A	3	$\frac{2}{7}$	$\frac{11}{5}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	1,5	$\frac{3}{2}$
B	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{14}{5}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{3}$
a + b							
a $\times b$							

5) Ecris les quotients suivants sous la forme d’une fraction:
   $\frac{13}{15} : \frac{39}{25}$; $\frac{2}{9} : \frac{27}{4}$; $\frac{-85}{54} : \frac{17}{63}$.

6) Après le décès de leur père, Kade, Madion et Ngaba procèdent au partage des 75 bœufs de leur père défunt.
   Kade reçoit les $\frac{7}{15}$ des bœufs, Madion reçoit les $\frac{4}{5}$ de la part de Kade et Ngaba reçoit le reste.
   Quelle est la part de chaque enfant ?

7) Un jour dure 24 heures. Pour Ahmat, $\frac{1}{3}$ de ce temps est consacré au sommeil, $\frac{3}{48}$ au repas. Il utilise 6h30mn pour les transports, les loisirs et le repos.
   Quel est le temps consacré au travail par Ahmat ?

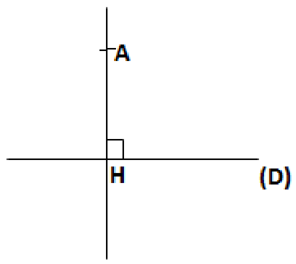
8) Une famille se propose de partager l'héritage d'un père décédé aux trois orphelins Armand, Issa et Francine.
   Armand reçoit les $\frac{8}{15}$ de l'héritage total ; Issa reçoit les $\frac{3}{4}$ de la part de Armand.
   Quelle fraction de l'héritage total reçoit Francine ?

Chapitre 3 : Distances et droites

Objectifs

- Déterminer la distance d'un point à une droite ;
- construire un point à une distance donnée d'une droite ;
- construire une droite à une distance donnée d'un point fixé ;
- déterminer la distance de deux droites parallèles ;
- construire une droite parallèle à une droite donnée à une distance connue.

1 Distance d'un point à une droite



Définition

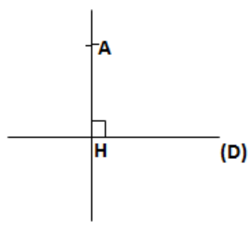
(D) est une droite et A, un point non situé sur (D). H est le point d'intersection de (D) avec la perpendiculaire à (D) passant par A.

On appelle distance du point A à la droite (D) la longueur du segment [AH] notée AH.

Exercice

L'unité de longueur étant le cm, sur la figure suivante, mesure la distance du point A à la droite (D).

2 Construction d'un point à une distance donnée d'une droite



Méthode

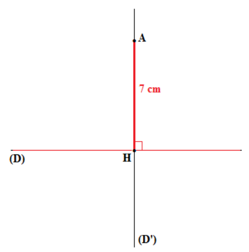
(D) est une droite donnée. Une unité de longueur étant choisie, pour placer un point A à une distance d donnée de la droite (D), on trace une perpendiculaire à (D). Cette perpendiculaire

coupe (D) en H. On place alors le point A sur cette perpendiculaire de sorte que la longueur du segment [AH] mesure d.

Exercices

1) Trace une droite (D) du plan et construis les points B et C situés respectivement à 3cm et à 7cm de (D).
2) L'unité de longueur étant le centimètre, trace une droite (D) et place un point A situé à une distance de 8cm de (D).

3 Construction d'une droite à une distance donnée d'un point fixe



Méthode

Soit A un point fixe du plan. Pour construire une droite(D) à une distance d du point A :

- *On trace une droite quelconque (D') passant par le point A.*
- *Avec une règle graduée, on mesure, à partir de A, sur la droite (D') un segment de longueur égale à d.*
- *On marque l'autre extrémité H du segment [AH] tel que AH = d.*
- *On construit la droite (D) passant par H et perpendiculaire à (D') = (AH).*

Exercice

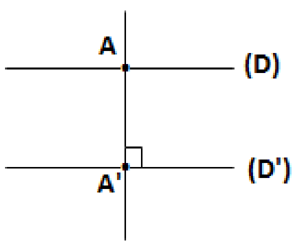
Soit M un point fixe du plan.

a) Trace deux droites (L) et (S) disjointes situées respectivement à 4 cm du point M.

b) Que dis-tu des droites (L) et (S) ?

c) Quelle est la distance entre les droites (L) et (S)?

4 Détermination de la distance de deux droites parallèles

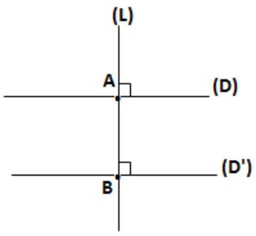


Définition :

(D) et (D') sont deux droites parallèles. A est un point de (D) et A' un point de (D') tels que (AA') soit perpendiculaire à (D) donc à (D').
On appelle distance des deux droites parallèles (D) et (D') la distance AA'.

Exercice
Trace deux droites (D) et (D') parallèles. Mesure la distance qui sépare (D) de (D').

5 Construction d'une droite parallèle à une droite donnée à une distance connue



Méthode :
(D) est une droite donnée. Pour construire une droite (D') parallèle à (D) et située à une distance d donnée de (D), on choisit un point A quelconque de (D).
On trace la perpendiculaire (L) à (D) en A. On trace la parallèle à (D) qui coupe (L) en B telle que la longueur du segment [AB] soit égale à d.

Exercice
(D) est une droite donnée. Trace une droite (Δ) parallèle à (D) située à une distance de 3cm de (D).

Exercices

1) (D) est une droite et A un point comme l'indique la figure suivante.
Quelle est la distance qui sépare la droite (D) du point A ?

2) (D) est une droite.
Place un point A situé a 7cm de la droite (D). Combien as-tu de possibilités ?

3) A est un point du plan. Construis une droite (D) distante de 9cm du point A. Explique ta construction.

4) Construis deux droites parallèles (D) et (D') puis mesure la distance qui sépare (D) et (D').

5) (D) est une droite. Construis une droite (D') parallèle à (D) et située à une distance de 9cm de (D). Combien as-tu de possibilités ?

6) A est un point du plan et (D) une droite située à 2cm du point A.
   a) Construis deux droites (D_1) et (D_2) parallèles à (D) et situées à 5cm du point A.
   b) Quelle est la distance entre les deux droites (D_1) et (D_2) ?
   c) Quelle est la distance de (D) à chacune des deux droites (D_1) et (D_2) ?

7) A est un point du plan.
   a) Construis une droite (D) située à 3cm du point A et une droite (D’) située à 7cm du point A de sorte que (D) et (D’) soient parallèles.
   b) Calcule la distance qui sépare (D) et (D’).

8) A est un point du plan.
Construis une droite (D) située à 3cm du point A et une droite (D’) située à 4,5cm du point A de sorte que (D) et (D’) soient sécantes.

9) On donne une droite (D) et un point A situé à 3cm de (D).
   a) Construis deux droites (D_1) et (D_2) parallèles à (D) et situées à 2cm de cette droite.
   b) Quelle est la distance du point A à chacune des droites (D_1) et (D_2).

10) On donne un point P.
   a) Construis deux droites (L) et (L’) situées respectivement à 4cm et à 6cm de P telles que (L) et (L’) soient parallèles.
   b) Calcule la distance de (L) à (L’).
   (Indication : il y a deux positions possibles de(L) et (L’))

11) On donne un carré ABCD de côté 3cm.
   a) Construis deux droites parallèles (L) et (L’) à 3cm de (AC).
   b) Construis deux droites parallèles (H) et (H’) situées à 3cm de la droite (BD).
   c) Quelle est la nature du quadrilatère formé par ces 4 droites ?

12) Construis deux droites (D) et (D ’) sécantes en O. Construis un point A sur (D ’) qui soit à 3cm de (D).

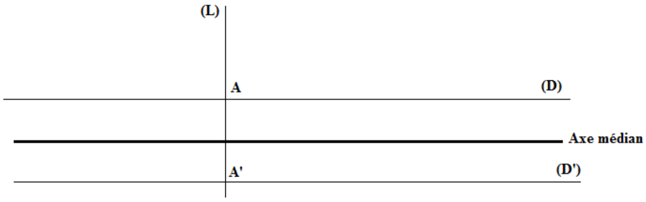
13) Trace une droite (D), puis marque un point M à 5cm de (D). Construis la droite (D’) parallèle à (D) qui passe par M.

Chapitre 4 : Points équidistants de deux droites et droite des milieux d'un triangle

Objectifs

- Construire l'axe médian de deux droites parallèles ;
- construire un point à une distance donnée de deux droites sécantes ;
- utiliser la propriété de la droite des milieux et la propriété de la droite parallèle à un côté d'un triangle et passant par le milieu d'un autre côté pour démontrer que :
  - deux droites sont parallèles,
  - un point est le milieu d'un côté d'un triangle ou pour calculer la longueur d'un segment.

1 Points équidistants de deux droites parallèles : Axe médian de deux droites parallèles



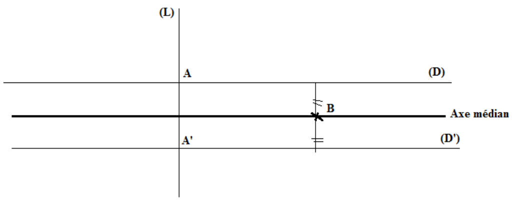
Définition

(D) et (D') sont deux droites parallèles. Une droite (L) perpendiculaire à (D) et à (D') les coupe respectivement en deux points A et A'.

On appelle axe médian des deux droites (D) et (D') la médiatrice du segment [AA'].

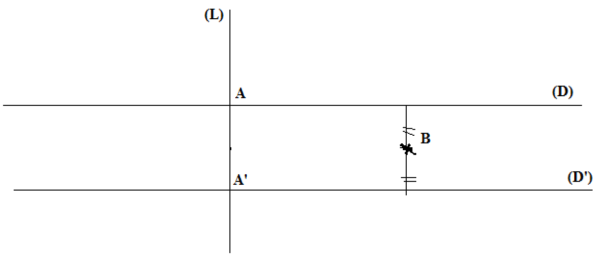
Propriétés

1) *Si un point appartient à l'axe médian de deux droites parallèles alors il est équidistant de ces deux droites.*



(D) et (D') sont deux droites parallèles et (L), l'axe médian de (D) et (D').
Si B ϵ (L) alors la distance de B à (D) est égale à la distance de B à (D').

2) *Si un point est équidistant de deux droites parallèles alors il appartient à l'axe médian de ces deux droites parallèles.*



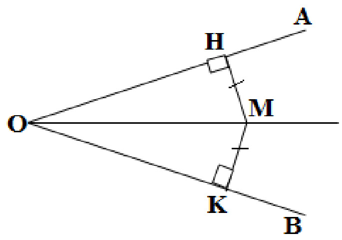
Exercices

1) Trace deux droites (AB) et (CD) parallèles puis construis l'axe médian de (AB) et (CD).
2) Construis un parallélogramme ABCD. Place un point O qui est à la fois équidistant des droites (AB) et (DC) puis (AD) et (BC).

2 Points équidistants de deux droites sécantes

2.1 Cas de la bissectrice d'un angle

Propriété
Si un point appartient à la bissectrice d'un angle alors il est équidistant des supports des deux côtés de cet angle.



Si M est un point de la bissectrice de l'angle $\widehat{AOB}$ alors la distance de M à (OA) est égale à la distance de M à (OB).

2.2 Construction d'un point à une distance égale de deux droites sécantes

Méthode
(D) et (D') sont deux droites sécantes en un point O.
(D) et (D') définissent quatre angles opposés deux à deux par le sommet O. Les bissectrices des angles opposés par le sommet O sont constituées des points situés à la même distance des droites (D) et (D').
Propriétés

1) *Si un point appartient aux bissectrices des quatre angles deux à deux opposés par le sommet que forment deux droites sécantes alors il est équidistant des deux droites.*
2) *Si un point est équidistant de deux droites sécantes alors il appartient aux bissectrices des quatre angles deux à deux opposés par le sommet que forment ces deux droites sécantes.*

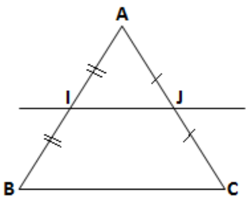
Exercices

1) Trace deux droites (D) et (D') sécantes en un point A. Place un point B équidistant de 5cm des deux droites (D) et (D').
2) A est un point du plan. Trace deux droites (D) et (D') sécantes en un point O et distantes chacune de 3cm de A. Sur quelle droite particulière se trouve A ?

3 Droite des milieux

Propriétés

1) *Dans un triangle, si une droite passe par les milieux de deux côtés alors elle est parallèle au support du troisième côté.*
2) *Dans un triangle, la longueur du segment qui joint les milieux de deux côtés est égale à la moitié de la longueur du troisième côté.*



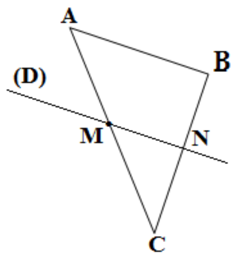
ABC est un triangle. I milieu de [AB] et J milieu de [AC]alors (IJ) ∥ (BC) et IJ = $\frac{1}{2}$ *BC. La droite (IJ) est appelée droite des milieux*

Exercice
Construis un triangle ABC tel que AB= 8cm ; BC= 9cm et CA= 7cm.
Place les points A' ; B' et C' milieux respectifs de [BC] ; [CA] et [AB].
Construis le triangle A'B'C' et donne la longueur de ses côtés.

4 Droite passant par le milieu d'un côté d'un triangle

Propriété

Dans un triangle, si une droite passe par le milieu d'un côté et est parallèle au support d'un autre côté alors elle passe par le milieu du troisième côté.



ABC est un triangle. M est le milieu de [AC], M ∈ (D) et (D) ∥ (AB) alors (D) passe par le milieu N de (BC)
Exercice
ABC est un triangle rectangle en B.
La médiatrice de [BC] coupe l'hypoténuse en un point K.
Démontre que le point K est milieu de [AC].
Exercices

1) (D) et (D') sont deux droites parallèles.
   a) Construis un point A équidistant des droites (D) et (D').
   b) Construis l'axe médian des deux droites (D) et (D').

2) (D) et (D') sont deux droites parallèles et A un point situé dans la bande formée par (D) et (D'). Construis un point M de la même bande de sorte que la distance de M à (D) soit égale à la distance de M à (D') et aussi égale à la distance de M à A.

3) (D) et (D') sont deux droites sécantes en un point O.

a) Construis un point A équidistant de 3cm de (D) et (D'). Combien de possibilités as-tu pour construire le point A ?
b) Construis un point B situé à 5cm de (D) et à 2cm de (D'). Combien as-tu de possibilités pour construire le point B ?

4) ABO est un triangle.
I est le milieu de [AB] ; K est le milieu de [AI] ;
J est le milieu de [AO] et L est le milieu de [AJ].

a) Montre que (IJ) est parallèle à (BO).
b) Montre que (KL) est parallèle à (IJ).
c) Montre que (KL) est parallèle à (BO).

5) ATI est un triangle.
B est milieu de [AT].
La parallèle à (TI) passant par B coupe (AI) en C.

a) Montre que C est milieu de [AI].
b) La parallèle à (AI) passant par B coupe (TI) en D. Montre que D est milieu de [TI].
c) Montre que (CD) est parallèle à (AT).

6) DEF est un triangle tel que DE = 3,6cm ; DF = 2,5cm et EF = 3cm.
M et N sont les milieux respectifs des segments [DF] et [EF].
Fais un raisonnement pour calculer la longueur MN.

7) RST est un triangle tel que RS = 5,1cm ; RT = 2,3cm et ST = 3,5cm.
K et L sont les milieux respectifs de [RS] et [RT].

a) Calcule la longueur KL.
b) Calcule le périmètre du trapèze STLK.

8) Soit A un point du plan.
Construis deux droites sécantes (D) et (D') situées à 3cm du point A.

9) On donne une droite (D) et un point A n'appartenant pas à (D).

a) Construis la droite (D') symétrique de (D) par rapport au point A.
b) Démontre que le point A appartient à l'axe médian des deux droites (D) et (D').

10) On donne deux droites parallèles (L) et (L'), leur axe médian (D), une droite (D') qui coupe (L) au point B, (L') au point C et (D) au point A.
Démontre que le point A est le milieu du segment [BC].

11) On donne un parallélogramme ABCD, le milieu I de [AD] et le milieu J de [BC].

a) Démontre que la droite (IJ) est l'axe médian de (AB) et (CD).
b) Marque un point N sur le segment [IJ].
Compare les aires des triangles NAB et NCD.

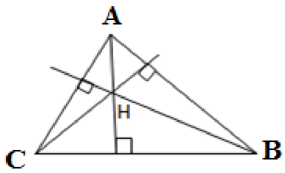
12) On donne les droites (D) et (D') sécantes en A.
Construis un point B situé à 3cm de A et équidistant des droites (D) et (D').
Combien peux-tu construire de tels points ?

Chapitre 5 : Triangles et droites : droites particulières d'un triangle

Objectifs

- Construire et reconnaître dans un triangle donné :
  - ➢ l'orthocentre,
  - ➢ le centre du cercle inscrit,
  - ➢ le centre de gravité ;
- démontrer que :
  - ➢ deux droites sont concourantes (en utilisant l'orthocentre, le centre de gravité, le centre du cercle inscrit),
  - ➢ deux droites sont perpendiculaires (en utilisant l'orthocentre).

1 Hauteur d'un triangle : orthocentre



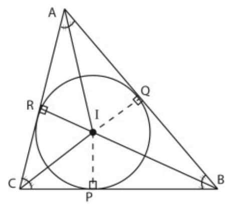
Propriété
Les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes.
Le point de concours des trois hauteurs d'un triangle est appelé orthocentre de ce triangle.

Exercice

ABC est un triangle dont l'angle $\widehat{ABC}$ est obtus et MNP est un triangle rectangle en M.

a) Construis les deux triangles ABC et MNP ainsi que leurs hauteurs respectives.
b) Retrouves-tu le résultat présenté ci-dessus ?
c) Où se situent leurs orthocentres respectifs ?

2 Bissectrices : centre du cercle inscrit



Propriété
*Les trois bissectrices des angles d'un triangle sont concourantes. Leur point commun I est le centre du cercle inscrit dans ce triangle***.**

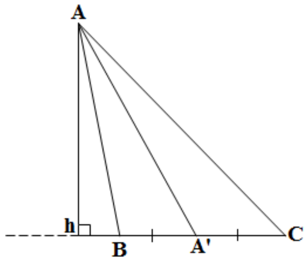
Exercice

ABC est un triangle.

a) Construis le point I commun aux trois bissectrices du triangle ABC puis construis le cercle inscrit à ce triangle.
b) Construis le point M, centre du cercle circonscrit au triangle ABC.
c) Les points I et M sont-ils confondus ?

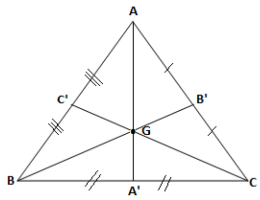
3 Médianes : centre de gravité

Propriété 1



Chaque médiane d'un triangle le partage en deux triangles de même aire. On a: $\mathcal{A}ire$(ABA') = $\mathcal{A}ire$ (AA'C).

Propriété 2



Les trois médianes d'un triangle ABC sont concourantes en un point G appelé le centre de gravité du triangle ABC. De plus, on démontre que :
$AG = \frac{2}{3}\ AA'$; $BG = \frac{2}{3}BB'$ et $CG = \frac{2}{3}CC'$.

Exercices

1. ABC est un triangle. On désigne par G son centre de gravité. Montre que :
AG = $\frac{2}{3}\mathbf{AA'}$; BG = $\frac{2}{3}$ BB' et CG = $\frac{2}{3}$ CC'.
2. ABC est un triangle équilatéral.
a) Construis les points I et J, respectivement centre de gravité du triangle ABC et centre du cercle circonscrit au triangle ABC. Que remarques-tu ?
b) Construis l'orthocentre et le centre du cercle inscrit au triangle ABC. Quelles remarques fais-tu encore ?

Exercices

1) ABC est un triangle et $(\mathcal{C})$ son cercle inscrit de centre I.
   P, Q et R sont respectivement les points de contact du cercle aux côtés [BC], [CA] et [AB].
   Démontre que le rayon du cercle $(\mathcal{C})$ est égal au quotient de l'aire du triangle ABC par son demi-périmètre.

2) On donne trois droites (D_1), (D_2) et (D_3) concourantes et I un point de (D_1) La perpendiculaire à (D_2) passant par I coupe (D_3) en J et la perpendiculaire à (D_3) passant par I coupe (D_2) en K. Que peut-on dire des droites (KJ) et (D_1) ?

3) Construis un triangle ABC sachant que BC = 6cm ; la longueur de la médiane [AA'] est 5cm et la mesure de la hauteur [AH] est 3cm.

4) ABC est un triangle tel que AB = 5cm.
I est le milieu du côté [AB], J le milieu du côté [AC], I' milieu du côté [AI] et J' milieu de [AJ].
Construis la figure, puis calcule IJ et I'J'.

5) ODE est un triangle avec DE = 4cm.
P est le symétrique de O par rapport à D et Q est le symétrique de O par rapport à E.
   a) Construis la figure ;
   b) Pourquoi les droites (PQ) et (DE) sont-elles parallèles ?
   c) Calcule PQ.

6) ABC est un triangle. Les points M et M' sont les milieux respectifs de [AB] et [BC].
   a) Construis la figure.
   b) Trace la parallèle à (AC) passant par M.
      Pourquoi cette droite coupe-t-elle [BC] en son milieu I ?
      Pourquoi (M'I) est-elle parallèle à (AB) ?

7) ABCD est un parallélogramme.
Le point M est le milieu du côté [AB] et la droite (DM) coupe la droite (AC) en I.
Trace la parallèle à la droite (DM) passant par B; elle coupe (AC) en J.
   a) Construis la figure.
   b) On se propose de démontrer que I est le milieu de [AJ] ; pour cela :
      - ✓ dans le triangle ABJ, que sait-on du point M ? De la droite (IM) ?
      - ✓ conclus.

8) M, N et P sont trois points d'une droite (D).
A est un point n'appartenant pas à (D).
M', N' et P' sont respectivement les milieux des segments [AM], [AN] et [AP].
Démontre que les points M', N' et P' sont alignés.

9) Le quadrilatère ABCD est un trapèze de bases [AB] et [DC].

Le point I est le milieu du côté [AD]. La droite (L) passant par I et parallèle au côté [DC] coupe [BC] en J, [BD] en N et [AC] en M.

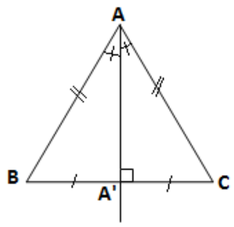
   a) Démontre que le point J est le milieu du côté [BC].
   b) Démontre que : IN = JM et IM = JN.
   c) Démontre que : $\frac{1}{2}$ (DC − AB) = NM.

Chapitre 6 : Droites particulières d'un triangle isocèle et équilatéral

Objectifs

- Démontrer qu'un triangle est isocèle ou équilatéral en utilisant les propriétés des droites particulières ;
- démontrer en utilisant la caractérisation d'un triangle isocèle par les droites particulières :
  - que deux droites sont perpendiculaires,
  - qu'un point est le milieu d'un côté d'un triangle.

1 Médiatrice, médiane, bissectrice et hauteur dans un triangle isocèle

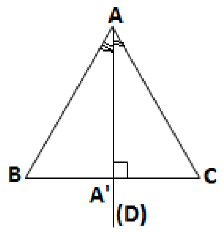


Propriété

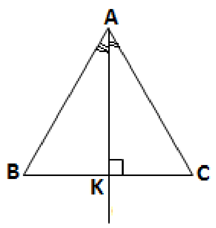
L'axe de symétrie d'un triangle isocèle ABC est à la fois la médiatrice de sa base, la bissectrice de l'angle au sommet principal, la hauteur et la médiane passant aussi par son sommet principal.

2 Reconnaissance d'un triangle isocèle

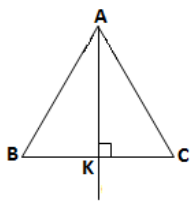
Propriétés



1. Dans un triangle, si une droite est à la fois bissectrice et médiane alors ce triangle est isocèle.

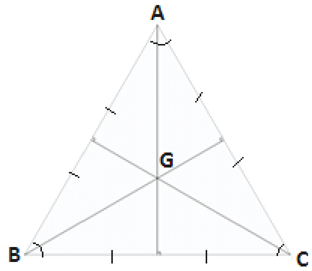


2. Dans un triangle, si une droite est à la fois bissectrice et hauteur alors ce triangle est isocèle.



3. Dans un triangle, si une droite est à la fois hauteur et médiane alors ce triangle est isocèle.

3 Droites particulières dans un triangle équilatéral



Propriété

Dans un triangle équilatéral, le centre de gravité G est à la fois l'orthocentre du triangle, le centre du cercle circonscrit au triangle et le centre du cercle inscrit dans le triangle.

Exercices

1) Un triangle ABC est tel que le centre de gravité appartient à la hauteur (AH). Que représente la droite (AH) pour le triangle ? Quelle est la nature du triangle ?

2) Construis deux demi-droites perpendiculaires [Ax) et [Ay) et un cercle de centre A. Ce cercle coupe [Ax) en B et [Ay) en C. Quelle est la nature du triangle ABC ? Justifie.

3) Construis un triangle ABC tel que AB = AC. Soit A' le milieu de [BC] ; note sur les demi-droites [AB) et [AC) les points D et E tels que AD = AE.
Vérifie que la figure admet un axe de symétrie. Quelle est la nature du triangle A'DE ?

4) LAC est un triangle isocèle en L. Les médianes issues de A et C se coupent en U. Démontre que la droite (LU) est perpendiculaire à (AC).

5) JFC est un triangle isocèle en C. La médiane issue de C coupe la bissectrice de l'angle $\hat{\mathrm{F}}$ en O. Démontre que (OJ) est la bissectrice de l'angle $\hat{\mathrm{J}}$.

6) Un triangle isocèle ABC est tel que AB=AC. Détermine les mesures des angles de ce triangle dans chacun des cas suivants :
   a) $mes\hat{\mathrm{B}}$ = 45° ;
   b) $mes\hat{\mathrm{A}}$ = 45° ;
   c) $mes\hat{\mathrm{B}}$ = 60° ;
   d) $mes\hat{\mathrm{B}}$ = 42°.

7) Un triangle ABC est tel que le centre de gravité appartient à la hauteur (AH).
Que représente la droite (AH) pour ce triangle ?
Quelle est la nature de ce triangle ?

8)
   a) Construis un triangle ABC tel que BA = BC = 4cm et $mes\hat{\mathrm{B}}$ = 120°.
   b) Calcule les mesures des angles du triangle ABC.

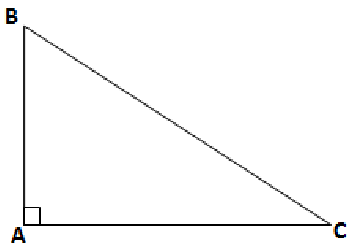
c) Construis l’orthocentre H du triangle ABC et trace le cercle (C) de centre B et de rayon BA. Que remarques-tu ?

Chapitre 7 : Propriétés métriques d'un triangle : propriété de Pythagore et sa réciproque

Objectifs

- Calculer la longueur d'un côté d'un triangle rectangle en utilisant la propriété de Pythagore ;
- démontrer qu'un triangle est rectangle en utilisant la réciproque de la propriété de Pythagore ;
- calculer la longueur de la hauteur issue du sommet de l'angle droit.

1 Propriété de Pythagore

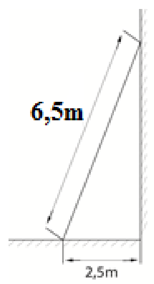


Propriété de Pythagore
Si un triangle ABC est rectangle en A et d'hypoténuse [BC] alors on a : $BC^2 = AB^2 + AC^2$

Exercices

1) Moussa veut clôturer une partie de son terrain. Cette partie a la forme d'un triangle MNP rectangle en N. Il connaît la mesure du côté [NP] et de l'hypoténuse [MP] :
NP = 20m et MP = 25m.
Aide Moussa à déterminer la mesure du côté [MN] pour lui permettre d'acheter la juste mesure du grillage qu'il lui faudra.

2) Une échelle de longueur 6,5m est posée contre un mur ; le bas de l'échelle est à 2,50m du mur (figure ci-contre).
A quelle distance du sol se trouve le haut de l'échelle ?



2 Réciproque de la propriété de Pythagore

Propriété réciproque de la propriété de Pythagore
Si un triangle ABC est tel que $BC^2 = AB^2 + AC^2$*, alors ce triangle est rectangle en A.*
Exercices

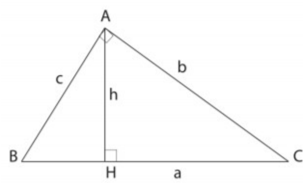
1) Les mesures des côtés d'un triangle EFG sont en cm : EF = 12 ; EG = 9 et FG = 9.
Ce triangle est-il rectangle ?
2) a) Trace les triangles suivants dont les mesures des côtés en cm sont :

- BC = 6 ; CA = 8 et AB = 10.
- DC = 6 ; CA = 10 et AB = 12.
- BC = 2,6 ; CA = 1 et QB = 2,4.

b) Indique parmi ces triangles ceux qui sont rectangles, en précisant les côtés perpendiculaires.

3 Propriété métrique déduite de l'aire

Propriété



Dans un triangle rectangle, le produit des côtés de l'angle droit est égal au produit de l'hypoténuse et de la hauteur issue du sommet de l'angle droit.

On a donc l'égalité $\boxed{a \times h = b \times c.}$

Exercice:

Le triangle ABC est tel que : AB = 40, BC = 41 et CA = 9.

a) Vérifie que ce triangle est rectangle.
b) Calcule la distance de A à la droite (BC)

Exercices

1) a) Dessine un rectangle ABCD tel que : AB = 4cm et BC = 3cm.
   b) Calcule la longueur de ses diagonales. Vérifie sur le dessin.
2) Un triangle ABC est tel que AB = 40cm ; BC = 41cm et CA = 9cm.
   a) Vérifie que ce triangle est rectangle.
   b) Calcule la distance de A à la droite (BC).
3)
   a)Trace un triangle équilatéral ABC dont les côtés mesurent 4cm.
   b) Dessine la hauteur [AH] de ce triangle (H étant le pied de cette hauteur).
   c) Calcule la longueur du segment [AH]. Vérifie.
4) a) On considère un triangle ABC rectangle en A et dont les mesures des côtés sont : AC = 48mm et BC = 60mm. Calcule la longueur du côté [AB].
   b) Construis en grandeur réelle le triangle ABC puis la hauteur [AH], H étant le pied de la hauteur issue de A.
   c) Calcule l'aire du triangle ABC.
   d) Calcule les longueurs AH, BH et CH. Vérifie sur la figure réalisée.
5)
   a) Construis un trapèze ABCD rectangle en A et B tel que AD = 7cm ; BC = 4cm ; AC = 5,5cm.
   b) Calcule l'aire de ce trapèze.
6)
   a) Construis un losange ABCD tel que AC =6cm et BD = 8cm.
   b) Quelle est la longueur de ses côtés?

Chapitre 8 : Nombres décimaux relatifs et puissance de 10

Objectifs

- Définir une puissance de 10 à exposant entier relatif ;
- multiplier un nombre par une puissance de 10 ;
- écrire des puissances de 10 sous différentes formes ;
- écrire un nombre décimal sous la forme $a.10^n (a \in \mathbb{D}\ et n\ \in \mathbb{Z})$;
- trouver l'écriture scientifique et l'ordre de grandeur d'un nombre décimal ;
- calculer le produit de deux nombres décimaux écrits sous la forme $a.10^n (a \in \mathbb{D}\ et\ n\ \in \mathbb{Z})$;
- encadrer un nombre décimal par deux puissances de 10 à exposants entiers relatifs ;
- comparer deux nombres décimaux écrits sous la forme $a.10^n (a \in \mathbb{D}\ et\ n\ \in \mathbb{Z})$.

1 Définition d'une puissance de dix à exposant entier relatif

Définition
n est un entier naturel.
On appelle puissance d'exposant n de 10, le produit de n facteurs égaux à 10.

- 10^n *= 10 × 10* × 10 ×*…*× 10 *(n facteurs égaux à 10).*
  = 1000…0 (n zéros après 1).
- 10^{-n}*= 0,1 × 0,1 × 0,1×…×0,1(n facteurs égaux à 0,1).*
  = 0,00…1 (n chiffres après la virgule).

Exemples

1) 10^5=10 × 10 × 10 × 10 × 10
   =100 000 (on compte 5 zéros après 1).

2) 10^{-3}= 0,1 × 0,1 × 0,1
   =0,001(on compte 3 chiffres après la virgule).

Propriétés
m et n sont deux entiers relatifs

- $10^n \times 10^m = 10^{n+m}$.
- $(10^n)^m = 10^{n\times m}$.
- $\frac{1}{10^n} = 10^{-n}$.
- $\frac{10^n}{10^m} = 10^{n-m}$.

2 Multiplication d'un nombre par une puissance de dix

Activité 2
Effectue les multiplications suivantes :

a) 2,57×10 ; 77×10^2 ; 8,5×10^3.
b) 782,5×10^{-1} ; 3×10^{-2} ; 8,9×10^{-3}.

Quelles remarques fais-tu?

Règle

- *Pour multiplier un nombre décimal par* 10^1, 10^2, 10^3, ..., 10^n*, on déplace la virgule respectivement de 1, 2, 3,..., n rang(s) vers la droite du nombre que multiplie la puissance de 10.*
- *Pour multiplier un nombre décimal par* 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, ..., 10^{-n}*, on déplace la virgule respectivement de 1, 2, 3, ..., n rang(s) vers la gauche du nombre que multiplie la puissance de 10.*

3 Ecriture d'un nombre décimal sous différentes formes

3.1 Ecriture d'un nombre décimal sous la forme a$\times 10^n$(a$\in \mathbb{D}$ *et* n$\in \mathbb{Z}$)

Règle
Un même nombre décimal peut s'écrire sous plusieurs formes différentes comme produit d'un autre nombre par une puissance quelconque de 10.

3.2 Ecriture scientifique et ordre de grandeur d'un nombre

Règle
Un nombre décimal écrit sous la forme a $\times 10^n$ *est en écriture scientifique si a est un nombre décimal avec un seul chiffre non nul avant la virgule et n, un entier relatif.*

Remarque
L'écriture scientifique d'un nombre décimal permet de mieux percevoir son ordre de grandeur.
Exemples

Nombres décimaux	Notations scientifiques
0,001 743	1,743$\times 10^{-3}$
5 454	5,454$\times 10^{3}$
-72 000	-7,2$\times 10^{4}$

3.3 Ordre d'un nombre décimal

Définition
n est un nombre entier naturel.
Un nombre décimal est d'ordre n s'il peut être écrit sous la forme d'un produit d'un nombre entier relatif par 10^{-n} .

<u>NB</u> : un nombre décimal écrit avec n chiffres après la virgule est un nombre décimal d'ordre *n*.
Exemple
1, 37 est un nombre décimal d'ordre 2 ; car 1,37 = 137 x 10^{-2}
4, 342 est un nombre décimal d'ordre 3 ; car 4,342 = 4342 x 10^{-3}

4 Produit de nombres décimaux écrits sous la forme a$\times 10^n$

(a $\in$ $\mathbb{D}$ et n$\in$ $\mathbb{Z}$)

Règle
a et b sont deux nombres entiers relatifs, n et p deux entiers relatifs.
Le produit $(a\times 10^n)\times(b\times 10^p) = (a\times b)\times 10^{n+p}$.

<u>Exemples :</u>

1) $(1{,}8\times10^5)\times(3\times10^{-7}) = (1{,}8\times3)\times10^{(5+(-7))}$.
$=5{,}4\times10^{-2}$.

2) $\frac{1{,}8\times10^5}{3\times10^{-7}}=\frac{18\times10^4}{3\times10^{-7}} = \left(18 \text{ x } \frac{1}{3}\right) \text{ x } 10^{4+7}$

$= 6\times10^{11}$.

5 Encadrement d'un nombre décimal par deux puissances de dix à exposants entiers relatifs consécutifs

Règle

Pour donner un encadrement d'un nombre décimal écrit sous la forme $a\times10^n$ par deux puissances de dix, on cherche un encadrement de a par deux puissances de dix d'exposant entiers relatifs consécutifs en sachant que 1= 10^0 et 10=10^1.

On détermine un encadrement de $a\times10^n$ en multipliant chaque membre de l'inégalité précédemment obtenue par10^n.

<u>Exercice :</u>

Donne un encadrement de chacun des nombres décimaux suivants par deux puissances de dix d'exposants entiers consécutifs :

$81{,}7\times10^{-5}$; $0{,}45\times10^{-3}$; 746×10^5 ; $3{,}14\times10^9$.

6 Comparaison des nombres décimaux écrits sous la forme a×10^n (a∈ $\mathbb{D}$ et n∈ $\mathbb{Z}$)

Méthode

Pour comparer des nombres décimaux positifs A et B écrits sous la forme $a\times10^n$, on donne les notations scientifiques de chacun des nombres A et B :

$A= y \times10^h$ et $B = z \times10^k$.

Si h ≠ k, alors A et B sont rangés dans le même ordre que h et k.

Si h = k, alors A et B sont rangés dans le même ordre que y et z.

Exercice

Compare les nombres suivants :

- A= $27{,}5 \times10^{-4}$ et B =$7{,}3\times10^{-4}$.
- A=$-3{,}14\times10^{-2}$ et B = $-5{,}4\times10^{-1}$.
- A= $7{,}5\times10^5$ et B = 34×10^4.
- A= $-13{,}92 \times 10^{-5}$ et B = $-1{,}38\times10^{-6}$.

Exercices

1) Ecris les nombres suivants sous la forme d'une seule puissance de dix :

100 ; 1 000 000 ; 0,000 01 ; 0,001 ; 1 000 000 000 ; 0,000 000 1 ;

0,000 001 × 1 000 ; $10^3\times 10^4$; $10^{-3}\times 10^9$; $(10^2)^4$; $(10^{-3})^2$; $\frac{1}{100}\times\frac{1}{10}$; $\frac{1}{100}\times\frac{1}{100\,000}$;

$\frac{10^{-2}}{10^{-3}}$; $\frac{1}{10^{-5}}$; $\frac{10^{-3}}{10^3}\times\frac{10^6}{10^{-6}}$.

2) Ecris les nombres suivants sous la forme a × 10^p où a et *p* désignent des nombres entiers relatifs, *p* prenant la plus grande valeur entière possible :

14,54 ; 2,6 ; - 1200 ; 0,000053 ; 7 ; 500 000 ; 12,57 ; 100,45.

3) Donne l'écriture décimale de chacun des nombres ci-dessous :

$15{,}6\times10^{-1}$; 55×10^3 ; 749×10^{-5} ; $\frac{2}{5}\times10^3$; $7{,}56 \times10^{-2}$.

4) Donne la notation scientifique des nombres suivants :

53 ; 765 ; -64,45 ; 0,000 57 ; 5^2 ; 20^2; $25\times\ 10^{-3}$; 12,43× 10^3 ; $\frac{145\times10^{-2}}{5\times10^{-3}}$; 3,5×10^{-2} + 5,2×10^{-3} ; 1,45×10^3 × 2,4×10^{-2} ; 0,7× 3,25.

5) Compare deux à deux les nombres suivants :

7×10^6 et 83×10^5 ; 5 400×10^{-2} et 0,55×10^2 ; 120×10^6 et 0,015×10^{11} ; 90×10^6 et -11×10^4 ; $\frac{1}{4}$×10^{12} et 0,02×10^{14}.

6) Calcule le produit des nombres suivants:

-8 × 10^2 et 5,3 × 10^5 ; 7 × 10^{-5} et $\frac{3}{14}$× 10^2 ; 2,3 × 10^6 et 0,17 × 10^2 ; 1,45 × 10^3 et 2,4 × 10^{-2}.

7) Trouve l'ordre de grandeur de chacun des nombres suivants :

–0,005 ; 0,12 ; 5,4 ; 12,423 ; 17 ; 1,4 ×10^{-2} .

8) Donne l'inverse de chacun des nombres suivants sous forme d'une puissance de 10 :

$(10^2)^2$; $(10^2)^3$; $(10^{-2})^3$; $(10^3)^{-2}$.

9) On donne a = 7,5× 10^{-5} et b =18× 10^{-3}.

Calcule a×b et $\frac{a}{b}$.

Donne les résultats en notation scientifique.

Chapitre 9 : Ensemble des nombres rationnels

Objectifs

- Distinguer sur une liste de nombres les décimaux relatifs et les rationnels ;
- passer de l'écriture d'un quotient de nombres décimaux à l'écriture d'un quotient de nombres entiers ;
- simplifier un nombre rationnel ;
- comparer des nombres rationnels directement ou éventuellement en utilisant une droite graduée.

1 Les nombres rationnels

Définition
Un nombre rationnel est un nombre égal à une fraction ou à l'opposé d'une fraction.
L'ensemble des nombres rationnels est désigné par $\mathbb{Q}$.

Remarque
Tout nombre entier naturel est un nombre entier relatif. On note : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.
Tout nombre entier relatif est un nombre décimal. On note : $\mathbb{Z} \subset \mathbb{D}$.
Tout nombre décimal est un nombre rationnel. On note : $\mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$.
Ainsi, on écrit : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$.

Exercices

1) Sur une droite graduée de repère (O,I), place les points A, B, C, E, Fet G d'abscisses respectives $-\frac{2}{3}$; $\frac{4}{3}$; $\frac{7}{3}$; $\frac{8}{3}$; $-\frac{5}{6}$ et $\frac{7}{6}$.
2) On donne les nombres suivants :

   $\frac{5}{2}$; $\frac{7}{3}$; $-\frac{15}{6}$; $\frac{7}{4}$; $\frac{5}{7}$; $-\frac{4}{5}$; $\frac{10}{9}$; $\frac{8}{5}$; $\frac{-11}{4}$.

Dans un tableau à deux colonnes, recopie dans une colonne les nombres décimaux et dans l'autre colonne, les nombres rationnels qui ne sont pas des nombres décimaux :

2 Ecriture des nombres rationnels

Définition
Un nombre rationnel est un quotient de deux nombres entiers relatifs.
a et b étant deux entiers relatifs et b non nul, un nombre rationnel peut s'écrire sous la forme $\frac{a}{b}$.
a et b étant deux nombres entiers relatifs et b non nul, $\frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}$.
Définition du quotient de deux nombres entiers relatifs
a et b étant deux nombres entiers relatifs et b non nul, on appelle quotient de a par b le nombre rationnel $q = \frac{a}{b}$.

3 Simplification des nombres rationnels

Méthode
Pour simplifier un nombre rationnel écrit sous forme d'une fraction, on peut :

- *rechercher les diviseurs communs du numérateur et du dénominateur de la fraction donnée ;*

- *décomposer le numérateur et le dénominateur de la fraction donnée en un produit de facteurs premiers ;*
- *procéder à des simplifications successives.*

Exercice :
Simplifie chacun des nombres rationnels suivants :
$\frac{36}{150}$; $-\frac{18}{24}$; $-\frac{35}{56}$; $\frac{120}{-160}$; $\frac{-16}{-48}$; $\frac{-210}{441}$.

4 Comparaison des nombres rationnels

Règle
Pour comparer deux nombres rationnels, on se ramène à comparer des nombres décimaux relatifs, des fractions et des opposés de fractions.

Exercice :
Compare les nombres rationnels suivants :
$\frac{5}{4}$ et $\frac{4}{5}$; $-\frac{15}{16}$ et $-\frac{16}{15}$; $-\frac{1}{27}$ et $-0,2$; $-\frac{13}{12}$ et $-\frac{121}{137}$; $-\frac{1}{12}$ et $-\frac{4}{5}$.

Exercices

1) a) Trace une droite graduée (D) de repère (O, I) tel que OI = 2cm.

b) Place sur la droite (D) les points A ; B ; C ; D ; E et F d'abscisses respectives $-\frac{2}{3}$; $\frac{1}{2}$; $-\frac{7}{5}$; $\frac{5}{2}$; $\frac{1}{4}$ et $-\frac{9}{4}$.

c) Place sur cette même droite les points A' ; B' ; C' ; D' ; E' et F' dont les abscisses sont les opposés respectifs de $-\frac{2}{3}$; $\frac{1}{2}$; $-\frac{7}{5}$; $\frac{5}{2}$; $\frac{1}{4}$ et $-\frac{9}{4}$.

2) Sur une droite graduée (unité 3cm), place les points d'abscisses : $\frac{2}{3}$; $-\frac{1}{3}$; $\frac{5}{-3}$; $-\frac{3}{6}$; $\frac{-9}{-6}$ et leurs opposés.

3) Recopie et complète chaque phrase :

a) les nombres $\frac{-2,5}{4}$ et $\frac{2,5}{4}$ sont …

b) les nombres -4,8 et- $\frac{1}{4,8}$ sont …

c) les nombres - $\frac{4}{3,1}$ et - $\frac{3,1}{4}$ sont …

d) les nombres $\frac{4}{9}$ et $-\frac{4}{9}$ sont…

4) Dans chaque cas, prouve que les deux nombres sont opposés ou non :

a) $-\frac{2}{3}$ et $\frac{8}{12}$; b) $-\frac{2}{8}$ et $\frac{3}{12}$; c) $\frac{5}{6}$ et $-\frac{14}{24}$.

5) Parmi les écritures suivantes, lesquelles peuvent être simplifiées ? Simplifie-les :

a) $-\frac{14}{3}$; b) $\frac{39}{6}$; c) $\frac{24}{-29}$; d) $\frac{42}{21}$; e) $\frac{-72}{25}$; f) $\frac{-81}{-72}$; g) $\frac{125}{75}$.

6) Ecris chacun des nombres suivants sous forme d'une fraction ou de l'opposé d'une fraction irréductible:

$\frac{8}{12}$; $-\frac{30}{36}$; $\frac{-27}{18}$; $\frac{15}{-40}$; $\frac{-360}{108}$; $\frac{-91}{49}$; $\frac{45}{-99}$; $\frac{120}{180}$.

7) Sans réduire au même dénominateur et sans calculer le quotient, compare les nombres rationnels suivants :

$-\frac{1}{12}$ et $-\frac{4}{5}$; $\frac{-1}{7}$ et $\frac{1}{-9}$; $-\frac{1}{27}$ et $-0{,}2$.

8) Donne une écriture des nombres ci-dessous sous la forme de $\frac{a}{b}$ où a et b sont deux entiers relatifs (b est non nul) :

– 0,5 ; 5,4 ; 13,7 ; – 7,5 ; – 5,25 ; 22,47.

9) Parmi les nombres rationnels suivants :

$\frac{2}{4}$; $\frac{16}{5}$; - $\frac{7}{11}$; $-\frac{9}{10}$; $\frac{15}{7}$; $\frac{23}{25}$; $-\frac{25}{13}$ et $\frac{27}{54}$,

Cite ceux qui ne sont pas des nombres décimaux relatifs.

10) On donne les nombres rationnels suivants :

$\frac{3}{4}$; $\frac{11}{6}$; $-\frac{7}{11}$; $-\frac{4}{9}$; $\frac{15}{7}$; $\frac{23}{25}$; $-\frac{17}{13}$.

Dans un tableau à deux colonnes, recopie dans la colonne de gauche les nombres rationnels qui sont des nombres décimaux et dans la colonne de droite ceux qui ne sont pas des nombres décimaux.

11) Range les nombres suivants par ordre croissant :

– 0,2 ; $-\frac{7}{5}$; $\frac{5}{4}$; $\frac{9}{2}$; 3,5 ; $-\frac{2}{3}$; – 1 ; $-\frac{4}{7}$; $\frac{7}{3}$.

12) Simplifie les nombres rationnels suivants :

$\frac{2^2\times3^2\times7}{2\times3^4\times5}$; $\frac{2^4\times3^5\times5^2}{2^5\times3^4\times5^3\times7}$; $\frac{36}{24}$; $\frac{63}{42}$; $\frac{72}{48}$; $\frac{750}{850}$; $\frac{100}{144}$; $\frac{-99}{44}$; $\frac{-81}{45}$.

13) Compare les nombres rationnels suivants :

$\frac{5}{4}$ et $\frac{4}{5}$; $-\frac{11}{12}$ et $-\frac{12}{11}$; $-\frac{13}{12}$ et $-\frac{121}{137}$; $\frac{1}{12}$ et $\frac{4}{5}$; $\frac{-1}{7}$ et $\frac{1}{-9}$; $\frac{1}{12}$ et 0,2.

14) Après un violent orage sur le verger de Hassan, 7 manguiers sur 15 sont détruits. Dans le verger de Bénam, il y en a 4 sur 9 détruits. Lequel des deux vergers est le plus détruit?

Chapitre 10 : Opérations sur les nombres rationnels

Objectifs

- Calculer la somme, la différence et le produit des nombres rationnels ;
- déterminer l'inverse d'un nombre rationnel non nul et calculer le quotient des nombres rationnels.

1 Somme et différence de nombres rationnels

Règle

Pour calculer la somme ou la différence de deux nombres rationnels écrits sous forme de fractions ou d'opposé de fractions :
- on les réduit à un même dénominateur positif ;
- on calcule la somme (ou la différence) des numérateurs des fractions obtenues.

Exemples :

Calculons $\frac{11}{7} + \left(-\frac{3}{7}\right)$.

Les deux nombres rationnels ont le même dénominateur.
Nous n'avons qu'à calculer la somme des numérateurs pour obtenir le résultat.

$\frac{11}{7} + \left(-\frac{3}{7}\right) = \frac{11+(-3)}{7} = \frac{11-3}{7} = \frac{8}{7}$.

Calculons $\frac{3}{8} + \frac{2}{5}$.

Les deux nombres rationnels ont des dénominateurs différents.
On réduit donc ces nombres au même dénominateur positif.

On a : $\frac{3}{8} + \frac{2}{5}. = \frac{3\times5}{8\times5} + \frac{2\times8}{8\times5} = \frac{15}{40} + \frac{16}{40} = \frac{15+16}{40} = \frac{31}{40}$.

Donc : $\frac{3}{8} + \frac{2}{5}. = \frac{31}{40}$.

Exercices

Calcule les sommes et les différences suivantes :

$\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$; $\left(-\frac{2}{7}\right) + \left(-\frac{3}{2}\right)$; $2 + \frac{1}{4}$.

$\frac{5}{4} - \frac{2}{3}$; $\frac{7}{2} - \left(-\frac{2}{7}\right)$; $2\left(-\frac{3}{4}\right) + \frac{7}{5}$.

2 Produit de deux nombres rationnels

Propriété

a, b, c et d sont des nombres entiers relatifs, b et d étant non nuls

$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d}. = \frac{a\times c}{b\times d}$.

Exemples

$\frac{2}{5} \times \frac{4}{7} = \frac{2\times4}{5\times7} = \frac{8}{35}$;

$\frac{3}{11} \times \left(-\frac{4}{13}\right) = \frac{3\times(-4)}{11\times13} = \frac{-12}{143}$;

$\left(-\frac{7}{9}\right) \times \frac{(-2)}{3} = \frac{(-7)\times(-2)}{9\times3} = \frac{14}{27}$.

Exercices

1) Effectue les produits suivants :

$\frac{3}{5} \times \frac{7}{6}$; $\left(-\frac{3}{5}\right) \times \frac{4}{7}$; $-2 \times \frac{3}{11}$; $\frac{11}{9} \times \left(\frac{-3}{44}\right)$;

2) calcule :

$\frac{2}{3} \times 3 \times \frac{5}{11}$; $(-4) \times \frac{5}{13} \times \left(\frac{-9}{15}\right)$

3 Inverse d'un nombre rationnel non nul

Définition :

a et b sont des nombres entiers relatifs non nuls :

On a : $\frac{a}{b} \times \frac{b}{a} = 1$.

On dit que les nombres rationnels $\frac{a}{b}$ et $\frac{b}{a}$ sont inverses l'un de l'autre.

Exercices

1) Détermine l'inverse de chacun des nombres rationnels suivants :

$\frac{7}{12}$; $\frac{13}{7}$; $-3{,}7$; $\frac{5}{-11}$.

2) Calcule les sommes suivantes et détermine l'inverse de chacune d'elles:

$\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$; $\frac{3}{4} + \frac{4}{5}$.

4 Quotient de deux nombres rationnels

Définition

Le quotient $\frac{a}{b}$ est le produit de a par l'inverse de b :

$\frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b}$.

Règle

a, b, c et d étant des nombres entiers relatifs, b, c et d non nuls, alors

$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$.

Exemples

$\frac{5}{3} : \frac{2}{7} = \frac{5}{3} \times \frac{7}{2} = \frac{35}{6}$; $\frac{2}{11} : 9 = \frac{2}{11} \times \frac{1}{9} = \frac{2}{99}$

Exercice

Calcule les quotients suivants

$\frac{3}{5} : \left(-\frac{2}{3}\right)$; $(-5) : \frac{5}{4}$; $\frac{\frac{9}{8}}{\frac{3}{5}}$; $\frac{\frac{5}{6}}{13}$; $\frac{\frac{-12}{4}}{5}$.

Exercices

1) Effectue les calculs suivants et donne le résultat sous forme d'une fraction ou de l'opposé d'une fraction irréductible :

A= $\left(\frac{7}{3}+\frac{9}{4}\right)-\left(\frac{1}{2}+1\right)$; B = $\left(3-\frac{7}{5}+\frac{3}{10}\right)$ - $\left(\frac{7}{12}-\frac{1}{3}\right)$

C= $\frac{-2}{7}+\frac{5}{21}$; D = $\frac{5}{3}$ - $\frac{1}{2}$ - $\frac{7}{4}$

2) Effectue les opérations suivantes :

$(\frac{6}{7}+\frac{3}{8})\times\frac{14}{23}$; $(\frac{35}{18}+\frac{4}{9})\times\frac{27}{11}$; $\frac{7}{8}-\frac{5}{6}$; $\frac{30}{45}-\frac{98}{56}+\frac{21}{35}$.

3) Recopie le tableau suivant :

X \ y	$\frac{6}{14}$	$\frac{9}{21}$	$\frac{21}{49}$	$\frac{33}{77}$	$\frac{15}{35}$
$\frac{22}{10}$					
$\frac{33}{15}$					
$\frac{88}{40}$					
$\frac{77}{35}$					

a) Que peux-tu dire de toutes les fractions de la première ligne ?

b) Que peux-tu dire de toutes les fractions de la première colonne ?

c) Complète le tableau en multipliant x par y.

4) Calcule les quotients suivants :

a) $\frac{15}{16}\div\frac{5}{8}$; $\frac{14}{15}\div\frac{21}{25}$; $\frac{32}{9}\div\frac{48}{27}$.

b) $\frac{18}{37}\div\frac{15}{74}$; $\frac{-45}{77}\div\frac{18}{55}$; $\frac{-48}{13}\div\frac{-12}{77}$.

5) Calcule les produits suivants:

A = $\frac{4}{9}\times\frac{5}{7}$; B = $\frac{12}{7}\times\frac{14}{6}$; C = $\frac{77}{65}\times\frac{13}{11}\times\frac{10}{14}$;

D = $\frac{4}{42}\times\frac{8}{7}\times\frac{14}{15}\times\frac{75}{81}$; E = $\left(\frac{-3}{4}\right)\times\left(\frac{12}{-5}\right)\times\left(\frac{-25}{6}\right)$.

6) Complète les égalités suivantes:

$\left(\frac{-8}{2}\right)\times\ldots=1$; $\frac{5}{7}\times\ldots=1$; $\left(\frac{-7}{4}\right)\times\ldots=-1$.

7) Effectue les opérations suivantes:

A = $\left(\frac{11}{12}:\frac{33}{16}\right)\times\frac{3}{5}$; B = $\left(\frac{2}{7}:\frac{5}{4}\right)\times\left(\frac{5}{8}:2\right)$; C = $\left(\frac{11}{15}\times\frac{35}{44}\right):\left(\frac{1}{7}\times\frac{4}{13}\right)$.

8) Est-il vrai que : $\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\frac{1}{4\times5}+\frac{1}{5\times6}+\ldots+\frac{1}{998\times999}+\frac{1}{999\times1000}=0{,}999$?

Chapitre 11 : Cercles et droites : positions relatives d'une droite et d'un cercle ; de deux cercles

Objectifs

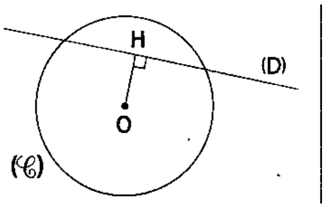
- Déterminer les positions relatives d'un cercle et d'une droite en comparant le rayon du cercle et la distance entre le centre de ce cercle et la droite ;
- déterminer les positions relatives de deux cercles en comparant la somme des rayons, la différence des rayons et la distance entre les deux centres des deux cercles.

1 Positions relatives d'un cercle et d'une droite

Propriétés

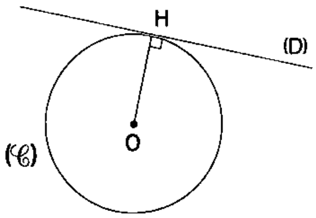
$(\mathcal{C})$ est un cercle de centre O et de rayon r ; (D) est une droite et H un point de (D) tel que (OH) est perpendiculaire à (D).

1) si OH < r alors $(\mathcal{C})$ et (D) ont deux points communs. On dit que le cercle $(\mathcal{C})$ et la droite (D) sont sécants.



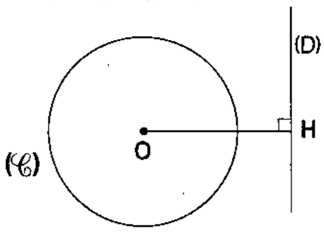
Si $(\mathcal{C})$ et (D) ont deux points communs alors OH < r.

2) Si OH = r alors $(\mathcal{C})$et (D) ont un seul point commun. On dit que $(\mathcal{C})$et (D) sont tangents.



Si $(\mathcal{C})$ et (D) ont un seul point commun alors OH = r.

3) Si OH > r alors $(\mathcal{C})$et (D) n'ont aucun point commun. On dit que $(\mathcal{C})$et (D) sont disjoints.



Si $(\mathcal{C})$et (D) n'ont aucun point commun alors OH > r.

Exercice

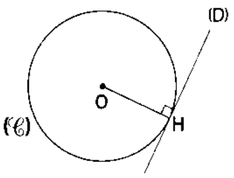
a) Construis un cercle $(\mathcal{C})$de centre O et de rayon r = 5cm.
b) Trace une droite (D) située à 3cm du centre O.
c) Donne la position relative de $(\mathcal{C})$et (D).

2 Tangente à un cercle

2.1 Tangente à un point donné d'un cercle

Définition

(C) est un cercle de centre O et H un point de (C).



On appelle tangente en H au cercle (C) la droite perpendiculaire en H à (OH).

OH est un rayon du cercle (C) ; (D) est la perpendiculaire à (OH) en H.

(D) est tangent à (C) en H et H est le point de contact de (D) et (C).

2.2 Tangentes à un cercle passant par un point extérieur à ce cercle

Règle

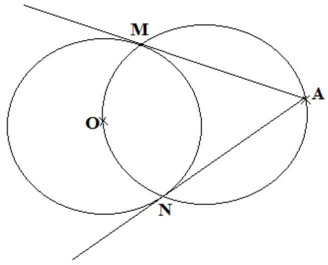
Par un point A extérieur à un cercle (C) donné, il passe deux tangentes à ce cercle.

<u>Méthode de construction des deux tangentes passant par un point A extérieur à un cercle (C) de centre O :</u>

On construit le cercle (C) de centre O donné. Le point A étant fixé, on construit l'autre cercle (C′) de diamètre [OA].

(C) et (C′) se coupent en deux points M et N.

Les droites (AM) et (AN) sont les deux tangentes au cercle (C) en A.



Exercice

(C) est un cercle de centre O et de rayon r = 5cm, A un point extérieur à (C).

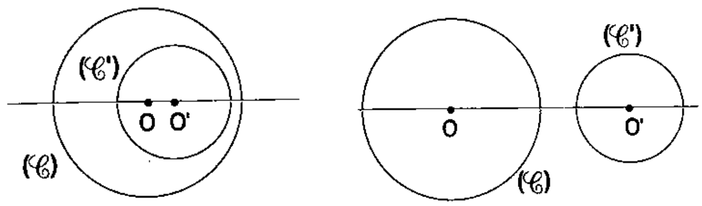
Construis les tangentes à (C) en A.

3 Positions relatives de deux cercles

Propriétés

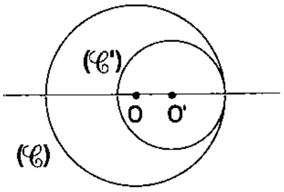
(C) est un cercle de centre O et de rayon r, (C′) est un autre cercle de centre O' et de rayon r' tels que r'< r.

1) Si OO'< r − r' ou OO'> r + r' alors (C) et (C′) n'ont aucun point commun. On dit qu'ils sont disjoints.

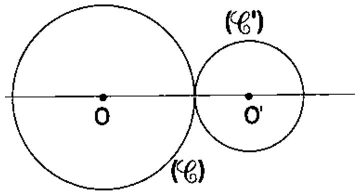


Si (C) et (C') n'ont aucun point commun alors OO'< r − r' ou OO'> r + r'.

2) Si OO'= r − r' ou OO'= r + r' alors (C) et (C') ont un seul point commun. On dit qu'ils sont tangents.

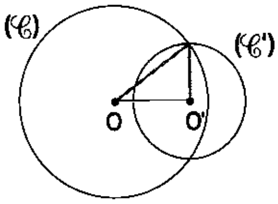


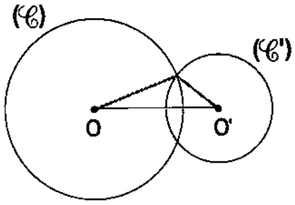
(𝒞) et (𝒞') sont tangents intérieurement



(𝒞) et (𝒞') sont tangents extérieurement

3) Si r − r'< OO'< r + r' alors (C) et (C') ont deux points communs. On dit qu'ils sont sécants.





Si (C) et (C') ont deux points communs alors r − r'< OO'< r + r'.

<u>Exercice :</u>
On donne deux points O et O' tels que OO' = 5cm.
Trace le cercle (C) de centre O et de rayon r = 3cm puis le cercle (C') de centre O' et de rayon r = 2cm. Quelle est la position relative des deux cercles ?

Exercices

1) a) Construis un cercle $(\mathcal{C})$ de centre O et de rayon *r* = 3cm.

b) Trace les droites (D) ; (D') et (D'') respectivement distantes de 2cm, de 3cm et de 4cm du centre O du cercle $(\mathcal{C})$. Que dire des droites (D) ; (D') et (D'') ?

c) (L) et (M) sont deux droites parallèles distantes de 5cm. Construis un cercle $(\mathcal{C}')$tangent à (L) et (M).

2) $(\mathcal{C})$est un cercle de centre O et de rayon *r* = 2cm. Fixe un point A du cercle $(\mathcal{C})$et construis la tangente à $(\mathcal{C})$au point A.

3) a) $(\mathcal{C})$est un cercle de centre O et de rayon *r* = 3,5 cm. Place un point A distant de 5cm du centre O et trace deux tangentes à $(\mathcal{C})$passant par le point A.

b) Construis un cercle $(\mathcal{C}')$ de centre O et de rayon r= 5cm.

Détermine le point le plus proche de $(\mathcal{C}')$et le point le plus éloigné de $(\mathcal{C}')$.

4) O_1 et O_2 sont deux points du plan tels que O_1O_2 = 6cm.

a) Représente l'ensemble des points M du plan tels que $O_1M \leq 4$ et $O_2M \leq 3$.
b) Représente l'ensemble des points N du plan tels que $O_1N \leq 4$ et $O_2N \geq 4$.
c) Marque un point P tel que $O_1P \geq 4$ et $O_2P \geq 3$.

5) A et B sont deux points du plan tels que AB = 4cm. $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$sont deux cercles de centres A et B et de rayons *r* et *r'* respectivement. Comment choisir *r* et *r'* pour que :

a) (C) et (C') n'aient aucun point commun.

b) (C) et (C’) aient un seul point commun.
c) (C) et (C’) aient deux points communs.

6) ABCD est un carré de centre O et E est le milieu de [BC].

a) Trace le cercle (C) de centre O et passant par le point E.
b) Quelle est la position relative de chacune des droites (AB), (BC), (CD) et (DA) par rapport au cercle (C) ?

7) $(\mathcal{C})$ est un cercle de centre O. [AB] et [CD] sont deux diamètres de $(\mathcal{C})$ à supports perpendiculaires. Construis les tangentes à $(\mathcal{C})$ en chacun des points A, B, C et D. Quelle est la nature du quadrilatère ABCD ?

8) a) Construis un triangle ABC isocèle en A tel qu’en centimètre :
AB = 6 et BC = 4.
b) Construis le cercle $(\mathcal{C})$ de centre A et tangent à la droite (BC).
c) Par B, construis la deuxième tangente à ce cercle $(\mathcal{C})$.

9) $(\mathcal{C})$ est un cercle de diamètre [AB].
C est un point de $(\mathcal{C})$ distinct des points A et B. Les tangentes au cercle $(\mathcal{C})$ en A et C se coupent en un point D ; les tangentes au cercle $(\mathcal{C})$ en B et en C se coupent en un point E.

a) Quelles conséquences peut-on tirer des hypothèses et de la figure pour les longueurs DC et DA ? Pour les longueurs EC et EB ?
b) Démontre que DE = AD + BE.

10) L’unité de longueur est le cm.
On donne deux points O et O’ tels que OO’>5. Trace :

- le cercle $(\mathcal{C})$ de centre O et de rayon 3 ;
- le cercle $(\mathcal{C}')$ de centre O’ et de rayon 2.

Quelle est la position relative des cercles $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$?

11) L’unité de longueur est le mm.
On donne les points A et B tels que AB = 80.

a) Place un point M tel que AM = 55 et BM = 45 puis construis le cercle $(\mathcal{C})$ passant par M et tangent à (AB) au point B ;
b) Construis l’autre tangente à $(\mathcal{C})$ qui passe par A et soit D le point de contact ;
c) Construis la tangente à $(\mathcal{C})$ au point M. Elle coupe (AB) en E et (AD) en F.
Calcule le périmètre du triangle AEF.

Chapitre 12 : Angles au centre d’un cercle

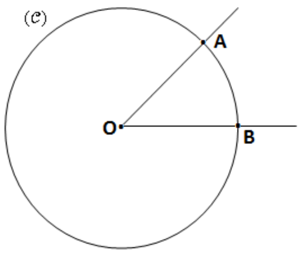
Objectifs

- Reconnaître un angle au centre dans un cercle ;
- construire un angle au centre de mesure donnée ;
- reconnaître un arc de cercle intercepté par un angle au centre ;
- identifier une corde sous-tendant un arc et un arc sous-tendu par une corde ;
- calculer la longueur d’un arc ;
- utiliser les propriétés de proportionnalité entre la longueur d’un arc de cercle et la mesure de l’angle au centre qui l’intercepte pour démontrer :
  - une égalité d’angle au centre,
  - une égalité de longueur d’arc,
  - une égalité de longueur de corde.

1 Angle au centre et arc de cercle

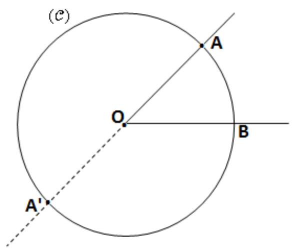
1.1 Définition d’un angle au centre

On appelle angle au centre d’un cercle, un angle qui a pour sommet le centre de ce cercle.



$\widehat{AOB}$ *est un angle au centre du cercle* $(\mathcal{C})$.

1.2 Définition de l’arc intercepté par un angle au centre



$\widehat{AOB}$ *est un angle au centre du cercle* $(\mathcal{C})$.

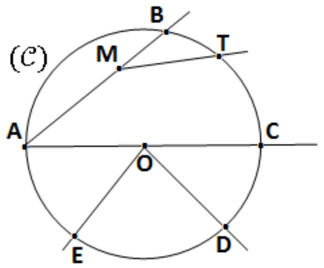
La partie en rouge est appelée l’arc de cercle intercepté par l’angle au centre $\widehat{AOB}$. *On le note:* AB .

La partie du cercle contenant A’ et d’extrémités A et B est appelée l’arc de cercle d’extrémités A et B contenant A’. On le note:$\breve{AB}$.

On dit que l’angle $\widehat{AOB}$ *intercepte l’arc* AB *alors que l’arc* $\breve{AB}$ *n’est pas intercepté par le même angle* $\widehat{AOB}$.

Exercice

On considère la figure suivante :



a) identifie tous les angles au centre du cercle $(\mathcal{C})$ et note chacun de ces angles.

b) Pour chaque angle au centre identifié, précise l'arc intercepté par cet angle.

c) Réponds par oui ou par non :

- $\widehat{BMT}$ est-il un angle au centre ?
- $\widehat{AOC}$ est-il un angle au centre ?
- $\widehat{BAT}$ est-il un angle au centre ?
- L'arc $\widehat{BT}$ est-il intercepté par un angle au centre ?

2 Calcul de la longueur d'un arc de cercle

Activité 2

L'unité de longueur étant le cm, soit $(\mathcal{C})$ un cercle de centre O et de rayon r = 3cm.

On sait que le périmètre d'un cercle de centre O et de rayon r est $p_{(\mathcal{C})} = 2\pi r$.

a) Quelle est la longueur d'un arc de cercle intercepté par un angle au centre de mesure 180° ? Explique comment tu procèdes pour obtenir la réponse.

b) Complète le tableau suivant en utilisant les éléments de symétrie d'un cercle pour justifier tes réponses.

Mesure en degré de l'angle au centre	180	90	45	135	60
Longueur en cm de l'arc intercepté					

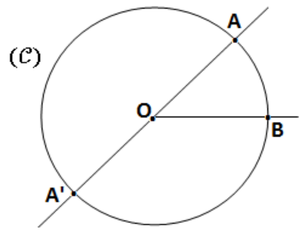
c) Montre que ce tableau est un tableau de proportionnalité.

Propriété

La longueur d'un arc de cercle est proportionnelle à la mesure de l'angle au centre qui l'intercepte.

Règle

$(\mathcal{C})$ est un cercle de centre O et rayon r :



On a : $\boxed{\text{Longueur de } \overset{\frown}{AB} = 2\pi r - \text{longueur de}}$ AB

Exemple

Un angle au centre d'un cercle de rayon r = 2cm a pour mesure 90°. Calculons la longueur de l'arc AB intercepté par cet angle.

On sait qu'un angle de 90° équivaut à $\frac{\pi}{2} rd$.

En appliquant la propriété ci-dessus, la longueur de l'arc intercepté par cet angle est égale à :

$\frac{\pi}{2} \times$ 2cm = πcm = 3,14cm.

On a donc : $\ell_{(AB)}$ = 3,14cm.

Exercices

1) Soit $(\mathcal{C})$ un cercle de centre O et de rayon r = 3cm.

a) Construis un angle $\widehat{AOB}$ au centre de $(\mathcal{C})$ tel que

$mes\widehat{AOB}$ = 135°.

b) Détermine la longueur de l'arc AB intercepté par cet angle et déduis en la longueur de l'arc $\overset{\smile}{AB}$.

2) Soit $(\mathcal{C})$ un cercle de centre O et de rayon r = 4cm.

a) Calcule la longueur d'un arc de cercle AB intercepté par un angle au centre de 45°.

b) Détermine la longueur de l'arc $\overset{\smile}{AB}$

3 Egalité de mesures d'angles au centre ou de longueur d'arcs

Activité 3 : On considère les deux figures suivantes :

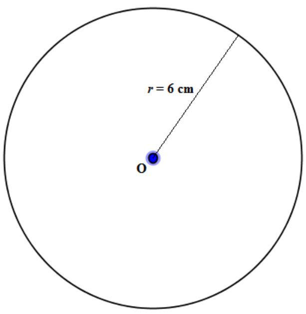


Fig.1

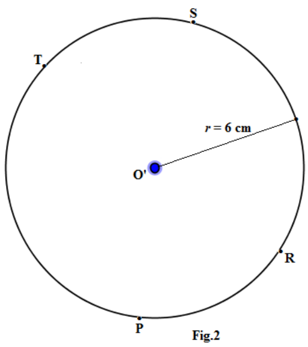


Fig.2

a) Sur la figure 1, construis deux angles au centre $\widehat{AOB}$ et $\widehat{MON}$ de même mesure 30°.

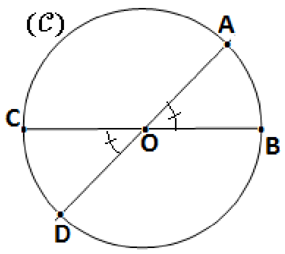
Calcule la longueur des arcs interceptés respectivement par les angles au centre $\widehat{AOB}$ et $\widehat{MON}$. Que constates-tu ?

b) Sur la figure 2, les arcs TS et PR ont la même longueur 2Πcm soit 6,28 cm.

Quelle est la mesure de l'angle au centre qui intercepte chacun de ces deux arcs ? Que constates-tu ?

Propriétés

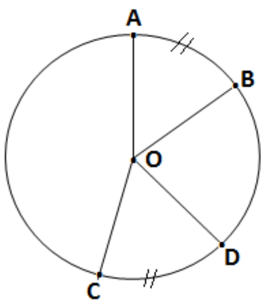
1- Dans un cercle, si deux angles au centre ont la même mesure ; alors ils interceptent deux arcs de même longueur.



si $mes\widehat{AOB} = mes\widehat{COD}$

alors longueur de AB *= longueur de* CD

2- Dans un cercle, si deux arcs ont la même longueur, alors ils sont interceptés par deux angles au centre de même mesure.



si longueur $\widehat{AB}$ *= longueur* CD

Alors $mes\widehat{AOB} = mes\widehat{COD}$

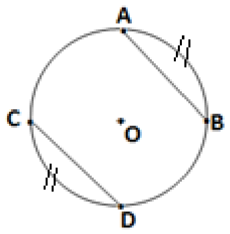
Exercice :
ABC est un triangle équilatéral inscrit dans un cercle $(\mathcal{C})$ de centre O et de rayon 5cm.

Quelle est la longueur de chacun des arcs AB , BC et CA ?

4 Cordes et arcs de cercle

Propriétés :

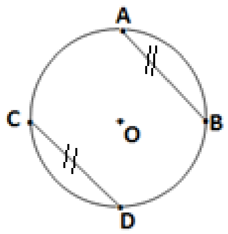
1- Dans un cercle si deux arcs ont la même longueur alors les deux cordes qui les sous-tendent ont la même longueur.



si longueur AB = longueur CD

Alors $AB = CD$

2- Dans un cercle, si deux cordes ont la même longueur, alors elles sous-tendent deux arcs de même longueur



si $AB = CD$

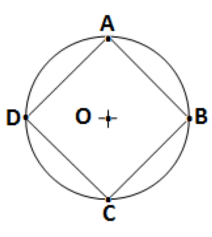
Alors longueur AB = longueur CD

Exercice
$(\mathcal{C})$ est un cercle de centre O et de rayon 1cm.

ABCD est un carré inscrit dans ce cercle. Justifie que les arcs AB, BC , CD et DA ont la même longueur. Calcule cette longueur.

Exercices

1) Afin de délimiter un rond-point au carrefour de plusieurs routes, un géomètre doit tracer un cercle de rayon 20m. Calcule la longueur de l'arc intercepté par chacun des angles au centre de ce cercle ayant pour mesure : 22,5° ; 45° ;67,50° ; 90° et 135° ($\pi = 3{,}14$)
2) $(\mathcal{C})$ est le cercle de centre O et de rayon 3cm. $\frac{3\pi}{10}$ est la longueur de l'arc de cercle intercepté par un angle au centre. Quelle est la mesure de l'angle au centre ?
Calcule la mesure de chacun des angles qui interceptent les arcs de longueur $\frac{9\pi}{10}$; $\frac{3\pi}{2}$; $\frac{21\pi}{10}$.
3) $(\mathcal{C})$est un cercle de centre O et de rayon R=3cm.
Recopie et complète le tableau suivant :



Longueur de l'arc intercepté (cm)	6π	$\frac{3\pi}{10}$	$\frac{9\pi}{10}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{21\pi}{10}$
Mesure de l'angle au centre (°)					

4) A, B et P sont trois points d'un cercle $(\mathcal{C})$ tels que les arcs AB ; PB et PA ont la même longueur. Quelle est la nature du triangle ABP ?

5) $(\mathcal{C})$ est le cercle de centre O. A, B et H sont trois points du cercle $(\mathcal{C})$ tels que les arcs AB et BH ont la même longueur. Quelle est la nature du triangle ABH ?

6) $(\mathcal{C})$ est un cercle de centre O et de diamètre [AB].
d et d' sont des tangentes à $(\mathcal{C})$ en A et B.
E est un point de $(\mathcal{C})$ distinct de A et B.
La tangente à $(\mathcal{C})$ en E coupe d en C et d' en D.
   a) Sur la figure, indique les angles droits ;
   b) Pourquoi a-t-on CA = CE ? En déduire que (OC) est bissectrice de $\widehat{AOE}$;
   c) De la même façon, que peut-on dire de (OD) ?
   d) En déduire que $\widehat{COD} = 90°$.

7) $(\mathcal{C})$ est un cercle de centre M tangent à deux demi-droites [Ox) et [Oy) en T et T'.
Pourquoi M est-il sur la bissectrice de $\widehat{xOy}$?

8) On donne un cercle $(\mathcal{C})$ de centre O et un point A extérieur à ce cercle.
Construis les deux droites passant par A et tangentes à ce cercle.
Démontre que les points de contact T et T' sont symétriques par rapport à la droite (AO).

Chapitre 13: Polygones réguliers

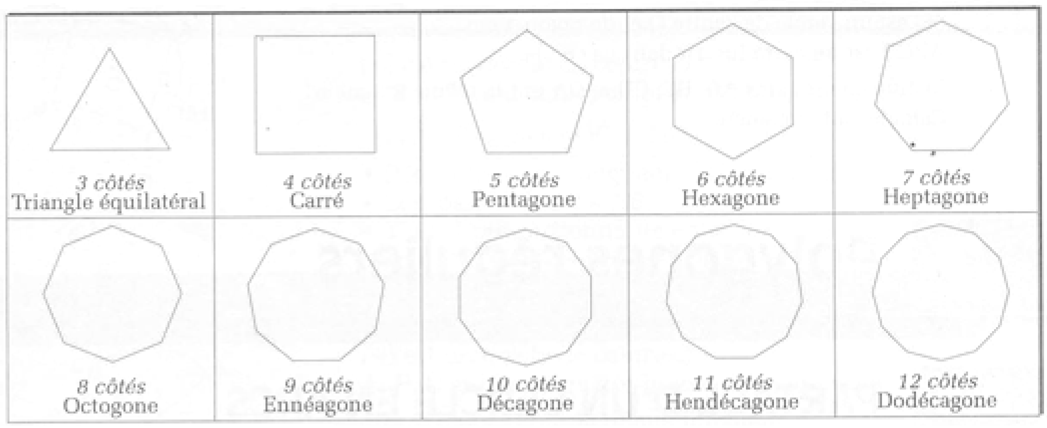
Objectifs

- Reconnaître un polygone régulier ;
- construire un polygone régulier en utilisant un angle au centre.

1 Polygones réguliers

Définition :
On appelle polygone régulier tout polygone inscrit dans un cercle et ayant ses côtés de même longueur.

EXEMPLES DE POLYGONES REGULIERS



2 Construction d'un polygone régulier

Méthode de construction d'un polygone régulier ayant n côtés
Pour construire un polygone régulier ayant n côtés inscrit dans un cercle :
1) on construit un cercle de centre O ;
2) on partage ce cercle en n angles au centre adjacents de même mesure α. Pour cela, on détermine la mesure commune des angles au centre adjacents en effectuant le calcul.
$a = \frac{360°}{n}$.
3. On obtient le polygone régulier recherché en traçant les cordes sous- tendant les arcs interceptés par les angles au centre.

Exercice
Construis un ennéagone, polygone régulier à neuf côtés.

Exercices

1) A, B, E, F et G sont cinq points d'un cercle $(\mathcal{C})$tel que les arc$\widehat{AB}$;$\widehat{BE}$;$\widehat{EF}$; $\widehat{FG}$ et $\widehat{GA}$ ont la même longueur. Quelle est la nature du polygone ABEFG ?

2) Construis un hexagone régulier inscrit dans un cercle de rayon 3cm.

3) Construis un octogone régulier inscrit dans un cercle de rayon 3cm.

4) ABC est un triangle équilatéral inscrit dans un cercle (C) de centre O. Quelles sont les mesures des angles $\widehat{AOB}$; $\widehat{BOC}$ et $\widehat{COA}$?

5)
   a) Construis un carré ABCD de 5cm de côté.
   b) Détermine le rayon du cercle inscrit dans ce carré.
6) ABCDEF est un hexagone régulier inscrit dans un cercle (C) de centre O.
   a) Quels sont les axes de symétrie de cet hexagone ?
   b) Admet-il un centre de symétrie ?
7) ABCDEF est un hexagone régulier inscrit dans un cercle (C) de centre O.
   a) Montre que AB = OA.
   b) Calcule la mesure de l'angle $\widehat{ABC}$.

Chapitre 14 : Approximation d'un nombre rationnel

Objectifs

- Trouver la troncature d'un nombre rationnel positif ;
- déterminer deux nombres décimaux consécutifs d'ordre $n(n \in \mathbb{N})$;
- encadrer un nombre rationnel positif par deux nombres décimaux consécutifs ou non d'ordre n ;
- trouver une approximation décimale d'un nombre rationnel positif (par défaut ou par excès) ;
- trouver l'arrondi d'ordre n d'un nombre rationnel.

1 Troncature d'un nombre rationnel positif

Définition

On appelle troncature à n décimale(s) d'un nombre rationnel a, le nombre décimal d'ordre n obtenu en ne conservant que n premier(s) chiffre(s) après la virgule de l'écriture décimale de a.

Exemple

La troncature à 3 décimales de $\frac{6}{7}$ est 0,857.

Exercice

Après avoir effectué les divisions suivantes, donne la troncature à une décimale ; à deux décimales ; à trois décimales de chacun des nombres rationnels suivants : $\frac{2}{3}$; $\frac{4}{9}$; $\frac{11}{13}$; $\frac{22}{7}$.

2 Nombres décimaux consécutifs d'ordre $n(n \in \mathbb{N})$

Règle

Si a et b sont deux nombres décimaux consécutifs d'ordre n tels que a<b alors $b - a = 10^{-n}$.

Exemples

2,2 et 2,3 sont deux nombres décimaux consécutifs d'ordre 1 car 2,3 – 2,2 = 0,1 = 10^{-1}.

3,14 et 3,15 sont deux nombres décimaux consécutifs d'ordre 2 car 3,15 – 3,14 = 0,01 = 10^{-2}.

3 Encadrement d'un nombre rationnel par deux décimaux consécutifs d'ordre n

Règle

Pour encadrer un nombre rationnel par deux décimaux consécutifs d'ordre n, on trouve la troncature d'ordre n de ce nombre rationnel puis on détermine les deux décimaux consécutifs d'ordre n qui l'encadrent.

Exemple

On donne le nombre rationnel $\frac{8}{3}$.

Encadrons ce nombre rationnel par deux décimaux consécutifs d'ordre 3.

La division de 8 par 3 donne comme résultat 2,6666666….

La troncature d'ordre 3 de $\frac{8}{3}$ est : 2,666.

Ainsi, 2,666 < $\frac{8}{3}$ < 2,667.

4 Approximations décimales d'ordre n d'un nombre rationnel

Méthode

Pour trouver les approximations décimales d'ordre n d'un nombre rationnel $\frac{a}{b}$ (a et b deux entiers relatifs positifs, b non nul), on calcule le quotient q de la division de a par b avec n chiffre(s) après la virgule.

- *q est l'approximation décimale d'ordre n par défaut de* $\frac{a}{b}$.
- *Le nombre décimal d'ordre n qui suit q est l'approximation décimale d'ordre n par excès de* $\frac{a}{b}$.

Exemple

Trouvons les approximations décimales d'ordre 3 du nombre rationnel $\frac{35}{11}$.

On sait que $\frac{35}{11}$ = 3,18 18 18 18…

Ainsi, 3,181 est une approximation par défaut d'ordre 3 de $\frac{35}{11}$ tandis que 3,182 est une approximation par excès d'ordre 3 de $\frac{35}{11}$.

5 Arrondi d'ordre *n* d'un nombre rationnel positif

Méthode

Pour trouver l'arrondi d'ordre n d'une fraction $\frac{a}{b}$,

On calcule le quotient q de la division de a par b avec n+1 chiffres après la virgule.

- *Si le (n+1)ième chiffre après la virgule est 1 ; 2 ; 3 ou 4, l'arrondi d'ordre n de* $\frac{a}{b}$ *est l'approximation décimale d'ordre n par défaut.*
- *Si le (n+1)ième chiffre après la virgule est 5 ; 6 ; 7 ; 8 ou 9, l'arrondi d'ordre n de* $\frac{a}{b}$ *est l'approximation décimale par excès.*

Exemples

La troncature d'ordre 2 de $\frac{22}{9}$ est 2,44 donc l'arrondi d'ordre 1 de $\frac{26}{9}$ est 2,4.

La troncature d'ordre 2 de $\frac{11}{4}$ est 2,75 donc l'arrondi d'ordre 1 de $\frac{11}{4}$ est 2,8.

Exercice :

Trouve l'arrondi d'ordre 1 de chacun des nombres rationnels suivants :

$\frac{13}{3}$; $\frac{17}{4}$; $\frac{5}{8}$.

Exercices

1) Donne :

a) La troncature à une décimale de $\frac{2}{3}$; $\frac{4}{9}$.

b) La troncature à deux décimales de $\frac{4}{9}$; $\frac{11}{3}$.

c) La troncature à trois décimales de π ; $\frac{22}{7}$.

2) Trouve deux décimaux consécutifs d'ordre deux puis deux autres décimaux consécutifs d'ordre trois.

3) Encadre chacun des nombres suivants par deux décimaux consécutifs d'ordre 2 :
$\frac{2}{3}$; $\frac{4}{9}$; $\frac{11}{3}$; $\frac{22}{7}$.

4)

a) Donne l'approximation décimale par défaut d'ordre deux de chacun des nombres suivants : $\frac{2}{3}$; $\frac{4}{9}$; $\frac{11}{3}$; $\frac{22}{7}$.

b) Donne l'approximation décimale par excès d'ordre trois de chacun des nombres rationnels suivants : $\frac{2}{3}$; $\frac{4}{9}$; $\frac{11}{3}$; $\frac{22}{7}$.

5) Donne l'arrondi d'ordre trois des chacun des nombres rationnels suivants : $\frac{2}{3}$; $\frac{4}{9}$; $\frac{11}{3}$; $\frac{22}{7}$.

6) Ecris deux entiers relatifs qui encadrent les nombres rationnels suivants :
$\frac{41}{55}$ $\frac{165}{97}$ $\frac{-741}{234}$ $\frac{56}{85}$

7) Calcule les approximations décimales d'ordre 2 par défaut et les approximations décimales d'ordre 2 par excès des nombres suivants :

$\frac{8}{15}$ $\frac{55}{72}$ $\frac{345}{1000}$ $\frac{5674}{10000}$

8) Trouve une valeur décimale approchée à 0,001 près des quotients suivants :
$\frac{3}{7}$; $4 : \frac{3}{5}$; $\frac{2}{3} : 6$

9) Le nombre π est égal à 3,141 592 653 589 793 238 …
a) Trouve un encadrement de π par deux nombres décimaux consécutifs d'ordre trois.
b) Donne l'approximation décimale d'ordre deux par défaut de π.
c) Donne l'approximation décimale d'ordre cinq par excès de π.
d) Donne les arrondis d'ordre trois, quatre, cinq et six de π.

10) On donne un nombre rationnel a. Compare a et a+1 puis $\frac{1}{a}$ et $\frac{1}{a+1}$.

11) On considère les nombres suivants :
$\frac{4}{3}$; $\frac{22}{7}$; $\frac{11}{13}$.
a) Donne la troncature à trois décimales des trois nombres donnés ci-dessus ;
b) Donne un encadrement de chacun des ces trois nombres par deux décimaux consécutifs d'ordre 2 ;
c) Donne l'approximation décimale d'ordre 2 par défaut et l'approximation décimale d'ordre 2 par excès de chacun de ces trois nombres ;
d) Donne l'arrondi d'ordre 2 de chacun des nombres donnés ci-haut.

12) La valeur tronquée au dix-millième d'un nombre A est 0,3352.
a) Quel encadrement de A peut-on en déduire ?
b) Détermine l'approximation décimale par défaut et par excès d'ordre 1 de A ;
c) Quel est l'arrondi d'ordre 1 de A ?

13) Treize personnes décident de partager équitablement 59 mètres de tissus. En désignant par ℓ (en mètres) la longueur de tissu reçu par chacun.
a) Donne un encadrement de ℓ par deux nombres décimaux d'ordre 2. En déduire l'approximation décimale par défaut et par excès d'ordre 2 de ℓ ;
b) Donne l'arrondi d'ordre 2 de ℓ.

Chapitre 15: Puissance à exposant entier d'un nombre rationnel et propriétés

Objectifs

- Définir la puissance d'un nombre rationnel ;
- utiliser les propriétés des puissances à exposant entier naturel non nul des nombres rationnels dans les calculs.

1 Puissance à exposant entier d'un nombre rationnel

Définition

a et b sont deux nombres entiers, b non nul et n un entier naturel non nul.

$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \times \ldots \times \frac{a}{b}$ *(n facteurs égaux à* $\frac{a}{b}$ *).*

2 Propriétés des puissances à exposant entier d'un nombre rationnel

a, b, c, d sont quatre nombres entiers, a , b et d non nuls ; m et n deux entiers naturels non nuls :

- $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$
- $\left(\frac{a}{b}\right)^n \times \left(\frac{a}{b}\right)^m = \left(\frac{a}{b}\right)^{n+m}$
- $\left(\frac{a}{b} \times \frac{c}{d}\right)^n = \left(\frac{a \times c}{b \times d}\right)^n = \frac{a^n \times c^n}{b^n \times d^n}$
- $\left(\left(\frac{a}{b}\right)^n\right)^m = \left(\frac{a}{b}\right)^{n \times m}$
- $a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n = \frac{1}{a^n}$
- $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$
- $\left(\frac{a}{b}\right)^0 = 1$
- $\left(\frac{a}{b}\right)^1 = \frac{a}{b}$

Exercice

Calcule :

A = $\left(\frac{5}{7}\right)^4$; B = $\left(-\frac{6}{5}\right)^3$; C = $\left(\frac{2}{3} \times \frac{5}{7}\right)^3$; D = $\left(\left(-\frac{1}{5}\right) \times \frac{3}{2}\right)^3$; E = $\left(\frac{3}{4}\right)^2 \times \left(\frac{3}{4}\right)^7$;

F = $\left(\left(\frac{7}{8}\right)^2\right)^3$.

G = $\left(\frac{5}{8}\right)^{-3}$

Exercices

1) Calcule :

$\left(\frac{-2}{7}\right)^4$; $\left(\frac{4}{5}\right)^2$; $\left(\frac{-5}{9}\right)^3$; $\left(\frac{3}{4}\right)^5$.

2) Ecris sous forme de puissance à exposant entier les nombres rationnels suivants :
$\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}$; $\frac{5}{4}\times\frac{5}{4}\times\frac{5}{4}\times\frac{5}{4}\times\frac{5}{4}$; $\frac{-3}{7}\times\frac{-3}{7}\times\frac{-3}{7}$.

3) Ecris sous la forme d'une seule puissance d'un nombre rationnel:

$\left(\frac{5}{7}\right)^2\times\left(\frac{5}{7}\right)^6$; $\left(\frac{-3}{4}\right)^3\times\left(\frac{-3}{4}\right)^2$; $\left(\frac{7}{3}\right)^5\times\left(\frac{7}{3}\right)^8$; $\left(\left(\frac{2}{3}\right)^3\right)^2$; $\left(\left(\frac{5}{6}\right)^4\right)^3$; $\left(\left(\frac{-3}{2}\right)^5\right)^2$
$\left(\left(\frac{7}{9}\right)^3\right)^4$.

4) Dans chacun des cas suivants, trouve l'entier n pour que :

$a)$ $\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{1}{32}$.
$b)$ $\frac{343}{125}=\left(\frac{7}{5}\right)^n$.

5) Calcule :

$a)$ $\left(\frac{-3}{5}\right)^3$.
$b)$ $\left(-\frac{7}{4}\right)^2\times\left(-\frac{2}{3}\right)^4$.
$c)$ $\left(\frac{5}{6}-\frac{3}{4}\right)^2$.
$d)$ $\left(\frac{3}{7}\right)^5\times\left(-\frac{14}{9}\right)^3$.

6) Ecris sous forme d'une puissance à exposant entier les nombres rationnels suivants :
$\frac{8}{27}$; $\frac{27}{64}$; $\frac{16}{81}$; $\frac{81}{256}$.

7) Effectue les calculs suivants :
$\left(-\frac{3}{5}\right)^3$; $\left(-\frac{7}{4}\right)^2\times\left(-\frac{7}{4}\right)^3$; $\left(\frac{2}{5}\right)^3\times\left(-\frac{2}{5}\right)^2$; $\left(-\frac{5}{3}\right)^2\times\left(-\frac{5}{3}\right)^3\times\left(-\frac{2}{5}\right)^2$.

8) Soit $A=\frac{25^2}{10^4}$.
En décomposant 25 et 10 en produits de facteurs premiers, simplifie A.

9) Ecris à l'aide de la puissance d'un seul nombre :

a) $\frac{5^6}{5^9}$; b) $\frac{7^{-2}\times(-7)^5}{7^3\times 7^{-4}}$; c) $\frac{2^4\times(-2)^9}{(-2)^{11}}$.

10) Ecris l'inverse de chacun des nombres rationnels suivants à l'aide d'une puissance :
a) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$; b) $\left(-\frac{2}{7}\right)^5$; c) $\left[\left(\frac{3}{5}\right)^2\right]^3$; d) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}$.

11) Effectue les calculs suivants :
$A=\left(\frac{7}{3}\right)^5\times\left(-\frac{14}{9}\right)^3$; $B=\left(-\frac{7}{4}\right)^2\times\left(-\frac{-2}{3}\right)^4$; $C=\left(-\frac{2}{3}\right)^3\times\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}\times\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}\right]^4$.

12) Recopie et complète les exposants des nombres rationnels suivants :

$\left(\frac{3}{5}\right)^2 \times \left(\frac{3}{5}\right)^4 = \left(\frac{3}{5}\right)^{\cdots} \cdots\cdots;$ $\left(\frac{1}{3}\right)^3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^4 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^{\cdots} \cdots\cdots$; $\left[\left(\frac{2}{3}\right)^3\right]^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^{\cdots} \cdots\cdots$

13) Ecris les nombres suivants d'une autre manière sans utiliser les parenthèses :

$\left(\frac{3}{7}\right)^3$; $\left(\frac{-2}{5}\right)^4$; $\left(\frac{3}{-7}\right)^5$.

14) Calcule de deux manières différentes chacun des nombres suivants :

$\left(\frac{3}{4}\times\frac{2}{5}\right)^2$; $\left(\frac{5}{2}\times\frac{3}{10}\right)^3$; $\left(\frac{3}{-2}\times\frac{4}{5}\right)^3$.

Chapitre 16 : Expressions littérales

Objectifs

- Exprimer une formule par une phrase et/ou réaliser le programme de calcul donné par une formule ;
- calculer la valeur numérique d'une expression littérale en remplaçant les lettres par des nombres ;
- calculer de manière performante une somme algébrique en regroupant ou en déplaçant les termes de la somme ;
- supprimer ou placer des parenthèses dans une somme ;
- réduire une somme algébrique.

1 Expressions littérales

Vocabulaire

Les différentes formules obtenues : $\mathcal{A}_{(\mathcal{C})} = \pi r^2$ *; A =* $x^2 + 5$ *; P = L + l + L + l* *ou P = (L+ l)* x *2 sont appelées des* *expressions littérales* *car elles renferment des lettres et des nombres.*

Les lettres contenues dans ces expressions sont appelées des *inconnues* *ou des* *variables.*

On peut déterminer la valeur numérique d'une expression littérale. Pour cela, on remplace les lettres (variables ou inconnues) par des nombres donnés.

Exemples

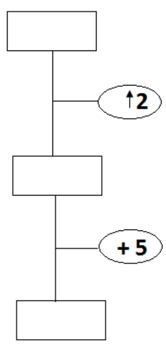
1. Si nous considérons le cercle de l'activité 1, pour x = 3cm, on obtient alors $\mathcal{A}_{(\mathcal{C})} = \pi \times 3^2 cm^2$ donc $\mathcal{A}_{(\mathcal{C})}$ = 3,14 x 9cm^2= 28,26 cm^2.
2. Si nous considérons le programme de calcul de l'activité 2, calculons A pour x = -3 ; x = 0 et x = 4.
   Pour x = -3, A = $(-3)^2 + 5 = 9 + 5 = 14$
   Pour x = 0, A =$(0)^2 + 5 = 0 + 5 = 5$
   Pour x = 4, A =$(4)^2 + 5 = 16 + 5 = 21$

2 Schéma de calcul

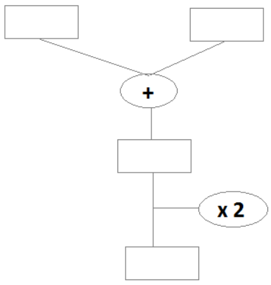
On peut présenter un programme de calcul ou une formule selon une disposition schématique présentant la progression des opérations représentant le programme de calcul ou la formule donnée. Cette disposition est appelée un schéma de calcul.

Exemples

1) Considérons le programme de calcul présenté à l'activité 2. On a : A = x^2 + 5 .
   Représentons ce programme par un schéma de calcul



2) Considérons la formule du périmètre d'un rectangle. Le schéma de calcul représentant ce programme est le suivant : P = (L+ l) x 2



Exercice

La largeur d'un rectangle est x, sa longueur est le double de sa largeur.

a) Exprime son périmètre P (x) et son aire A (x) en fonction de x.
b) Présente le schéma de calcul de P (x) et de A (x).
c) Si x = 10m (mesure de la largeur) , détermine la valeur numérique du périmètre et de l'aire de ce rectangle.

3 Organisation du calcul d'une somme d'expressions littérales

Exemple

Considérons les expressions littérales suivantes :

A = 3L + x – 2l + 4 ; B = 2x – L + 3l + 1 ; C = -5 + L – 4l + x.

Calculons A + B + C = (3L + x – 2l + 4) + (2x – L + 3l + 1)+ (-5 + L – 4l + x.).

On supprime les parenthèses et on a :

A + B + C = 3L + x – 2l + 4 + 2x – L + 3l + 1 + (-5) + L – 4l + x.

On regroupe les termes semblables (termes en L; termes en l ; termes en x puis les constantes).

$$A + B + C = \underbrace{3L - L + L}_{\text{termes en L}} + \underbrace{x + 2x + x}_{\text{termes en } x} - \underbrace{2l + 3l - 4l}_{\text{termes en } l} + \underbrace{4 + 1 - 5}_{\text{constantes}}$$

On simplifie l'écriture de chaque regroupement par un calcul des coefficients par termes :

Termes en L : 3 – 1 + 1 = 3 ; termes en x : 1 + 2 + 1 = 4 ;

Termes en l : -2 + 3 -4 = -3 et les constantes : 4 + 1 -5 = 0

On obtient donc : A + B + C= 3L + 4x – 3 l + 0. Donc A + B + C = 3L + 4x – 3 l

La procédure utilisée pour parvenir à ce résultat est la réduction de l'expression littérale A + B + C.

Règle

- *Pour calculer une somme d'expressions littérales, on peut déplacer ou regrouper certains termes de cette somme.*
- *Réduire une somme d'expressions littérales, c'est la transformer en une somme ayant moins de termes.*

Propriétés

a, b et c sont des nombres relatifs, on a :

$a + (b - c) = a + b - c$

$a - (b + c) = a - b - c$

$a - (b - c) = a - b + c$

Exercices :

1) Réduis les expressions littérales suivantes : $A = 2 + x - (5 - x)$; $B = 3,9 + (-8 + x)$
2) Réduis les sommes algébriques suivantes : $A = a - 4 + 2a - y - 6 + 2y - 4a$
   $B = 9 + x - (4 + x) + (-3 - 2x) - (5x + 2)$.

Exercices

1) Traduis chacune des phrases suivantes par une expression littérale :
   a) Ajoute 3 au produit de 4 par a ;
   b) multiplie la somme de -2 et de 1 par a ;
   c) la somme du double de a et du produit de a par b ;
   d) la somme de trois nombres entiers naturels consécutifs ;

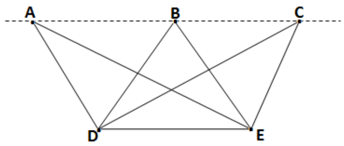
2) On donne $S = a + b + ab$.

   Calcule S pour :

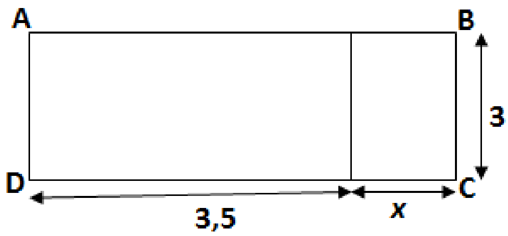
   a) $a = (-2)$ et $b = (-5)$.
   b) $a = (-3,5)$ et $b = (6,4)$.
   c) $a = \frac{1}{3}$ et $b = \frac{-5}{6}$.
3) Réduis les expressions littérales suivantes :
   $A = (7x - 5) - (5x + 3) - (50 - 3x)$.
   $B = \frac{(2X-1)}{3} + \frac{(X-1)}{4} - \frac{(X-2)}{12}$.
   $C = \frac{(2X-3)}{8} - \frac{(X+3)}{6} - \frac{(X-3)}{12}$.
   $D = 4(x - 3) - \frac{3(X+4)}{5} - \frac{2X+1}{10}$.
4) Développe et réduis les expressions littérales suivantes :
   $A = 1,5(x + 2) + 3(0,8x - 2)$.
   $B = 5(x + 2) - 2x - 2(x + 4)$.
   $C = 2(x - 1) - 3(x - 5)$.
   $D = -3(x + 4) + 5(x - 7)$.
5) La formule de l'aire d'un trapèze de grande base *B,* de petite base *b* et de hauteur *h* s'écrit : $\mathcal{A} = \frac{(\mathcal{B}+b)\times h}{2}$.
   Réalise un schéma de calcul permettant de calculer cette aire.

6) Réduis les sommes suivantes :
   $A = 12 - (a - b) + (8 - b)$;
   $B = -(b - 2a) + (6 - a) + (9 + b) - (12 - a)$.

7) Voici trois triangles ADE, BDE et CDE.
Montre que ces trois triangles ont la même aire.



8) L'unité de longueur est le cm.



Exprime en fonction de x :
-le périmètre P du rectangle ABCD
-l'aire $\mathcal{A}$ de ce même rectangle.

Chapitre 17 : Produits remarquables

Objectifs

- Déterminer le signe d'un produit ;
- Calculer un produit en déplaçant ou en regroupant les facteurs d'un produit ;
- Développer un produit ;
- Établir les identités remarquables.
- Factoriser une somme.

1 Organisation du calcul d'un produit

Activité1

a) On donne le produit suivant :

$25 \times \frac{1}{4} \times 2 \times 40 \times 0{,}5 \times (-10)$.

Quel est le signe de ce produit ? Effectue ce calcul de manière performante.

b) On considère les produits suivants :

$(-3)a \times b$; $2y \times 5b$; $-4t \times (-2)u$; $5f \times (-4)g$.

- Détermine le signe de chaque produit.
- Calcule les produits donnés.

Règle

Pour calculer un produit :

- *On détermine son signe ;*
- *On peut déplacer ou regrouper certains facteurs avant de calculer le produit de leur distance à zéro.*

<u>Exercice :</u>

Effectue les produits suivants :

$(-3a) \times (-2b)$; $(7a) \times (-5b)$; $(3a) \times (6b)$; $(-2a) \times (7b)$.

2 Développement des produits d'expressions littérales

2.1 Développement du produit $a(x+y)$

Propriété

a, x et y sont des nombres relatifs.

On a : $a(x+y) = ax + ay$; $a(x-y) = ax - ay$

Exemples

$3(a+4) = 3a + 12$ $9(b-5) = 9b - 45$

$2x(y-3) = 2xy - 6x$ $-4(y-5) = -4y + 20$

2.2 Développement du produit $(a+b)(x+y)$

Propriété

a, b, x et y sont des nombres relatifs.

On a : $(a+b)(x+y) = ax + ay + bx + by$.

Exemples

$(a + 4)(b + 3) = ab + 3a + 4b + 12$

$(a + 2)(b - 1) = ab - a + 2b - 2$

Exercices

1. Effectue les produits suivants :
   A = $-5x(a - 3)$; B = $3u(u + 5)$; C = $x + 2(x - 7) - (x + 8)$
2. Développe les produits suivants :
   A = $(2x + 3)(y + 7)$; B = $(a + 2)(b - 5)$; C = $(\frac{5}{3}x + \frac{6}{5})(\frac{5}{6}y + 3)$

3 Développements et réductions

3.1 Règles de priorité

En l'absence de parenthèses,

- *la multiplication est prioritaire sur l'addition et la soustraction ;*
- *le calcul des puissances est prioritaire sur la multiplication.*

Exercice

Calcule : $-3 + 4 \times (-3) + 6 - 3 \times 2$; $3x + 5y(2 - 3x) + 9xy - 2x$

3.2 Développer et réduire des expressions littérales

Exemple 1

Développe et réduis l'expression littérale suivante :

E = $3(x + y) - 2(x - y + 4) + 5y - 2$

On a donc :

E = $3(x + y) - 2(x - y) + 5y - 2.$

- On développe les produits :

E = $3x + 3y - 2x + 2y - 8 + 5y - 2.$

- On regroupe les termes semblables :

E = $3x - 2x + 3y + 2y + 5y - 8 - 2.$

- On simplifie l'écriture de chaque regroupement de termes :

Termes en x : $3 - 2 = 1$; termes en y : $3 + 2 + 5 = 10$; constantes : $-8 - 2 = -10.$

On obtient donc :E = $x + 10y - 10.$

Finalement on a :

$\boxed{E = x + 10y - 10}$

<u>Exemple 2 :</u> Développe et réduis

A =$(2x - 1)(3x + 5) + 9 - 4x^2.$

Le produit de facteurs : $(2x - 1)(3x + 5)$ nous donne :

$(2x - 1)(3x + 5) = 6x^2 + 10x - 3x - 5$

$= 6x^2 + 7x - 5.$

L'expression A nous donne donc :

A =$(2x - 1)(3x + 5) + 9 - 4x^2$

A $= 6x^2 + 7x - 5 + 9 - 4x^2$

On regroupe les termes semblables :

A $= 6x^2 - 4x^2 + 7x - 5 + 9$

On simplifie et on obtient :

$\boxed{A = 2x^2 + 7x + 4}$

Exercice

Développe chaque produit et réduis la somme obtenue :

a. $(a+1)(a+2)+(a-1)(a-2)$;

b. $(x-1)(x+1)-(x-2)(x+2)$;

c. $2c(1-5c)-3+(4c-2)c$;

d. $3(b^2+3b-5)-7(-3b^2+2b-1)$.

4 Produits remarquables

Propriétés

a et$b$ sont des nombres relatifs, on a :

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

Ces égalités sont appelées des identités remarquables (égalités remarquables ou produits remarquables).

Exercice :

Développe les produits remarquables suivants :

A = $(2x-5)^2$; B = $(x+4)^2$; C = $(-4+2x)^2$; D = $(2x-5)(2x+5)$; E = $(12-3x)^2$; F = $(5x+1)^2$.

5 Factorisations

5.1 Distinction d'une somme et d'un produit

x étant un nombre relatif,

. l'écriture $x+1+3x^2$ est une somme dont les termes sont x; 1 et $3x^2$;

. l'écriture $3(x+1)(x+2)$ est un produit dont les facteurs sont 3; $(x+1)$et $(x+2)$;

. l'écriture $(x+1)(x-2)+3x(x+1)$ est une somme dont les termes sont les produits $(x+1)(x-2)$ et $3x(x+1)$.

Exercice

a) Parmi les expressions suivantes, identifie les sommes ou les produits :

x^2-1 ; $(2x+1)(4-x)$; $3x(x^2-1)+5x^2$; $(4-x)(3x-1)$; $2x^2-4x+1$.

b) Pour chaque expression, selon qu'elle soit une somme ou un produit, précise ses termes ou ses facteurs.

5.2 Factorisation

Définition

Factoriser une somme est une transformation d'écriture qui consiste à écrire cette somme sous la forme d'un produit de facteurs.

Type 1 : Factorisation d'une somme par mise en évidence d'un facteur commun

On a vu que $a(x+y)=ax+ay$.

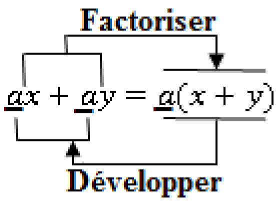
Cette égalité nous permet d'écrire : $ax+ay=a(x+y)$.

Cette transformation de la somme $ax+ay$ en un produit $a(x+y)$ est une factorisation. On dit qu'on a factorisé l'expression $ax+ay$.

Cette forme de factorisation est appelée une factorisation par mise en évidence d'un facteur commun.

Si on écrit : $ax + ay$*, on dit que* a *est le facteur commun aux deux termes de la somme. En mettant ce facteur commun en évidence, on a donc :*

Exemple



Factorise la somme suivante :$14x^2 - 21x$. On met en évidence le facteur commun. On a :
$14x^2 - 21x = (7x) \times (2x) - (7x) \times (3)$
$= 7x(2x - 3)$
On a donc : $\boxed{14x^2 - 21x = 7x(2x - 3)}$

Type 2 : Factorisation par utilisation des identités remarquables

On peut factoriser une somme en utilisant les produits remarquables :
$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$
$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$
$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

Exemples
1. Si on a la somme $x^2 - 9$, on peut l'écrire : $x^2 - 9 = x^2 - 3^2$.
Cette somme est de la forme $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ avec $a = x$ et $b = 3$.
En appliquant cette identité remarquable, on a : $\boxed{x^2 - 9 = x^2 - 3^2 = (x - 3)(x + 3)}$

2. Factoriser $x^2 + 10x + 25$.
On a : $x^2 + 10x + 25 = x^2 + 2 \times (x) \times 5 + 5^2$ de la forme $a^2 + 2ab + b^2$
Donc $\boxed{x^2 + 10x + 25 = (x + 5)^2}$

3. Factoriser $4x^2 - 12x + 9$.
On peut écrire : $4x^2 - 12x + 9 = (2x)^2 - 2 \times (2x) \times 3 + 3^2$ qui est de la forme
$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$
On a donc : $\boxed{4x^2 - 12x + 9 = (2x - 3)^2}$

Exercice
x étant un nombre relatif, factorise les sommes suivantes :
$49x^3 - 7x^2$; $9x^3 - 4x$; $16x^2 - 8x + 1$; $3(x - 1) + 2x(x - 1)$; $4x^2 + 24x + 36$;
$x^2 - \frac{9}{4}$; $9 - 6x + x^2$.

Exercices

1) Complète les égalités suivantes :
   (a + b)(c – d) = ……
   (a – b)(c + d) = ……

$(a - b)(c - d) = \ldots\ldots$

2) Simplifie les expressions suivantes où a, b, m sont des nombres relatifs :
A = $2\text{x}(a + b) - 5\text{x}(b - 4)$; B = $9\text{x}(4 - b + b) - 3\text{x}(5 - 3a + 3b)$;
C = $2 - (a - 2b)\text{x}\left(\frac{4}{5}\right)$; D = $(2m - 3) - 2\text{x}(-5 + \text{m})$.
3) Développe et réduis les expressions suivantes :
A = $(5a - 3)(3a + 2)$.
B = $(5b - 2)(- 3b - 2)$.
C = $(3x + 1)^2$.
D = $(5x - 7)^2$.
E = $(3x + 1)^2 - (3x - 1)^2$.

4) Développe et réduis les expressions suivantes :
A = $2{,}5 \text{ x } (a - b) - 5 \text{ x } (a + b)$; B = $a \text{ x } (b - a) + b \text{ x } (a + b)$;
C = $(x - 3) \text{ x } (y - 4) - (x + 3) \text{ x } (y-4)$; D = $(2x + 1)^2$; E = $(5 - 2x)^2$;
F= $(x + 2)(x - 2)$; G = $6x(7x^2 - 6x + 2)$; H = $x(2x + 1)^2 - 2x(x - 2)^2$.

5) Factorise les expressions suivantes :
A = $6a^2 - 6a$.
B = $7x^3 + 14x^2 + 21x$.
C = $x(3y - 4) + 4(3y - 4)$.
D = $(3x - 7)(4x + 2) - (6x - 14)(5x - 3)$.

6) Factorise les expressions suivantes:
A = $4b^2 - 16a^2$; B = $(x - 3)(2x - 1) + (x - 3)(3x + 1)$;
C = $3(a - 1) + (a + 2)(a - 1) + 3a(a - 1)$; D = $26 + 13a$.

7) Factorise les expressions suivantes:
A= $80 - 36x + 4x^2$; B = $121x^2 - 49$;
C = $9x^2 + 6x + 1$; D =$25x^2 + 20x + 4$;
E = $x^2y^2 - 8xy + 16$; F= $25 - 64x^2$

8) Factorise les expressions suivantes:
A = $4x^3 + 4x^2 + 2x + x + (2x + 1)(x + 1)$;
B = $3x(x - 1) + 2(x^2 - 2x + 1)$
C = $(x + 3)^2 - 9$; D = $(2x + 3)^2 - (x + 1)^2$.

Chapitre 18 : Représentation des objets dans l'espace (étude de la perspective cavalière)

Objectif

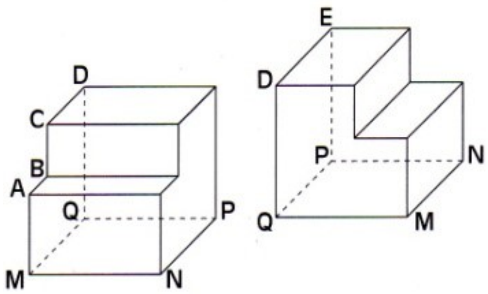
- Représenter en perspective (simple et cavalière) un cube, un prisme droit, une pyramide ayant pour base un triangle.

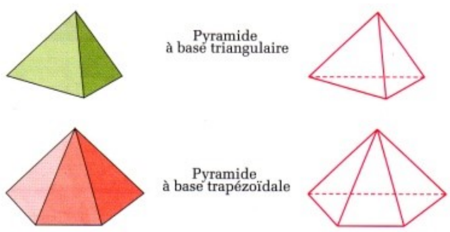
1 Représentation des objets de l'espace en perspective dans le plan

Remarque
Des objets de l'espace peuvent être représentés en perspective dans le plan.

Règles de la représentation en perspective simple
Pour représenter un objet de l'espace dans un plan, on utilise la représentation en perspective en suivant les trois règles suivantes :

- ✓ *Les arêtes à supports parallèles sont représentées par des segments de supports parallèles sur le dessin ;*
- ✓ *Toute face de l'objet située dans un plan vertical de face est dessinée sans déformation ;*
- ✓ *Les arêtes cachées sont représentées par des pointillés.*





Exercices

1) Représente en perspective un cube d'arête 9cm.
2) Représente en perspective un pavé droit ayant une base carrée de 5cm de côté et de hauteur 7cm.

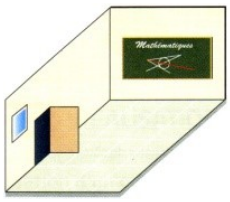
2 Représentation en perspective cavalière

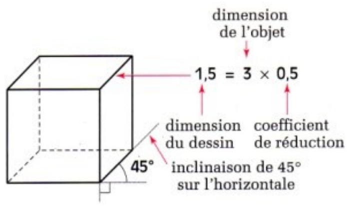
Remarque
Des objets de l'espace peuvent être représentés dans le plan, avec plus de précision, en perspective cavalière.

Règles de représentation en perspective cavalière

Pour représenter un objet de l'espace dans un plan avec plus de précision, on utilise la représentation en perspective cavalière en suivant les cinq règles suivantes :

- ✓ *Les arêtes à supports parallèles sont représentées par des segments de supports parallèles sur le dessin ;*
- ✓ *Toute face de l'objet située dans un plan vertical de face est dessinée sans déformation ;*
- ✓ *Les arêtes cachées sont représentées par des pointillés.*
- ✓ *Les arêtes de l'objet à supports perpendiculaires au plan vertical de face sont représentées par des segments à supports parallèles faisant un angle de mesure fixée a (inclinaison des fuyantes sur l'horizontale) avec la représentation de l'horizontale sur le dessin.*
- ✓ *Les longueurs des segments du dessin, représentant les arêtes de l'objet ayant des supports perpendiculaires au plan vertical de face, sont multipliés par un coefficient c appelé coefficient de réduction*





Exercice

Représente en perspective cavalière, en suivant les instructions suivantes :

1) un cube d'arête 5cm, sachant que l'inclinaison des fuyantes sur l'horizontale est a = 30° et le coefficient de réduction c = ½.
2) Un parallélépipède rectangle de longueur 9cm, de largeur 5cm et hauteur 7cm sachant que l'inclinaison des fuyantes sur l'horizontale est a = 30° et le coefficient de réduction c = ½.
3) Une pyramide à base carrée de côté 5cm sachant que l'inclinaison des fuyantes sur l'horizontale est a = 30° et le coefficient de réduction c = ½.

Exercices

1) Représente en perspective un cube d'arête 5cm.

2) Représente en perspective un parallélépipède rectangle de longueur 5cm ; de largeur 3cm et de hauteur 7cm.

3) Représente en perspective une pyramide régulière de hauteur 4cm et dont la base est un carré de côté 2cm.

4) Représente en perspective une pyramide à base triangulaire équilatérale de côté 5cm et de hauteur 7cm.

5) Dans le tableau suivant, c désigne le nombre de côtés de la base d'une pyramide, f le nombre de ses faces, s le nombre de ses sommets et a le nombre de ses arêtes.
Reproduis et complète ce tableau :

c	3	4	5	n
f				

s				
a				

6) Représente en perspective cavalière un cube d'arête 7cm en prenant le coefficient de réduction c = ½ et l'angle des fuyantes a = 30°.

7)
a) Représente en perspective cavalière un pavé droit ABCDEFGH tel que AB = 2cm ; BC = 5cm ; AE = 4cm en choisissant toi-même le coefficient de réduction c et l'angle des fuyantes a.
b) Reproduis en vraie grandeur une diagonale du rectangle ABCD.

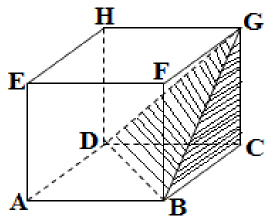
8) Représente en perspective cavalière une pyramide dont la base est un parallélogramme de côtés 5cm et 3cm et de hauteur 7cm en prenant l'angle des fuyantes a = 30° et le coefficient de réduction c = ½.

9) L'unité de longueur est le cm.
Un pave droit ABCDEFGH est tel que : AB = 2 ; BC = 3 ; AE = 4.
a) Représente ce pavé en perspective cavalière (choisis un coefficient de réduction et un angle pour les fuyantes) ;
b) Représente en vraie grandeur une diagonale du rectangle ABCD puis le segment [EC].

10) Une boîte d'allumettes ayant la forme d'un parallélépipède rectangle de dimensions L = 6cm, ℓ = 4cm et h = 1,5cm est posée sur un emballage de produits pharmaceutiques de forme cubique d'arrête 4cm. L'une des faces de la boîte d'allumettes de dimensions L = 6cm et ℓ = 4cm est en contact avec la face supérieure du cube, les extrémités de la boîte étant à 1cm des extrémités du cube à gauche comme à droite et la face avant de la boîte ayant les dimensions L = 6cm et h = 1,5cm se juxtapose avec la face avant du cube suivant un plan vertical de face.
Représente ce dispositif en perspective cavalière en choisissant $\frac{1}{2}$ comme coefficient de réduction et 45° comme angle des fuyantes.

11) Dessine deux patrons différents d'une même pyramide régulière dont les trois faces et la base sont des triangles équilatéraux.

12) Le solide ci-dessous est un cube de 5cm d'arrêtes.



Quelle est la nature du solide hachuré ?
La décrire en précisant la nature de toutes ses faces.

13 On considère un pavé droit (ou parallélépipède rectangle) dont la longueur L = 6cm, la largeur ℓ = 4cm et la hauteur h = 4cm.

a) Représente en perspective cavalière ce solide utilisant $\frac{1}{2}$ comme coefficient de réduction et 30° comme angle des fuyantes ;
b) Nomme ABCD le rectangle de base sur lequel repose le pavé et EFGH l'autre rectangle de base. On a donc le pavé droit ABCDEFGH ;
c) Place les points I, J et K, milieux respectifs des segments [EF], [FG] et [FB].
Sans calculer les longueurs IJ, JK, et IK, montre que le triangle IJK est un triangle isocèle en I.
d) Quelles est la nature du solide FIJK ?
Précise la nature des différentes faces constituant ce solide.

Chapitre 19 : Cubes, prismes et pyramides (rappels)

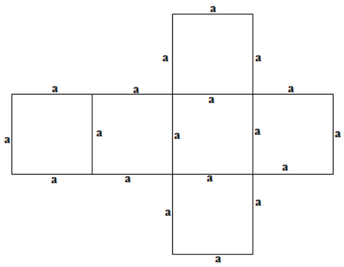
Objectifs

- Construire un patron d'un cube, d'un prisme droit et d'une pyramide ;
- réaliser un cube, un prisme droit et une pyramide.

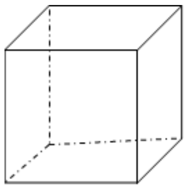
1 Le cube

Règle

On réalise un cube d'arête a à partir d'un patron.



La représentation en perspective est donnée par la figure ci-contre :



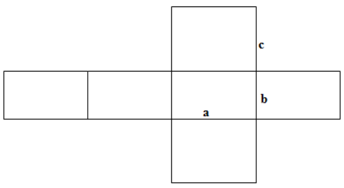
L'aire totale d'un cube d'arête a est : A = 6a².

Son volume est V= a × a × a = a^3.

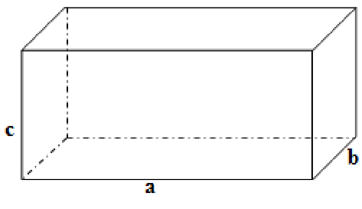
2 Prismes droits

<u>Règle :</u>

On réalise un pavé droit de longueur a, de largeur b et de hauteur c à partir d'un patron.



La figure suivante donne la représentation en perspective d'un parallélépipède rectangle de dimensions a, b, c.



L'aire latérale d'un pavé droit de dimensions a, b, c est : $A=2(a\times c + b\times c)$.
L'aire totale d'un pavé droit de dimensions a, b, c est : $A_t=2(a \times c + b \times c + a \times b)$.
Son volume est $V= a\times b \times c$.

Exercices

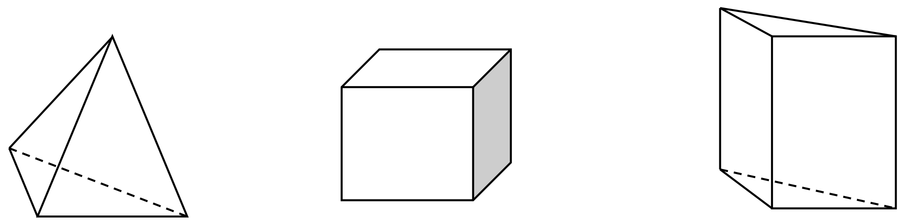
1- L'aire totale d'un cube est 150cm².
  a) Calcule l'arête de ce cube.
  b) Construis un patron de ce cube puis réalise ce cube.
  c) Calcule le volume de ce cube.

2-
  a) Construis un patron d'un prisme droit de hauteur 18cm dont la base est un losange de diagonales 20cm et 16cm.
  b) Calcule le volume de ce prisme droit.

3 Pyramides

3.1 Identification et définition des pyramides

Activité 3
Parmi les figures suivantes, identifie les pyramides en indiquant leur sommet et la forme de leur base.



a) **b)** **c)**

Définition
Une pyramide est une figure de l'espace ayant un sommet S n'appartenant pas au plan de sa base.
La base d'une pyramide peut être un triangle, un carré, un polygone quelconque.
Les faces d'une pyramide sont des triangles.

3.2 Construction d'un patron, réalisation et représentation d'une pyramide

Remarque
A l'aide d'un papier carton, on peut réaliser le patron d'une pyramide. Les longueurs des côtés doivent être rigoureusement mesurées.

Exercice
Représente en perspective :
  a) une pyramide à base triangulaire.
  b) Une pyramide à base trapézoïdale.

Exercices
1)
  a) Avec du papier carton, construis le patron d'un cube d'arête 7cm.
  b) Réalise ce cube.

c) Calcule l'aire totale A et le volume V de ce cube.

2)

a) Avec du papier carton, construis le patron d'un prisme droit dont la base est un triangle rectangle isocèle de côtés de même longueur égale à 4cm et de hauteur 5cm.
b) Réalise ce prisme.
c) Calcule l'aire totale A et le volume V de ce prisme.

3)

a) Avec du papier carton, construis le patron d'une pyramide dont la base est un trapèze isocèle de bases 5cm et 4cm et de hauteur 7cm.
b) Réalise cette pyramide.
c) Calcule le volume d'une pyramide à base carrée de côté 2cm et de hauteur 3cm.

4) Calcule le volume d'une pyramide de hauteur 8cm et dont la base est un triangle ABC rectangle en A tel que AB = 5cm et AC = 2cm.

5) La pyramide de Kheops en Egypte est régulière à base carrée de côté 230m et de hauteur 140m. Calcule son volume.

6) On considère un cube de 4cm d'arrête.
Construis tous les patrons possibles de ce cube. Combien en trouves-tu ?

7) Un prisme droit a pour hauteur 5cm et pour bases des triangles ayant pour mesures des côtés : 2,5cm ; 3cm et 3,3 cm.
Construis un patron de ce solide et réalise-le.

8) L'unité de mesure est le cm.
SABCD est une pyramide de sommet S dont la base est un parallélogramme ABCD et telle que : SA = 4 ; SB = 3 ; SC = 2,5 ; SD = 3 ; AB = 3 ; BC = 1,8.

a) Réalise un patron de cette pyramide ;
b) Construis le solide en question.

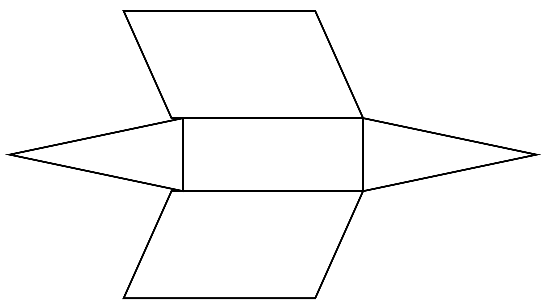
9) Réalise un patron d'une pyramide SABC telle que :

- ABC est rectangle en A ;
- BSC est rectangle B ;
- BSA est rectangle en A.

D'après ta construction, que peux-tu dire du triangle ACS ?

10) Un prisme de hauteur 6cm a pour bases des triangles rectangles dont l'hypoténuse mesure 5cm et l'un des côtés adjacents à l'angle droit mesure 3cm.
Construis un patron de ce prisme.

11) La figure ci-dessous représente le développement d'un prisme.



a) Est-ce un prisme droit ou oblique ?

b) Quelle est la nature des faces latérales ?

c) Construis le prisme.

Chapitre 20 : Solides de révolution : sphère, cylindre droit et cône

Objectifs

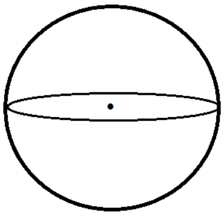
- Définir un solide de révolution ;
- reconnaître, dessiner, confectionner un patron et réaliser un cône, un cylindre droit;
- représenter en perspective cavalière une sphère, un cône et un cylindre droit ;
- calculer l'aire d'une sphère et d'un cylindre droit ;
- calculer le volume d'une boule, d'un cylindre droit et d'un cône.

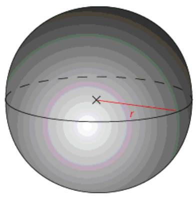
1 Définition des solides de révolution

1.1 Définition d'une sphère et d'une boule

Définition
r est un nombre positif.

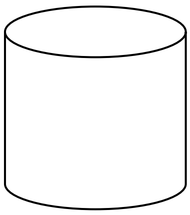
- *Une sphère de centre A et de rayon r est l'ensemble des points M de l'espace tels que : AM=r.*
- *Une boule de centre A et de rayon r est l'ensemble des points M de l'espace tels que AM≤ r .*





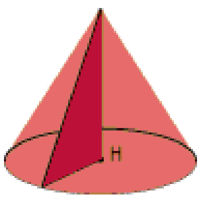
1.2 Définition d'un cylindre droit

Définition d'un cylindre
Un cylindre est une figure de l'espace ayant deux bases circulaires superposables et une face latérale rectangulaire.



1.3 Définition d'un cône

Définition d'un cône
Un cône est une figure de l'espace ayant une base circulaire et un sommet S n'appartenant pas au plan de la base.



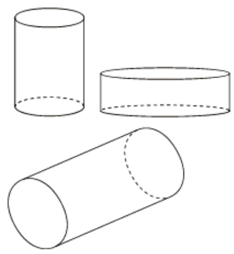
1.4 Définition des solides de révolution

La boule, le cylindre droit et le cône sont obtenus en faisant tourner respectivement autour d'un axe de symétrie un disque, un rectangle, un triangle isocèle.
Ces solides sont appelés des solides de révolution.

2 Dessin, confection des patrons et réalisation d'un cylindre droit et d'un cône

2.1 Dessin, confection d'un patron et réalisation d'un cylindre droit

Méthode de construction
Avec du papier carton, on peut réaliser après dessin et confection d'un patron un cylindre droit: ses bases sont des disques superposables tandis que sa face latérale est une plaque carrée ou rectangulaire.



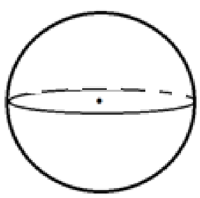
2.2 Dessin, confection d'un patron et réalisation d'un cône

Méthode de construction :
Avec du papier carton, on peut réaliser après dessin et confection d'un patron un cône ayant un sommet S : sa base est un disque, sa face latérale est une section de disque ayant même surface de base que celle de sa base.

3 Représentation en perspective d'une sphère ; d'un cylindre droit et d'un cône

3.1 Représentation en perspective d'une sphère

Règle
Une sphère peut être représentée en perspective dans le plan en construisant deux cercles de même centre, l'un vertical et l'autre horizontal.



<u>Exercice :</u>

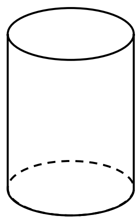
Représente en perspective une sphère de rayon égal à 4cm.

3.2 Représentation en perspective d'un cylindre droit

Activité 7

a) A partir d'une ligne horizontale, trace deux segments à supports parallèles de même longueur L = 7cm et distants de 5cm l'un de l'autre.
b) Sur les plans horizontaux parallèles des extrémités des deux segments, construis deux cercles de même diamètre égal à la distance entre les deux segments tracés. Quelle figure obtiens-tu ?

Règle
Un cylindre droit peut être représenté en perspective dans un plan. Ses bases sont alors des cercles superposables contenus dans les plans horizontaux situés aux extrémités inferieures et supérieures des côtés du carré ou du rectangle qui matérialisent sa face latérale.
Le diamètre de ces cercles est égal à la distance entre les côtés du carré ou du rectangle qui matérialisent sa face latérale.



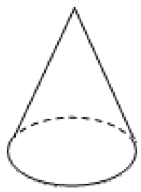
Exercice
Représente en perspective sur ta feuille de cahier un cylindre droit ayant 7cm de hauteur et dont le diamètre des bases est 4cm.

3.3 Représentation en perspective d'un cône

Activité 8

a) Trace un triangle ABC isocèle en A tel que AB = AC = 7cm et BC = 5cm.
b) Dans le plan horizontal contenant le coté [BC], construis un cercle de diamètre BC. Quelle figure obtiens-tu ?

Règle :
*Un cône peut être représenté en perspective dans un plan par un triangle isocèle de sommet S. Sa base est alors le cercle de diamètre égal à la longueur de la base du triangle isocèle***.**



Exercice
Construis en perspective sur ta feuille de cahier un cône de sommet S dont le diamètre de la base est 3cm.

4 Calcul des aires et des volumes

4.1 Calcul de l'aire d'une sphère, d'un cylindre droit

L'aire totale d'une sphère (d'une boule) de rayon r est : $A = 4\pi r^2$.
L'aire latérale d'un cylindre droit de rayon de base r et de hauteur h est : $A = 2\pi r \times h$.
L'aire totale de ce cylindre est : $A_T = 2\pi r^2 + 2\pi r \times h$.

Exercices

1) Calcule l'aire d'une sphère de rayon r = 7cm.
2) Calcule l'aire latérale puis l'aire totale d'un cylindre droit de rayon r = 35cm et de hauteur h = 1m.

4.2 Calcul du volume d'une sphère, d'un cylindre droit et d'un cône

Le volume d'une sphère de rayon r est : $V = \frac{4\pi r^3}{3}$.
Le volume d'un cylindre droit de hauteur h et de rayon de base r est : $V = \pi r^2 \times h$.
L'aire d'un cône de hauteur h et de rayon de base r est : $V = \frac{\pi r^2 \times h}{3}$.

Exercices

1) Calcule le volume d'une boule de rayon r = 4cm.
2) Calcule le volume d'un cylindre droit de hauteur h = 7cm et de rayon de base r = 3cm.
3) Calcule le volume d'un cône de hauteur h = 9cm et de rayon de base r = 3cm.

Exercices

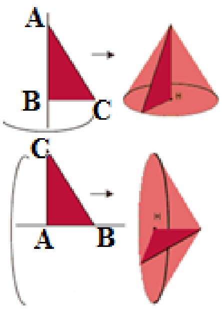
1)
   a) Avec du papier carton, confectionne le patron d'un cylindre droit de diamètre de base égale à 7cm et de hauteur 5cm.
   b) Réalise ce cylindre.
   c) Représente en perspective ce cylindre.
   d) Calcule l'aire totale A et le volume V de ce cylindre.

2)
   a) Avec du papier carton, confectionne le patron d'un cône de diamètre de base égale à 8cm et de hauteur égale à 10cm.
   b) Réalise ce cône.
   c) Représente ce cône en perspective.
   d) Calcule le volume de ce cône.

3) Calcule le volume d'un verre de ayant la forme d'un cône de révolution de hauteur 8cm et de rayon 3cm.

4) On donne un disque de rayon 6cm. Découpe un quart de ce disque de façon à obtenir deux patrons de cônes. Quel est le rayon de la base de chacun de ces cônes.

5) Réalise un cône que l'on obtiendrait en faisant tourner autour de (AB) le triangle ABC.

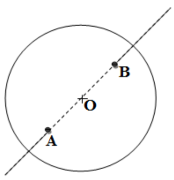


6)

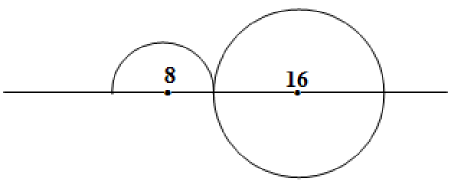
a) Représente en perspective une sphère de rayon 5cm.
b) Calcule l'aire de cette sphère.
c) Calcule le volume de cette sphère.

7) Une sphère est telle que le nombre qui exprime son volume en cm^3 est égal au nombre qui exprime son aire en m².
Quel est le rayon de cette sphère en m ? Quel est le nombre exprimant son volume ou son aire.

8) d est une droite qui passe par le centre O d'une sphère ; elle perce cette sphère en A et B. Trouve l'erreur sur le dessin suivant, puis fais un dessin correct.



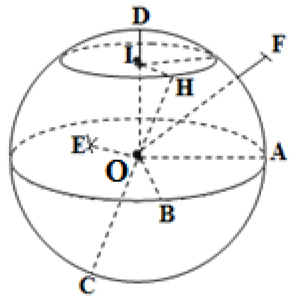
9) La figure suivante est-elle un patron de cône ?



10) Moussa veut réaliser un récipient métallique en forme de cône dont la hauteur est 75cm et l'ouverture ayant un diamètre de 60cm.
Pour cela ; il te demande de lui dessiner le patron de ce récipient à l'échelle de $\frac{1}{15}$.
Réalise ce patron.

11) Représente dans le plan une sphère de centre I et de rayon r = 2,5cm et un cône de hauteur 5cm et dont la base a un diamètre de 4cm.

12) On donne la figure suivante représentant une sphère de centre O et de rayon 2cm.



a) Parmi les segments dessinés, indique ceux qui sont des rayons de la sphère de centre O ;
b) Pour chaque point de la figure, dis s'il est à 2cm, à plus de 2cm ou à moins de 2cm du centre O.

13) Assimilons la Terre et le Soleil à des boules.
Présente les résultats demandés à l'aide d'une écriture scientifique.

a) La terre a pour rayon environ 6400km.

Calcule les valeurs approchées de son aire et de son volume.

b) Le Soleil a un rayon égal à 111 fois celui de la Terre.
Calcule les valeurs approchées de son aire et de son volume.

14) Un ancien haltère est composé de deux boules reliées par une barre cylindrique. Chaque boule a un diamètre de 20cm. La barre a un diamètre de 4cm et une longueur de 1m.

a) Calcule une valeur approchée du volume de chaque boule ;
b) Calcule une valeur approchée du volume total de l'haltère ;
c) On sait que chaque volume de $1dm^3$ de fer a une masse de 7,8kg (masse volumique de fer).

Calcule une valeur approchée de la masse de cet haltère. ($\pi = 3{,}14$).

15) Un solide est constitué par une demi-boule de diamètre 2cm, collée sur un cylindre dont la base supérieure a le même centre et le même rayon que la demi-boule.
Exprime en fonction de π le volume de ce solide, sachant la hauteur du cylindre est égale au rayon de la demi-boule.

16) On considère une boule de rayon 3 et un cylindre dont chaque base a pour rayon 3.

a) Quelle doit être la hauteur du cylindre pour que les deux solides aient le même volume ?
b) Quelle doit être la hauteur du cylindre pour que l'on puisse peindre la boule avec la même quantité de peinture que celle utilisée pour peindre le cylindre ?

17) Une masse est constituée d'un toit en forme de cône, collé sur un mur en forme de cylindre dont la base supérieure a le même centre et le même rayon que la base du cône.
Les bases du cylindre ont pour rayon 2m à l'intérieur et sachant que la hauteur du cylindre est de 2,5m alors que la hauteur du toit est de 2m.

a) Calcule l'aire de la case constituée par l'aire latérale du cylindre et par l'aire latérale du cône ;

b) Calcule le volume de la case.

18) a) Complète : $\frac{1}{4} = \frac{\square}{12}$; $\frac{1}{6} = \frac{\square}{12}$.

Calcule $\frac{1}{4} - \frac{1}{6}$.

b) Une boule a pour diamètre R.
Un cylindre a pour base un disque de diamètre R et sa hauteur est R. Imaginons que l'on plonge la boule dans le cylindre.
b.1- Exprime en fraction de R le volume inoccupé. Factorise l'expression trouvée.
b.2- Compare ce volume avec celui de la boule.

Chapitre 21 : Droites et plan de l'espace

Objectifs

A l'aide de solides et de leurs représentations,

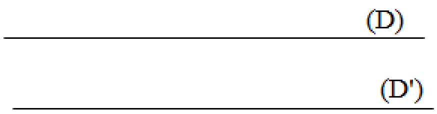
- déterminer un plan défini par :
  - deux droites parallèles,
  - deux droites sécantes ;
  - une droite et un point n'appartenant pas à cette droite ;
  - trois points non alignés ;
- reconnaître :
  - une droite contenue dans un plan,
  - une droite parallèle à un plan,
  - une droite sécante à un plan,
  - une droite perpendiculaire à un plan ;
- identifier :
  - deux plans parallèles,
  - deux plans sécants,
  - la droite commune à deux plans sécants,
  - deux plans perpendiculaires ;
- reconnaître :
  - des droites coplanaires,
  - des droites non coplanaires,
  - deux droites parallèles,
  - deux droites orthogonales.

1 Détermination d'un plan défini

1.1 Par deux droites parallèles

Règle

Deux droites parallèles de l'espace déterminent un seul plan.



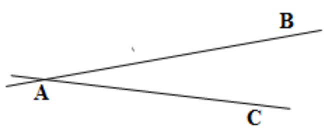
Exercice

Trace deux droites parallèles et hachure le plan qu'elles déterminent

1.2 Par deux droites sécantes

Règle

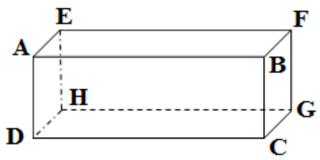
Deux droites sécantes (AB) et (AC) de l'espace déterminent un seul plan.



Exercice
Trace deux droites sécantes (MN) et (MP).
Hachure le plan déterminé par les deux droites (MN) et (MP).

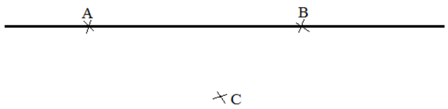
1.3 Par une droite et un point n'appartenant pas à cette droite

Activité 3
ABCDEFGH est un parallélépipède rectangle.



Considère la droite (AB). Le point C appartient-il à la droite (AB) ?
Trace la droite (AC) et hachure sur la figure le plan déterminé par la droite (AB) et le point C.

Règle
Une droite (AB) donnée et un point C n'appartenant pas à la droite (AB) déterminent un seul plan de l'espace.



Exercice

Trace une droite (D) et place un point A n'appartenant pas à (D).
Hachure le plan déterminé par le point A et la droite (D).

1.4 Par trois points non alignés

Règle
Trois points non alignés de l'espace déterminent un seul plan.

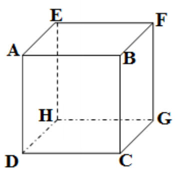
Exercice

A, B et C sont trois points non alignés de l'espace. Détermine et hachure le plan (ABC).

2 Positions relatives d'une droite et d'un plan de l'espace

2.1 Droite contenue dans un plan

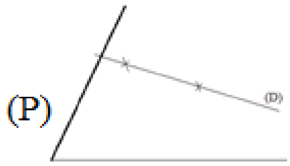
Activité 5
ABCDEFGH est un cube.



Hachure le plan (ABC)
Trace la droite (AC). Que remarques-tu ?

Trace et nomme une autre droite appartenant au plan (ABC).

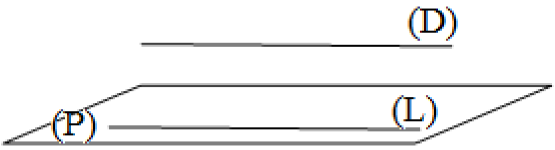
Règle
(P) est un plan de l'espace. Une droite (D) de l'espace est contenue dans le plan (P) si elle passe par deux points distincts du plan (P).



Exercice
ABCDEFGH est un cube.
Hachure le plan (ABC).
Que dire de la droite (AB) ?

2.2 Droite parallèle à un plan

Règle
Une droite (D) est parallèle à un plan (P) de l'espace lorsqu'elle est parallèle à une droite (L) du plan (P).

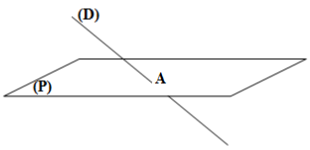


(D) $\parallel$(L) et (L) $\subset$ (P) alors (D) $\parallel$(P)

Exercice
ABCDEFGH est un cube posé sur sa face ABCD.
Que dire du plan (ABC) et de la droite (EF) ?

2.3 Droite sécante à un plan

Règle
Une droite (D) de l'espace est sécante à un plan (P) si elle coupe le plan (P) en un seul point.



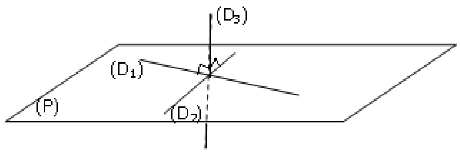
A$\in$ (D) et A$\in$ (P).
Si un autre point B $\in$ (D) alors B$\notin$ (P)

Exercice
SABC est une pyramide de sommet S.
Que dire du plan (ABC) et de la droite (SA) ?

2.4 Droite perpendiculaire à un plan

Règle

Une droite (D) de l'espace est perpendiculaire à un plan (P) si elle est perpendiculaire à deux droites sécantes de ce plan.
$(D_1) \subset (P)$, $(D_2) \subset (P)$ et (D_1) sécante à (D_2). Si une troisième droite (D_3) est perpendiculaire à (D_1) et à (D_2) alors (D_3) est perpendiculaire à (P).

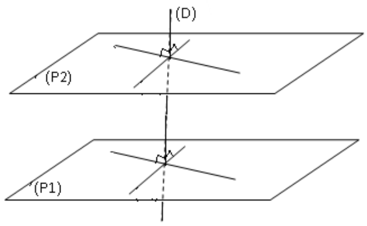


Exercices
Construis un cube ABCDEFGH et cite deux droites perpendiculaires au plan (ABC).

3 Positions relatives de deux plans de l'espace

3.1 Plans parallèles

Règle
Deux plans (P_1) et (P_2) sont parallèles lorsqu'ils admettent une droite perpendiculaire commune.



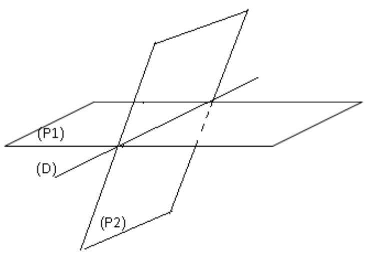
$(D) \perp (P_1)$ et $(D) \perp (P_2)$ alors $(P_1) \parallel (P_2)$

Propriété
Deux plans (P) et (P') sont parallèles s'ils n'ont aucun point commun et si toute droite contenue dans l'un est parallèle à l'autre.

Exercice
Construis un parallélépipède rectangle ABCDEFGH et cite quatre plans de cet objet deux à deux parallèles.

3.2 Plans sécants

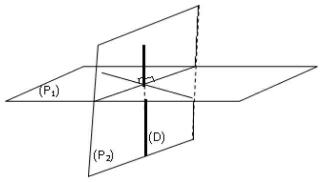
Règle
Deux plans (P_1) et (P_2) sont sécants lorsqu'ils admettent une droite commune.



Remarque
Deux plans ayant au moins un point commun ont une droite commune qui passe par ce point.
Exercice :
Construis un cube ABCDEFGH et retrouve quatre plans deux à deux sécants.

3.3 Plans perpendiculaires

Règle
Deux plans (P_1) et (P_2) sont perpendiculaires si l'un contient une droite perpendiculaire à l'autre.



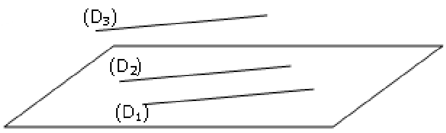
$(D) \subset (P_2)$ et $(D) \perp (P_1)$ alors $(P_1) \perp (P_2)$.

Exercices
Construis un parallélépipède rectangle ABCDEFGH et nomme des plans perpendiculaires.

4 Positions relatives des droites de l'espace

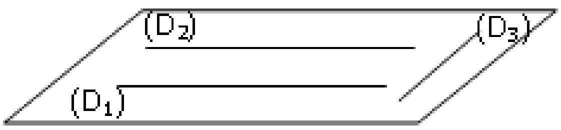
4.1 Droites parallèles de l'espace

Propriété
Dans l'espace, si deux droites (D_1) et (D_2) sont parallèles à une même troisième (D_3) alors (D_1) est parallèle à (D_2).



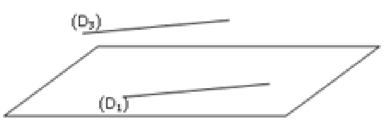
4.2 Droites coplanaires

Règle
Des droites sécantes ou parallèles contenues dans un même plan sont coplanaires.



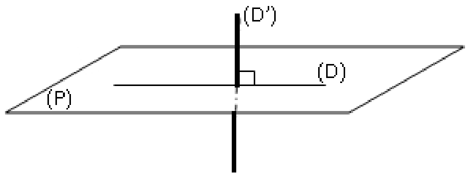
4.3 Droites non coplanaires

Règle
Des droites qui n'appartiennent pas à un même plan sont non coplanaires.



4.4 Droites perpendiculaires - droites orthogonales

Règle
Deux droites (D) et (D') de l'espace sont perpendiculaires si elles sont sécantes en un point suivant un angle droit.



Deux droites (D) et (D') de l'espace sont orthogonales si l'une est parallèle à une droite perpendiculaire à l'autre et contenue dans le même plan que celle-ci.

Exercices

1) a) Représente en perspective un prisme droit ABCDEFGH dont les bases ABCD et EFGH sont des trapèzes isocèles.
   b) Hachure le plan de face déterminé par deux arêtes parallèles.

2) Représente le plan déterminé par deux droites sécantes (AB) et (AC).

3) ABCDEFGH est un cube. Hachure le plan déterminé par la droite (AB) et le point E.

4) A, B et C sont trois points non alignés du plan.
   a) Construis un prisme droit ayant le triangle ABC comme une base.
   b) Hachure le plan déterminé par les trois points non alignés A, B et C.

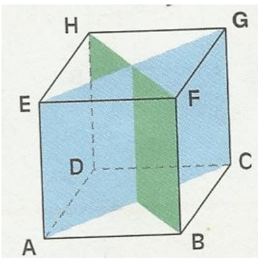
5)
   a) Construis un parallélépipède rectangle ABCDEFGH.
   b) Cite trois droites contenues dans le plan (ABC).
   c) Cite une droite parallèle au plan (ABC).
   d) Cite une droite sécante au plan (ABC).
   e) Cite deux droites perpendiculaires au plan (ABC).

6)
   a) Construis un cube ABCDEFGH d'arête 5cm.
      Cite à partir de cette construction :
   b) Quatre plans deux à deux parallèles.
   c) Quatre plans deux à deux sécants.
   d) Une droite commune à deux plans sécants identifiés.
   e) Quatre plans deux à deux perpendiculaires.

7)
   a) Construis un pavé droit ABCDEFGH.
      A partir de cette construction, cite :

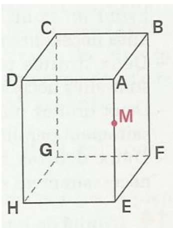
b) Deux droites parallèles ;
c) Deux droites coplanaires ;
d) Deux droites non coplanaires ;
e) Deux droites perpendiculaires ;
f) Deux droites orthogonales.

8) ABCDEFGH est un pavé droit de bases carrées ABCD et EFGH telles que AE = 8cm et AB = 6cm.



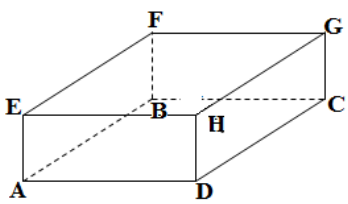
a) Trace les diagonales [AC] et [DB] du carré ABCD. Elles sont sécantes en un point I.
b) Démontre que :
   - Le triangle ACF est isocèle.
   - (BD) est perpendiculaire à (AC).
   - (IF) est perpendiculaire à (AC).

9) ABCDEFGH est un pavé droit et M un point du segment [AE].



Trace la droite passant par M, perpendiculaire à (EA) et contenue dans le plan (CAE).

10) La figure ci-dessous représente un parallélépipède rectangle.



a).
- Les points A, B et H sont-ils coplanaires ?
- Les points A, B, H et G sont-ils coplanaires ?
- Les points B, H, D et C sont-ils coplanaires ?

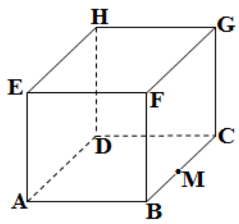
b). Trouve tous les plans contenant quatre sommets du parallélépipède rectangle. Quels sont, parmi ces plans, ceux qui ne contiennent pas de faces ?

c). Trouve tous les plans contenant seulement trois sommets du parallélépipède rectangle.

d)
-Trouve quatre exemples de droites parallèles ;
-Trouve quatre exemples de droites sécantes ;
-Trouve quatre exemples de droites non coplanaires ;
-Indique si les plans suivants sont sécants ou parallèles :

a- (EFH) et (QBC) ;
b- (EFH) et (ABF) ;
c- (DCG) et (DHG) ;
d- (BCF) et (ABD).

11) ABCDEFGH est un cube ; M est un point de [BC].



Reproduis la figure puis réponds aux questions suivantes :

a. Justifie que le plan (HDM) est perpendiculaire au plan (ABC) ;
b. Trace la droite d'intersection des plans (HDM) et (ABC) ;
c. Place le point N sur [FG] tel que : (NH)∥(DM) ;
d. Justifie que (HN) est contenue dans le plan (HDM) ;
e. Quelle est la droite d'intersection des plans (HDM) et (BFG) ?

12) On considère un cube ABCDEFGH d'arrête 2cm.
Construis ce cube en nommant ABCD la face carré horizontale supérieure et EFGH la face sur laquelle repose le cube.

a. Quelle est la nature du quadrilatère BDHF ?
b. M est le centre du carré ABCD.
   b.1-Quelle est la nature du triangle FMH ?
   b.2-Construis la droite passant par M et perpendiculaire au plan (EHG) ;
c. Construis en dimensions réelles la figure du plan (BDH).

Chapitre 22 : Equations du premier degré à une inconnue et résolution de problèmes

Objectifs

- Transformer une équation en une autre plus simple ayant les mêmes solutions ;
- résoudre les équations du type :
  - $x + a = b$;
  - $ax = b$;
  - $ax + b = c$;
  - $\mathrm{a}x + b = cx + d.$
- résoudre un problème se ramenant à des équations du premier degré à une inconnue.

1 Egalités et opérations

Propriété 1

Lorsqu'on ajoute un même nombre à chaque membre d'une égalité, on obtient une nouvelle égalité. On écrit :

a, b et c étant des nombres. Si a = b alors a + c = b + c.

Propriété 2

Lorsqu'on multiplie par un même nombre chaque membre d'une égalité, on obtient une nouvelle égalité. On écrit :

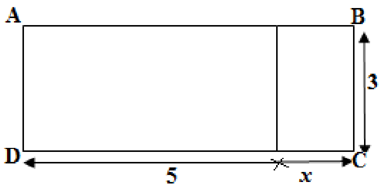
a, b et c sont des nombres,

si a = b alors ac = bc.

2 Notion d'équation

Activité 3

L'unité de longueur étant le cm, on considère la figure suivante :



a) Exprime en fonction de x le périmètre P du rectangle ABCD.
b) Si P = 21 cm, écris l'égalité traduisant la situation.
c) Soit (E) cette égalité. Si on donne à x les valeurs 1 ; 2 ; 3, l'égalité (E) reste – elle vraie ?
d) Si $x = 2{,}5$, l'égalité (E) est – elle vraie ou fausse ?

L'égalité (E) s'écrit : $2(5 + x) + 2 \times 3 = 21$ donc (E) : $2(5 + x) + 6 = 21$.

Cette égalité s'appelle une équation (E) d'inconnue x.

Comme l'exposant de l'inconnue x est 1 puisque $x^1 = x$ alors l'équation (E) est une équation du 1^{er} degré à une inconnue x.

L'expression $2(5 + x) + 6$ est appelée le 1^{er} membre de l'équation (E) et le nombre 21 en est le second membre.

$$\underbrace{2(5+x)+6}_{1^{er}\text{ membre}} = \underbrace{21}_{2^{ème}\text{ membre}}$$

Quand on remplace x respectivement par 1, 2 et 3 dans l'égalité (E), on se rend compte qu'on obtient chaque fois une égalité fausse.

Par contre, quand on remplace x par 2,5 dans l'équation (E), on constate que l'égalité est vraie. On dit que 2,5 vérifie l'équation (E) ou que 2,5 est une solution de (E).
Lorsqu'on a trouvé toutes les solutions d'une équation, on dit qu'on a résolu l'équation.

Définition
Toute écriture pouvant se ramener sous la forme $ax + b = 0$ *où* a *et* b *sont deux nombres donnés est appelée équation du premier degré à une inconnue* x.
$ax + b$ *est le premier membre de l'équation tandis que 0 en est le second.*

Exercice
Moussa pose une devinette à Jacques en ces termes : le triple d'un nombre augmenté de 1 est égal au double de ce nombre, diminué de 5.

a) Jacques se dit que cette devinette peut être traduite par une équation. Aide – le à écrire l'équation cherchée.
b) Peux- tu trouver une solution à cette équation ?

3 Transformation d'équations

Propriété 1
Lorsqu'on ajoute un même nombre à chaque membre d'une équation, on obtient une nouvelle équation qui a les mêmes solutions que l'équation de départ.

Propriété 2
Lorsqu'on multiple par un même nombre non nul chaque membre d'une équation, on obtient une nouvelle équation qui a les mêmes solutions que l'équation de départ.

4 Résolution d'équations

Résoudre une équation, c'est trouver toutes ses solutions.
Les propriétés de transformation d'équations sont généralement utilisées pour résoudre des équations du 1er degré à une inconnue.

4.1 Equations du type $x + a = b$

Pour résoudre une équation du type $x + a = b$, on ajoute à chacun des membres l'opposé de a.
On obtient donc une nouvelle équation du type : $x = u$ où $u = b - a$.
Le nombre u est la solution de l'équation proposée.

Exemple
Pour résoudre l'équation (E) : $x + 7 = 19$:

- On pose l'équation (E) : $x + 7 = 19$.
- On ajoute à chaque membre de l'équation l'opposé de 7 qui est -7. On a :
  $x + 7 + (-7) = 19 + (-7)$.
- On simplifie l'écriture de chaque membre de l'équation. On a :
  $x + 7 + (-7) = 19 + (-7)$
  $x + 0 = 12$.
  Donc 12 est la solution de l'équation (E).

Exercice
x étant un nombre, résous les équations suivantes :
a) $x - 25 = 4$; b) $9 + x = 24$.

4.2 Equations du type $ax = b$ (a ≠ 0)

Pour résoudre des équations du type $ax = b$, on multiplie chaque membre de l'équation par l'inverse de a qui est $\frac{1}{a}$. On ramène l'équation initiale à une équation du type :
$x = u$ avec $u = \frac{b}{a}$ (avec a ≠ 0). Le nombre u est la solution de l'équation proposée.

Exemple
x étant un nombre rationnel, pour résoudre l'équation : -5x = 25 :

- On pose l'équation : -5x = 20.
- On multiplie chaque membre de l'équation par l'inverse de -5 qui est $\frac{1}{-5}$.
  On obtient : $(-5x) \times (\frac{1}{-5}) = 20\times (\frac{1}{-5})$.
- On simplifie l'écriture de chacun des membres. On a :
  $\frac{-5}{-5}x = \frac{-20}{5}$

Donc x = - 4.
-4 est donc la solution de l'équation $-5x = 20$.

<u>Exercice</u>
Résous les équations suivantes :
$8x = 3$; $\frac{2}{3}x = -42$; $-\frac{3}{14}x = \frac{12}{7}$.

4.3 Equations du type $ax + b = c$ (a ≠ 0)

Pour résoudre des équations du type : $ax + b = c$, on effectue une 1ère transformation (on ajoute l'opposé de b) pour la ramener au type $ax = t$ où t = c – b ; puis une 2nde transformation (on multiplie les deux membres par l'inverse de a)pour la ramener au type $x = u$ avec $u = \frac{t}{a}$ ($a \neq 0$).

Exemple
Pour résoudre l'équation $-3x + 7 = -5$

- On pose l'équation : -3x + 7 = -5.
- On effectue la 1ère transformation en ajoutant aux deux membres de l'équation l'opposé de 7. On a : -3x + 7 + (-7) = -5 + (-7).
- On simplifie l'écriture de chaque membre. On obtient : -3 x + 0 = -12.
  Donc -3x = -12.
- On effectue la 2nde transformation en multipliant chaque membre par l'inverse de -3.
  On obtient : $(-3x)$ x $(\frac{1}{-3}) = (-12)$x$(\frac{1}{-3})$
  $\frac{-3}{-3}x = \frac{-12}{-3}$. Donc x = 4.

4 est donc la solution de l'équation initiale.

Exercice
Résous les équations suivantes :
$15x + 4 = 11$; $\frac{5}{18}x + 9 = 3$; $\frac{5}{16}x + \frac{11}{8} = -\frac{11}{16}$.

4.4 Equations du type $ax + b = cx + d$

Pour résoudre des équations du type $ax + b = cx + d$, on effectue une 1ère transformation pour la ramener au type $Ax + B = C$.
Pour cela, on ajoute aux membres de l'équation l'opposé de cx ou de ax.
Puis on applique la méthode de résolution des équations du type $ax + b = c$.

Exemple
Pour résoudre l'équation (E) : $9x + 5 = 3x + 2$
- On pose l'équation (E) : $9x + 5 = 3x + 2$.
- On ajoute par exemple l'opposé de $3x$ aux deux membres de l'égalité.
  On obtient : $9x + 5 + (-3x) = 3x + 2 + (-3x)$.

$$9x + (-3x) + 5 = 3x + (-3x) + 2$$
$$6x + 5 = 0 + 2$$
$$6x + 5 = 2$$ qui est du type $ax + b = c$.

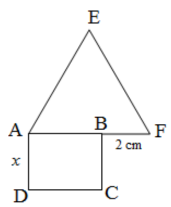
On applique la méthode appropriée et on obtient la solution $x = -\frac{1}{2}$.
$-\frac{1}{2}$ est la solution de l'équation (E).

Exercice
Résous les équations suivantes :
$3 - 4x = 5 - 6x$; $-2x - 3 = 4x - 5$; $-\frac{1}{3} - \frac{5}{4}x = -\frac{3}{4} - \frac{2}{3}x$

5 Résolution des problèmes se ramenant à une équation du premier degré à une inconnue

Méthode
Pour résoudre un problème se ramenant à une équation, on procède :
- *au choix de l'inconnue que l'on peut désigner par une lettre : x, y, z,…. ;*
- *à la mise en équation en suivant scrupuleusement l'énoncé du problème ;*
- *à la résolution de l'équation posée ;*
- *à la vérification en revenant aux données du problème.*

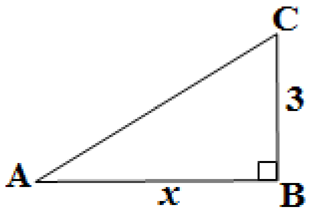
Exercice
Le triangle AEF ci-dessous est équilatéral, le quadrilatère ABCD est carré. Les côtés du triangle AEF mesurent 2cm de plus que les côtés du carré.



Trouve la longueur des côtés du carré ABCD pour que son périmètre soit égal à celui du triangle AEF.

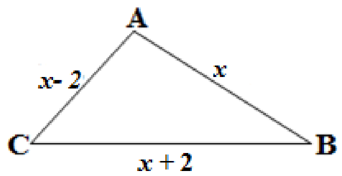
Exercices

1)



a) Exprime AC^2 en fonction de x.
b) Exprime l'aire du triangle ABC en fonction de x.
c) Calcule x si l'aire du triangle ABC est égale à $6m^2$. Calcule alors AC.

2) x étant un nombre entier, trouve x pour que le périmètre du triangle ABC mesure 90.



3) Résous les équations suivantes :

$3x = 4,8$; $-\frac{3}{5}x = -21$; $\frac{2}{7}x = -\frac{9}{28}$

$-4x + 3 = 5$; $-5x - 3 = -7$; $\frac{6}{5}x - \frac{1}{3} = 5$

$-2x + 3 = 4x - 5$; $-2 - 7x = -5x - 1$; $x + 3,7 = 4,5$; $x - 2,5 = 5,2$.

4) Parmi les nombres $-\frac{1}{3}$; 0 ; 1 et $\frac{1}{3}$, lequel est la solution de l'équation
$2x - 4 = 5x - 4$?

5) Ali fait quatre devoirs de mathématiques au premier trimestre de l'année scolaire 2013 mais ne se souvient que de ses trois notes : 12 ; 17 ; 11. Il sait aussi que sa moyenne en mathématiques pour ce trimestre est 14. Quelle est la quatrième note de Ali ?

6) Phidélie s'imagine un nombre x et dit à Ousmane : le triple de ce nombre x augmenté de 23 donne 176.
Trouve ce nombre x.

7) La somme des âges de Henri, Seydou et Ngaba est égale à 105ans. Trouve l'âge de chacun d'eux sachant que Seydou est deux fois plus âgé que Henri et que Ngaba a 10 ans de moins que Seydou.

8) Trouve trois nombres entiers consécutifs tels que leur somme soit 567.

9) Mahamat, le père de Barka est trois fois plus âgé que son fils. Quel est l'âge de chacun d'eux sachant que dans 12 ans Mahamat sera deux fois plus âgé que Barka ?

10) Trouve le nombre dont la somme des quotients exacts par 12 ; par 9 ; par 8 et par 16 est 110.

11) Annie dépense chaque jour la moitié de l'argent qu'elle possède dans son porte-monnaie plus 70F. Au bout de trois jours, elle n'a plus rien. Quelle somme avait-elle au premier jour ?

12) Clémence lit un livre de 300 pages en quatre jours. Chaque jour, à partir du deuxième jour, elle lit 20 pages de plus que le jour précédent. Combien a-t-elle lu de pages le premier jour ?

13) Pour payer un livre de mathématiques, Rozzi donne un billet de 10 000F. Avec le quart de ce que lui a remis le commerçant Youssouf, Rozzi achète un cahier et il lui reste 4500F.
Quels sont les prix du livre et du cahier ?

14) Au marché de Béboto, le kilogramme de petit-mil coute deux fois plus le kilogramme de noix de karité.
Une ménagère achète trois kilogrammes de petit-mil et deux kilogrammes de noix de karité.
Elle paie pour le tout 1200F. Calcule le prix du kilogramme de petit-mil et de noix de karité.

Chapitre 23 : Inéquations du premier degré à une inconnue et résolution de problèmes

Objectifs

- Trouver des solutions d'une inéquation de types suivants : $x > a$; $x \geq a$ ou $x < a$; $x \leq a$;
- transformer des inéquations de types :
  - $x + a < b$ *ou* $x + a \leq b$
  - $ax < b$ *ou* $ax \leq b$
  - $ax + b < c$ *ou* $ax + b \leq a$
  - $ax + b < cx + d$ *ou* $ax + b \leq cx + d$

  en des inéquations de types $x < u$; $x \leq u$ ou $x > u$; $x \geq u$;
- vérifier qu'un nombre rationnel est solution d'une inéquation ;
- placer approximativement un nombre solution d'une inéquation sur une droite graduée ;
- Résoudre des problèmes se ramenant aux inéquations du premier degré à une inconnue.

1 Inégalités et opérations

Propriété 1

Lorsqu'on ajoute un même nombre à chaque membre d'une inégalité, on obtient une nouvelle inégalité de même sens.

a, b et c étant des nombres,
si a < b alors a + c < b + c.

Propriété 2

- *Lorsqu'on multiplie par un même nombre positif non nul chaque membre d'une inégalité, on obtient une nouvelle inégalité de même sens.*

  c est un nombre relatif strictement positif (c > 0),
  si a < b alors a × c < b × c.
- *Lorsqu'on multiplie par un même nombre négatif non nul chaque membre d'une inégalité, on obtient une nouvelle inégalité de sens contraire.*
  c est un nombre relatif strictement négatif (c < 0),
  si a < b alors a × c >b × c.

2 Notion d'inéquation

Définition :

Toute écriture pouvant se ramener sous la forme $ax + b < 0$ *ou* $ax + b > 0$
où a *et* b *sont deux nombres donnés* ($a \neq 0$) *est appelée inéquation du premier degré à une inconnue* x.
$ax + b$ *est le premier membre de l'inéquation tandis que 0 en est le second.*

3 Transformation d'une inéquation

Propriétés

1) Si on ajoute un même nombre à chaque membre d'une inéquation, on obtient une nouvelle inéquation qui a les mêmes solutions que l'inéquation de départ.

2) Si on multiplie par un même nombre positif non nul, chaque membre d'une inéquation, on obtient une nouvelle inéquation qui a les mêmes solutions que l'inéquation de départ ; l'inégalité ne changeant de sens.
3) Si on multiplie par un même nombre négatif non nul chaque membre d'une inéquation, on obtient une nouvelle inéquation qui a les mêmes solutions que l'inéquation de départ ; l'inégalité changeant de sens.

4 Résolution d'inéquations du 1^er^ degré à une inconnue

Résoudre une inéquation, c'est trouver toutes les solutions de l'inéquation.
Généralement, les solutions d'une inéquation du premier degré à une inconnue sont données :
- sous forme d'intervalles ;
- sur une droite graduée en précisant la partie solution.

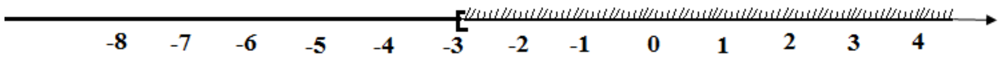
4.1 Inéquations du type $x < u$ ou $x > u$

Si une inéquation est du type $x < u$, ses solutions sont les nombres plus petits que u.
De même, si une inéquation est du type $x > u$, ses solutions sont les nombres plus grands que u.

Exemple
Soit l'inéquation(I) : $x < -3$.

- Citons sept solutions de l'inéquation (I), puis représentons sur une droite graduée, toutes les solutions de (I).
  . Les solutions de (I) sont les nombres qui sont plus petits que -3. Il suffit de choisir parmi tous les nombres plus petits que -3 sept nombres.
  Par exemple : -17 ; -12 ; -6 ; -4 ; -5 ; -8 ; -15.
  (Une autre personne choisira d'autres nombres plus petits que -3 et aura raison).

Représentons toutes les solutions de (I) sur une droite graduée .



Les solutions de (I) sont dans la partie non hachurée de la droite graduée.

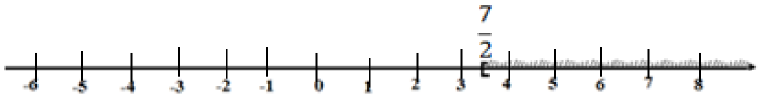
4.2 Inéquations du type $x + a < b$

Pour résoudre une inéquation du type $x + a < b$, on la transforme en ajoutant l'opposé de a aux deux membres de l'inéquation pour la ramener au type $x < u$ ou $x > u$.

Exemple
Résolvons l'inéquation (I) $x - 4 < -\frac{1}{2}$ et représentons ses solutions sur une droite graduée.

- On pose l'inéquation (I) : $x - 4 < -\frac{1}{2}$.
- On ajoute l'opposé de (-4) aux deux membres de l'inéquation.
  On a :
  $x - 4 + 4 < -\frac{1}{2} + 4$
  $x + 0 < \frac{7}{2}$.
  Donc $x < \frac{7}{2}$.

Tous les nombres plus petits que $\frac{7}{2}$ sont les solutions de (I).
On les représente sur une droite graduée.



Les solutions de (I) sont dans la partie non hachurée.

Exercices

1. Résous les inéquations suivantes :
   $x + 4 > - 2$; $1 + x < \frac{4}{5}$; $23 < 54 + x$; $x - \frac{4}{3} < \frac{1}{4}$.
2. Résous l'inéquation suivante et cite cinq nombres solutions et cinq nombres qui ne sont pas solutions : $x + 18 < 18$

4.3 Inéquations du type $ax < b$. ($a \neq 0$)

Pour résoudre l'inéquation du type ax < b, on la transforme pour la ramener à une inéquation du type x < u ou x > u.

Exemples

1) Résolvons l'inéquation $3x < -5$.

- On pose l'inéquation $3x < -5$.
- On multiplie les deux membres de l'inéquation par l'inverse de 3.

On a : $3x \times \left(\frac{1}{3}\right) < (-5) \times \left(\frac{1}{3}\right)$

- On simplifie l'écriture de chaque membre. On a :

$3x \times \frac{1}{3} < -\frac{5}{3}$.
Donc $x < -\frac{5}{3}$.

2) Résolvons l'inéquation $-5x < \frac{4}{3}$:

- On pose l'inéquation $-5x < \frac{4}{3}$
- On multiplie chaque membre de l'inéquation par l'inverse de -5. On a :

$(-5x) \times (\frac{1}{-5}) > (\frac{1}{-5}) \times (\frac{4}{3})$. Le sens de l'inégalité change parce qu'on a multiplié les deux membres de l'inéquation par un nombre négatif $(-\frac{1}{5})$.
On obtient donc :
$-5 \times \left(\frac{1}{-5}\, x\right) > \left(\frac{4}{-15}\right)$. Donc $x > -\frac{4}{15}$.
Tous les nombres plus grands que $-\frac{4}{15}$ sont les solutions de l'inéquation.

Exercice
Résous les inéquations suivantes :
$-3x < -15$; $11x < -253$; $-\frac{4}{3}x > 6$; $5x < -\frac{5}{7}$; $-\frac{12}{17}x > -\frac{35}{34}$.

4.4 Inéquations du type $ax + b < c$ ($a \neq 0$)

La procédure de résolution de ce type d'inéquations consiste à transformer une 1ère fois l'inéquation pour la ramener au type $ax < t$ puis, une 2nd fois pour la ramener aux types $x < u$ ou $x > u$.

Exercice

Résous les inéquations suivantes :

$7x - 2 > 1$; $8 - x < 6$; $-\frac{4}{7}x + 1 < -\frac{5}{2}$.

4.5. Inéquations du type *ax + b < cx + d*

Par transformations successives, l'inéquation du type : $ax + b < cx + d$ peut se ramener à l'inéquation $x < u$ ou $x>u$

Exemple

Résolvons l'inéquation : $4x - 1 < 6x - 4$.

- On pose l'inéquation : $4x - 1 < 6x - 4$.
- On ajoute par exemple l'opposé de 6x aux deux membres de l'inéquation.

On a :

$$4x - 1 + (-6x) < 6x - 4 + (-6x).$$
$$-2x - 1 < 0 - 4.$$
$$-2x - 1 < -4.$$

On trouve une inéquation du type $ax+b < c$.

On ajoute l'opposé de (-1) aux deux membres de l'inéquation. On a :

$$-2x - 1 + 1 < -4 + 1$$
$$-2x + 0 < -3$$
$$-2x < -3.$$

On obtient une inéquation du type $ax < b$.

On multiplie les deux membres de l'inéquation par l'inverse de -2. On a :

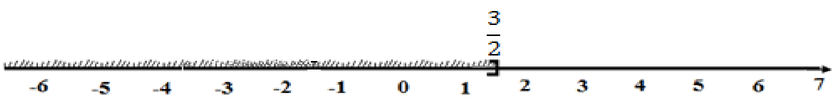
$(-2x)\times(-\frac{1}{2}) > (-3)\times(-\frac{1}{2})$.

Le sens de l'inégalité change parce qu'on a multiplié les deux membres de l'inéquation par un nombre négatif.

Finalement, on obtient :

$(-2)\times(\frac{1}{-2}x) > \frac{3}{2}$. Donc $x > \frac{3}{2}$.

Tous les nombres plus grands que $\frac{3}{2}$ sont les solutions de l'inéquation. Sur une droite graduée, on a :



Exercice

Résous les inéquations suivantes :

$3x + 5 < 5x - 6$; $\frac{3x}{25} + \frac{2}{5} > 3,375 - \frac{9x}{5}$; $\frac{-5}{7}x + \frac{4}{3} > \frac{6}{21} + \frac{2}{3}x$.

5 Résolution des problèmes se ramenant à des inéquations du premier degré à une inconnue

Méthode

Pour résoudre un problème se ramenant à une inéquation, on procède :

- *au choix de l'inconnue que l'on peut désigner par une lettre : x, y, z,…. ;*
- *à la mise en inéquation en suivant scrupuleusement l'énoncé du problème ;*
- *à la résolution de l'inéquation posée ;*
- *à la vérification en revenant aux données du problème.*

Exercice

Tu disposes d'une somme de 2500F. Combien peux-tu acheter, au maximum, de cahiers qui coutent chacun 470F ?

Exercices

1) Pour chaque inéquation, représente l'ensemble des solutions sur une droite graduée :

a) $3x < 6$; b) $-7x > 14$; c) $x - 4 > -7$; d) $5 - x > 5$.

2)

a) Pour chacune des inéquations suivantes, donne trois nombres qui sont solutions de l'inéquation considérée et trois autres nombres qui n'en sont pas.
   - $x - 3 > 5$
   - $3 + x \leq \frac{5}{3}$
   - $2x \leq 11$
   - $\frac{4}{5}x > -\frac{5}{7}$.

b) Pour chaque inéquation, représente sur une droite graduée l'ensemble des valeurs solutions.

3) Tu as acheté une lampe torche à 1200 F et deux paquets de sucre au marché. x désigne le prix d'un paquet de sucre (en francs). Exprime le coût total en fonction de x. Tu te rappelles avoir dépensé moins de 3500 F. Ecris l'inéquation correspondant à cette situation. Résous l'inéquation obtenue.

4) Pour chacune des inéquations suivantes, trouve trois nombres qui sont solutions et deux autres nombres qui ne sont pas solutions :

a) $2x + 3 < 4x + 5$; b) $\frac{5}{6}x + 2 < 1$;

c) $\frac{6}{5}x - \frac{1}{3}. < 5$; d) $3(7x - 4) > 9 + 18x$.

5) Adoum possède x francs. Sa sœur Rose en possède quatre fois plus. Si Rose donnait à Adoum 30F, elle ne serait pas ruinée mais elle serait plus pauvre que Adoum.

A quel intervalle appartient x ?

6) Pour la préparation d'une fête entre élèves, la somme de 1350F a été donnée pour l'achat des arachides grillées. Le prix d'un kilogramme d'arachides grillées est 175F.

Combien de kilogrammes d'arachides grillées peut-on au maximum acheter ?

7) Un terrain carré est entouré d'une allée de 0,8m de large. L'aire de l'allée est 29m².

a) Calcule la longueur x du côté de ce terrain. Encadre x par deux décimaux écrits sous la forme $a \times 10^{-1}$ et $(a + 1) \times 10^{-1}$ où a est un entier naturel.

b) Calcule l'aire de ce terrain et encadre cette aire comme à la question a).

8) Aujourd'hui, l'âge du père de Francis est exactement égal au produit de l'âge de Francis par $\frac{11}{4}$.

Dans 12 ans, l'âge du père sera supérieur ou égal au double de l'âge de Francis. Mais dans 15 ans, l'âge du père sera inférieur ou égal au double de l'âge de Francis.

Encadre l'âge de Francis.

Chapitre 24 : Symétrie centrale

Objectifs

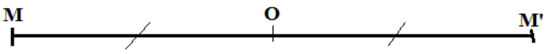
- Définir l'application du plan en utilisant la notation f(M) = M' ;
- définir une symétrie centrale ;
- dresser le tableau de correspondance ;
- justifier qu'une symétrie centrale est une application ;
- utiliser un tableau de correspondance ;
- utiliser les propriétés de la symétrie centrale pour démontrer et pour construire ;
- mettre en évidence une symétrie centrale et l'utiliser pour démontrer ou pour construire.

1 Définition de l'application du plan : f(M)= M'

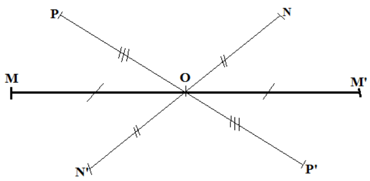
Une relation f qui à tout point M du plan (P) associe un unique point M' du même plan (P) est appelée application du plan (P).
Si par f on fait correspondre à un point M le point M', on écrit :
f(M) = M'.
M est l'antécédent par f de M'
M'est l'image par f de M ;
f est une application de (P) dans (P).
On note :
f : (P) → (P)
M↦ M' ou f(M) = M'.

2 Définition d'une symétrie centrale

Définition
O est un point du plan.
On appelle symétrie centrale de centre O l'application du plan qui, à tout point M du plan, associe l'unique point M' tel que O est milieu du segment [MM'].



Les points M et M' sont symétriques l'un de l'autre.
Le centre O est son propre symétrique par la symétrie centrale de centre O.
NB :
Par une symétrie centrale, à chaque point M du plan on fait correspondre un seul point M' du plan. Une symétrie centrale est donc une application du plan.



Une symétrie centrale de centre O est notée S_o.
Ainsi S_o(M) = M'

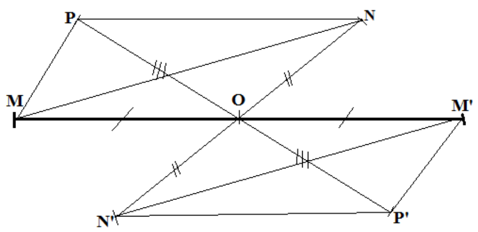
3 Tableau de correspondance d'une symétrie centrale

Activité 2

a) Fixe un point O du plan. On désigne par S_O la symétrie de centre O ;
b) Place quatre points A, B, C et D tous distincts de O et construis les symétriques respectifs A’, B’, C’ et D’ de chacun de ces points par la symétrie de centre O.
c) Dresse un tableau à deux colonnes ayant dans la première colonne les points antécédents A, B, C et D et dans la seconde colonne les points images A’, B’, C’ et D’.

Règle
Par une symétrie centrale de centre O, on peut faire correspondre à chaque point M du plan un unique symétrique M’.
Le tableau à deux colonnes qui contient dans la colonne de gauche les points antécédents et dans la seconde colonne de droite les points images est appelé tableau de correspondance.

So	
M	**M’**
P	**P’**
N	**N’**



4 Propriétés des symétries centrales
Propriétés
Par une symétrie centrale,
- *les images des points alignés sont alignées ;*
- *l’image d’une demi-droite est une demi-droite ;*
- *l’image d’une droite est une droite ;*
- *les images de deux droites parallèles sont des droites parallèles ;*
- *les images de deux droites sécantes sont des droites sécantes ;*
- *l’image d’un cercle est un cercle de même rayon ;*
- *l’image d’un angle est un angle de même mesure ;*
- *l’image d’un segment est un segment de même mesure ;*
- *les images de deux droites perpendiculaires sont des droites perpendiculaires.*

Exercice
O est un point fixe du plan.
1) Place deux points A et B du plan distincts de O et trace la droite (AB).
2) Construis la droite (A’B’) image de (AB) par la symétrie de centre O.

5 Utilisation du tableau de correspondance

Méthode
A partir d’un tableau de correspondance d’une symétrie centrale, on peut déterminer les images des droites, des segments, des milieux et médiatrices des segments….

6 Utilisation des symétries centrales pour démontrer et construire
Méthode
On peut utiliser les symétries centrales pour démontrer :
– *que des points sont alignés ;*

- *que deux segments ont même longueur ;*
- *que deux angles ont même mesure ;*
- *que deux droites sont parallèles, sécantes, perpendiculaires ;*
- *qu'un point est milieu d'un segment….*

Méthode
On peut utiliser les symétries centrales pour construire des points et des figures.
Exercice
ABC est un triangle.

1) Marque un point D du segment [BC] et place le point I milieu de [AB].
2) Construis les points E et F tels que I est milieu de [ED] et milieu de [FC].
3) Démontre que les points A, E et F sont alignés.

Exercices
1) Les chiffres et les lettres suivants ont- ils un centre de symétrie ? Si oui, précise-le.
8 9 L M K A Z

2) ABC est un triangle isocèle de sommet A et O un point du plan distinct de A, B et C. Construis le symétrique du triangle ABC par la symétrie de centre O. Quelle est sa nature ?

3) ABC est un triangle et M est le milieu de [BC]. D est l'image de A par la symétrie de centre M. Complète le tableau de correspondance ci-dessous :

S_M	
A	
B	
C	
D	
M	
(AB)	
(AC)	
(AD)	

4) ABCD est un rectangle de centre O. Complète le tableau de correspondance suivant de la symétrie de centre O.

S_O	
A	
B	
C	
D	
O	
(AB)	
(CD)	
(AD)	
(BC)	

5) ABC est un triangle isocèle en A. Les points D et E sont les images respectives des points B et C par la symétrie de centre A.
Démontre que le quadrilatère BCDE est un rectangle.

6) ABCD est un rectangle. E est l'image de A par la symétrie S_D et F est l'image de B par S_C.

a) Démontre que (EF) est l'image de la droite (AB) par la symétrie orthogonale d'axe (DC). Justifie que ABFE est un rectangle.
b) Démontre que le centre O du rectangle ABFE appartient à (DC).

7) ABC est un triangle et M est le milieu de [BC]. Le point D est le symétrique de B par rapport à A et le point N est le symétrique de M par rapport à A.
a) Démontre que ND = MC.
b) Démontre que le quadrilatère CDNM est un parallélogramme.

8) ABCD est un parallélogramme et M, le milieu de [BC]. Le symétrique de A par la symétrie de centre M est E. Montre que C est le milieu de [DE].

9) (C) est un cercle et E, un point de ce cercle. Construis un carré EFGH inscrit dans le cercle (C).

10) (D) et (D') sont deux droites et O un point situé ni sur (D) ni sur (D').
Construis un point M de (D) et un point N de (D') de sorte que O soit milieu de [MN].

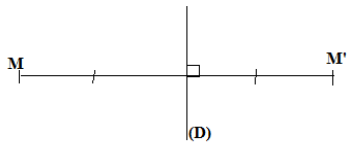
Chapitre 25 : Symétrie orthogonale

Objectifs

- Définir une symétrie orthogonale ;
- dresser le tableau de correspondance ;
- justifier qu'une symétrie orthogonale est une application ;
- utiliser un tableau de correspondance ;
- utiliser les propriétés de la symétrie orthogonale pour démontrer et pour construire ;
- mettre en évidence une symétrie orthogonale et l'utiliser pour démontrer ou pour construire.

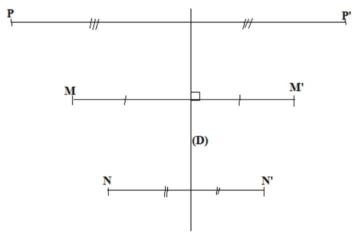
1 Définition d'une symétrie orthogonale

Définition
(D) est une droite du plan.
On appelle symétrie orthogonale d'axe (D) l'application du plan qui, à tout point M du plan, associe l'unique point M' tel que (D) est médiatrice du segment [MM'].



Les points M et M' sont symétriques l'un de l'autre. Tous les points de l'axe de symétrie (D) sont leurs propres symétriques par la symétrie orthogonale d'axe (D).

<u>NB :</u>
Par une symétrie orthogonale, à chaque point M du plan on fait correspondre un seul point M' du plan. Une symétrie orthogonale est donc une application du plan.

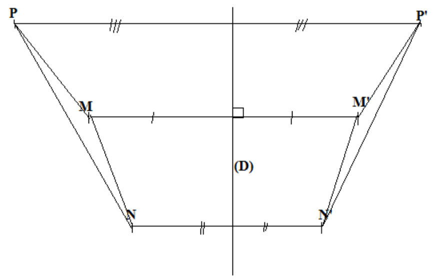


Une symétrie orthogonale d'axe (D) est notée $S_{(D)}$.
Ainsi $S_{(D)}$(M) = M'

2 Tableau de correspondance d'une symétrie orthogonale

Règle
Par une symétrie orthogonale d'axe (D), on peut faire correspondre à chaque point M du plan un unique point symétrique M'.
Le tableau de deux colonnes qui contient dans la colonne de gauche les points antécédents et dans la colonne de droite les points images est appelé tableau de correspondance de la symétrie orthogonale.

S(D)	
M	**M'**
P	**P'**
N	**N'**



3 Propriétés des symétries orthogonales

Propriétés

Par une symétrie orthogonale d'axe (D) donné,

- *les images des points alignés sont des points alignés ;*
- *l'image d'une demi-droite est une demi-droite ;*
- *l'image d'une droite est une droite ;*
- *les images de deux droites parallèles sont des droites parallèles ;*
- *les images de deux droites sécantes sont des droites sécantes ;*
- *l'image d'un cercle est un cercle de même rayon ;*
- *l'image d'un angle est un angle de même mesure ;*
- *l'image d'un segment est un segment de même longueur ;*
- *les images de deux droites perpendiculaires sont des droites perpendiculaires.*

Exercice

(D) est une droite du plan.

1) Place deux points A et B distincts du plan et non situés sur (D) puis trace la droite (AB).
2) Construis la droite (A'B') image de (AB) par la symétrie orthogonale d'axe (D).

4 Utilisation du tableau de correspondance

Méthode

A partir d'un tableau de correspondance d'une symétrie orthogonale, on peut déterminer les images des droites, des segments, des milieux et médiatrices des segments….

5 Utilisation des symétries orthogonales pour démontrer et construire

Activité 5

a) ABC est un triangle isocèle en A. Marque le point I milieu de sa base [BC].
b) Construis une droite (D) perpendiculaire à la droite (AI). (D) coupe la droite (AB) en un point M et la droite (AC) en N.
c) Démontre que (AI) est médiatrice du segment [MN].

Méthode

On peut utiliser les symétries orthogonales pour démontrer :

- *que des points sont alignés ;*
- *que deux segments ont même longueur ;*
- *que deux angles ont même mesure ;*
- *que deux droites sont parallèles, sécantes, perpendiculaires ;*
- *qu'un point est milieu d'un segment ;*
- *qu'une droite est médiatrice d'un segment…*

Méthode
On peut utiliser les symétries orthogonales pour construire des points et des figures.

Exercice
ABCD est un trapèze rectangle tel que (AD) est perpendiculaire à (AB) et à (DC). On désigne par $S_{(DC)}$ la symétrie orthogonale d'axe (DC) et par $S_{(AD)}$ la symétrie orthogonale d'axe (AD).
On donne : $S_{(DC)}$(B) = E et $S_{(DC)}$(A) = F puis $S_{(AD)}$(C) = G, $S_{(AD)}$(E) = H.

1) Montre que D est le milieu de [BH].
2) Quelle est la nature du quadrilatère ABFH ?

Exercices

1) ABCD est un trapèze isocèle de bases [AB] et [DC]. (D) est la médiatrice commune aux bases.

a) M et N sont les milieux respectifs des côtés [AD] et [BC]. Justifie que l'image de M par la symétrie orthogonale d'axe (D) est le point N.
b) La droite parallèle à (BC) et passant par M coupe (D) en K. Justifie que (NK) est parallèle à (AD).

2) A et B sont deux points du plan tels que AB = 4cm. (C) est le cercle de centre A et de rayon r = 2,5cm ; (C') est le cercle de centre B et de rayon r' = 2,5cm. (C) et (C') se coupent en E et F. Montre que le point B est l'image de A par la symétrie orthogonale d'axe (EF).

3) ABCD est un carré de centre O. (C) est le cercle de centre B et de rayon AB ; (C') est le cercle de centre D et de rayon AB.
Recopie et complète les tableaux suivants :

$S_{(BD)}$	
A	
B	
C	
D	
(C)	
(C')	

$S_{(AC)}$	
A	
B	
C	
D	
(C)	
(C')	

4) ABC est un triangle isocèle de sommet A. (D) est la médiatrice de [BC]. La droite perpendiculaire à (AB) qui passe par B coupe (D) en M.
Démontre que (CM) est perpendiculaire à (AC).

5) [AB] est un segment et (D), sa médiatrice.

a) Construis deux points E et F de (D) tels que (AB) soit médiatrice de [EF].
   Quelle est la nature du quadrilatère AEBF ?
b) P est un point du segment [AF] distinct de A et de F, Q est l'image de P par la symétrie orthogonale d'axe (D).
   Démontre que Q, F et B sont alignés.
   Quelle est la nature du quadrilatère ABQP ?

6) RST est un triangle rectangle en R ; le point O est le milieu de [ST], A est l'image de R par la symétrie orthogonale d'axe (ST) et K l'image de A par la symétrie de centre O.

a) Quelle est l'image par $S_{(ST)}$ du triangle RST ?
b) Quelle est la nature du quadrilatère ASKT ?
c) Démontre *que* les points A, S, T, K et R sont situés sur le même cercle.

7) (D) est une droite, A et B sont deux points distincts du plan. S est la symétrie orthogonale d'axe (D). Montre que si M est le milieu du segment [AB] alors S(M) est milieu du segment [S(A)S(B)].

8) (C) est un cercle de centre O ; A, B, C et D sont quatre points distincts du cercle (C) tels que (AB) et (CD) sont parallèles.
Montre que AD = BC et AC = BD.

Chapitre 26 : Vecteurs – translations et parallélogrammes

Objectifs

- Reconnaître la direction d'une droite et les sens liés à cette direction ;
- reconnaître deux vecteurs égaux ;
- utiliser l'égalité de deux vecteurs pour démontrer :
  - qu'un quadrilatère est un parallélogramme,
  - que deux segments ont même longueur,
  - que deux droites sont parallèles,
  - qu'un point est milieu d'un segment ;
- définir une translation ;
- construire l'image d'un point par une translation ;
- justifier qu'une translation est une application du plan ;
- mettre en évidence une translation et l'utiliser pour démontrer ou pour construire.

1 Vecteurs

Définition

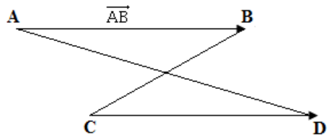
A et B sont deux points du plan.

L'ensemble de tous les couples de points (C, D) du plan tels que les segments [AD] et [BC] aient même milieu est appelé vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Il est caractérisé par :

- *une direction : la droite (AB) et toutes les droites parallèles à (AB) ;*
- *un sens : de A vers B ;*
- *une norme : la longueur du segment [AB].*

Un vecteur $\overrightarrow{AB}$ est généralement noté $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ etc. On écrit $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$



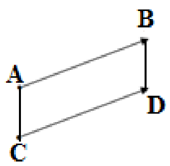
<u>NB :</u> Si le point A coïncide avec le point B, c'est-à-dire A = B, on dit que le vecteur $\overrightarrow{AA}$ est nul et on note $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$.

Le vecteur $\overrightarrow{AA}$ n'a ni direction ni sens mais sa norme est égale à zéro.

2 Egalité de vecteurs

Propriétés

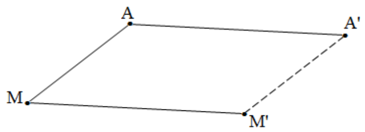
1) *Deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux si le quadrilatère ABDC est un parallélogramme.*



Si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ alors ABDC est un parallélogramme.

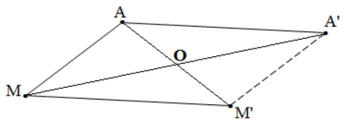
2) *A, A', M et M' sont quatre points non alignés.*

$\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{MM'}$ *signifie A A' M'M est un parallélogramme.*

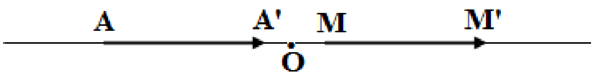


3) *A, A', M et M' sont quatre points du plan.*

$\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{MM'}$ *équivaut à [AM'] et [A'M] ont le même milieu.*



NB : Lorsque les points A, A', M et M' sont tous alignés, on parle de parallélogramme aplati.



Exercice

Trace un triangle ABC et un vecteur $\vec{u}$.

a) Construis A', B' et C', images des points A, B et C par la translation du vecteur $\vec{u}$.

b) Avec les points de la figure, écris tous les vecteurs égaux à $\vec{u}$.

c) Déduis-en une liste de trois parallélogrammes.

d) Cite un vecteur égal à $\overrightarrow{AC}$ et un vecteur égal à $\overrightarrow{CB}$.

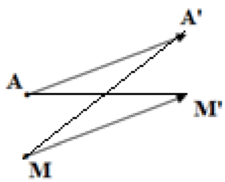
3 Translation

Définition

Soit (A,A') un couple de points du plan et M un point de ce plan.

On appelle image du point M par la translation de vecteur $\overrightarrow{AA'}$ *le point M' tel que les segments [AM'] et [A'M] aient même milieu.*

On note $t_{\overrightarrow{AA'}}$ *(M) = M' alors* $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AA'}$.

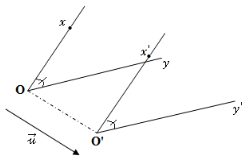


Propriété

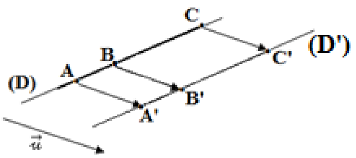
A, A', M, M' sont des points du plan.

L'image de M par la translation $t_{\overrightarrow{AA'}}$ *(translation de vecteur* $\overrightarrow{AA'}$*) est M' équivaut à* $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AA'}$.

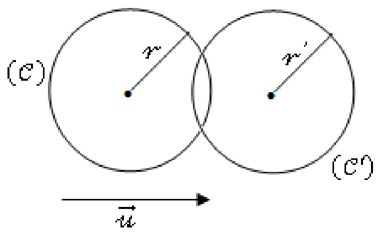
Exercice :
On considère une droite (D) du plan, les points A, B et C appartenant à la droite (D).
Soit P un point du plan n'appartenant pas à (D).
a) Construis les points A', B' et C' images respectives de A,B et C par la translation $t_{\overrightarrow{AP}}$ .Où est situé le point A'?
b) Que peux-tu dire des points P, B' et C' ?
c) Identifie les vecteurs égaux.



4 Images par une translation



Propriétés
Par une translation de vecteur $\vec{u}$:
1) Des points alignés ont pour images des points alignés;
2) Une droite a pour image une droite de même direction ;
3) Un segment a pour image un segment de même longueur.
On dit que la translation conserve les distances.
4) Si l'angle $\widehat{x'o'y'}$ est l'image de l'angle $\widehat{xoy}$, on a :
$mes\widehat{xoy} = mes\widehat{x'o'y'}$.
On dit que la translation conserve les mesures d'angles.
5) L'image d'un cercle de rayon r est un cercle de même rayon r.

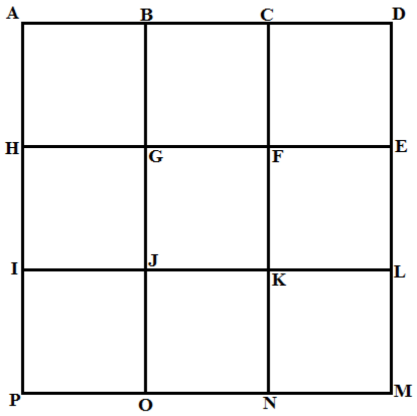


Exercice
On considère un triangle ABC quelconque.
a. Construis le point H pied de la hauteur issue du sommet A.
b. Construis les points D et E tels que $t_{\overrightarrow{AH}}$(C) = D et $t_{\overrightarrow{AH}}$(B) = E.
c. Quelle est l'image du triangle ABC par la translation du vecteur $\overrightarrow{AH}$?
d. Construis les hauteurs (CK) et (BF) de ce triangle ABC.

e. A l'aide d'une équerre non graduée, construis les droites (L_1) et (L_2), images respectives de (CK) et de (BF) par $t_{\overrightarrow{AH}}$.
f. Démontre que les droites (L_1) et (L_2) sont concourantes.

5 Translation et application du plan

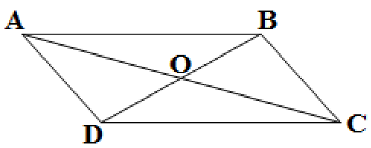
<u>Cas pratique</u>
On considère la figure suivante :



t	
H	
G	
F	
I	
J	
K	
O	
N	
P	

a) On donne $\vec{u} = \overrightarrow{PJ}$.
Par la translation du vecteur $\vec{u}$, quelles sont les images des points H, K et O ?
b) Quelle est l'image du triangle IGK par $t_{\vec{u}}$?
c) Considérons la translation $t_{\vec{u}}$ comme une relation du plan :
- Peut-on trouver des points du plan qui aient plusieurs images différentes par cette translation ?
- Complète la phrase suivante :

La translation est une correspondance qui, à chaque … du plan, associe un … du plan et …
Propriété
Une translation est une application du plan dans le plan.
Exercice
On donne le parallélogramme ABCD de centre O.



t	
O	B
A	E
B	F
C	G
D	..

t est la translation qui applique O sur B. Reproduis la figure et construis les points E, F et G.
Quelle est l'image de D par la translation t ?
Exercices
1) Construis un triangle ABC, puis le symétrique D de B par rapport à A et le symétrique E de C par rapport à A.
Compare les vecteurs $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{CD}$.

2) Trace un triangle ABC et construis les points M et N tels que $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{NC} = \overrightarrow{AB}$ Explique.

3) Les points A, B, C et D appartiennent à un cercle de rayon 2cm. On note I le milieu de [AB], J celui de [BC], E le symétrique de D par rapport à J.

a) fais une figure illustrant cet énoncé ;

b) compare les vecteurs $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{DB}$ et $\overrightarrow{CF}$;

c) quel est, en cm, le rayon du cercle circonscrit au triangle BEF ?

4) Soit ABC un triangle isocèle de sommet principal A inscrit dans un cercle $(\mathcal{C})$ de centre O.

a. construis les images A', C', O' et $(\mathcal{C}')$ des points A, C, O et du cercle $(\mathcal{C})$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$;

b. démontre que (AA') est tangente aux cercles $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$

5) Dans un triangle DMP, on désigne par A, B, N et I les milieux respectifs de [DM], [DP], [MP] et [AB].

Démontre que :

a) Les droites (BN) et (DM) sont parallèles, ainsi que (AN) et (BD).
b) $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BN}$.
c) Les points D, I et N sont alignés.

6) Etant donné un triangle ABC ; on pose $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.

Construis les points D, E, F, G, H et I définis par :

D = $t_{\vec{u}}$(B) ; E = $t_{\vec{u}}$(C) ; F = $t_{\vec{v}}$(C) ;

G = $t_{\vec{v}}$(E) ; H = $t_{\vec{v}}$(D) ; I = $t_{\vec{u}}$(G) .

Trouve les parallélogrammes de la figure. Justifie.

7) On donne un triangle ABC, le point K milieu de [AC] et la hauteur [AH].

a) Construis les points M et N images respectives de B et C par $t_{\overrightarrow{AH}}$. Démontre que le quadrilatère BCNM est un rectangle.

b) Construis la droite (L) image de la droite (AH) par $t_{\overrightarrow{HK}}$. Démontre que la droite (L) est la médiatrice de (AH).

8) On donne un triangle ABC, le point M milieu du côté [AC] et le point D image de A par la symétrie de centre B.

a) Construis le point E image de M par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

b) Démontre que les quadrilatères ABEM ; BDEM et BECM sont des parallélogrammes.

c) Démontre que le point E est milieu du segment [BC].

Chapitre 27: Somme de vecteurs
Objectifs

- Construire la somme de deux vecteurs ;
- utiliser l'égalité de Chasles ;
- calculer de manière performante la somme de plusieurs vecteurs ;
- reconnaître le vecteur nul ;
- déterminer l'opposé d'un vecteur ;
- utiliser les caractérisations vectorielles du milieu d'un segment.

1 Construction de la somme de deux vecteurs

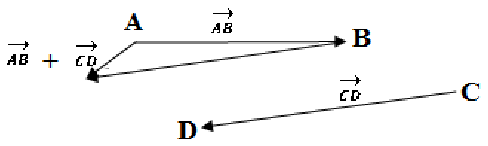
Activité 1

a) Place trois points distincts A, B et C du plan.
Construis les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ et leur somme $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$.
b) Place quatre points distincts D, E, F et G.
Construis les vecteurs $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{FG}$ et leur somme $\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{FG}$.

Règle
A, B et C sont trois points distincts du plan.
Le vecteur $\overrightarrow{AC}$ est la somme des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$.
La relation $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ est appelée égalité de Chasles.

Méthode
Pour construire la somme de deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$,

- *on construit le vecteur $\overrightarrow{AB}$;*
- *on construit le vecteur $\overrightarrow{CD}$ de sorte que le point C coïncide avec le point B.*
- *on construit enfin le vecteur $\overrightarrow{AD}$ comme somme des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$.*



Exercice :
ABCD est un parallélogramme.
Construis les sommes des vecteurs $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}$; $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA}$.

2 Calcul de la somme de plusieurs vecteurs

Activité 2

a) Place quatre points distincts A, B, C et D du plan.
b) Calcule la somme $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC}$ puis construis cette somme.

Règle
Pour calculer la somme de plusieurs vecteurs, on peut déplacer et regrouper certains vecteurs.

Exercice

Calcule $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{DF} + \overrightarrow{EF}$; $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{CA}$.

3 Opposé d'un vecteur, vecteur nul

Activité 3

A et B sont deux points distincts du plan.

Construis le vecteur $\overrightarrow{AB}$ et calcule la somme $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA}$.

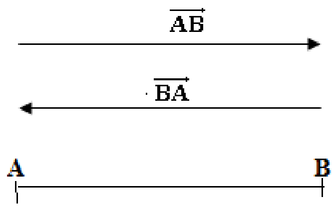
Définition

A et B sont deux points distincts du plan. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA}$.

Le vecteur $\overrightarrow{AA}$ *est appelé le vecteur nul.*

On note $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$

Et comme $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$, *on dit que les vecteurs* $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{BA}$ *sont opposés et on note* $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$.



NB :

Deux vecteurs opposés ont la même direction, la même longueur mais des sens opposés.

4 Caractérisation vectorielle du milieu d'un segment

Activité 4

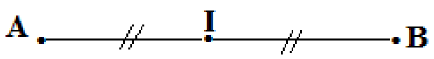
A et B sont deux points distincts du plan.

a) Construis le milieu I du segment [AB] et colorie les vecteurs $\overrightarrow{IA}$ et $\overrightarrow{IB}$ par deux couleurs différentes.
b) Calcule la somme $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}$.

Propriété :

A, B et I sont trois points distincts du plan.

Si le point I est milieu du segment [AB] alors $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$.



Si $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$ *alors I est milieu de [AB].*

Exercice

ABCD est un parallélogramme de centre O. Démontre que $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$.

Exercices

1) A, B et C sont trois points non alignés du plan.

Construis les points D, E et K du plan vérifiant :

a) $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.

b) $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BE}$.
c) $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CK}$.

2) A, B et C sont trois points non alignés du plan. Construis les points D et E qui vérifient chacun :
$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AC}$.

3) A, B et C sont trois points non alignés du plan.
Construis les point D, E et K vérifiant chacun :

a) $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}$.
b) $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}$.
c) $\overrightarrow{CK} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BE}$.

4) ABCD est un carré de centre O.

a) Construis le point E tel que $\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}$.
b) Construis le point G tel que $\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC}$.

5) Complète les égalités suivantes en utilisant la relation de Chasles :

a) $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MK} = \ldots$.
b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B\ldots} = \overrightarrow{AM}$
c) $\overrightarrow{K\ldots} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{KC}$.
d) $\overrightarrow{\ldots M} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{K\ldots}$
e) $\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{\ldots K} + \overrightarrow{K\ldots}$
f) $\overrightarrow{B\ldots} = \overrightarrow{\ldots K} + \overrightarrow{\ldots A}$.

6) ABCD est un parallélogramme. Donne une expression plus simple des vecteurs suivants :

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$.
b) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$.
c) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.
d) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DA}$.

7) T, C et H sont trois points non alignés du plan. Construis les points A et D vérifiant :
$\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CT} + \overrightarrow{CH}$ et $\overrightarrow{HD} = \overrightarrow{HT} + \overrightarrow{HC}$.

8) ABC est un triangle. Construis les points M, N et P tels que :
$\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CN} = \overrightarrow{AB}$.

a) Démontre que $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{MN}$.
b) Démontre que $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CN} + \overrightarrow{BC}$.

9) ABC est un triangle et K un point intérieur du segment [BC].
Construis les points M et N vérifiant :
$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AK} + \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AK} + \overrightarrow{AC}$.

a) Démontre que $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{BM}$.
b) Démontre que $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{MN}$.

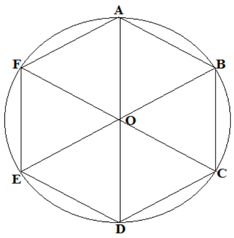
10) A, B et C sont trois points non alignés du plan.

1) Construis les points D et E vérifiant :
$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AC}$.
2) Démontre que C est le milieu de [DE].

11) Effectue les sommes vectorielles suivantes :

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{BC}$.
b) $\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{QM} + \overrightarrow{RQ}$.
c) $\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{JK} + \overrightarrow{IJ}$.
d) $\overrightarrow{KE} + \overrightarrow{IK} + \overrightarrow{EF}$.
e) $\overrightarrow{RS} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{SA}$.
f) $\overrightarrow{KL} + \overrightarrow{LR} + \overrightarrow{BK}$.

12) A, B, C, D, E et F sont six points d'un cercle de centre O et de rayon R tels que :
AB = BC = CD = DE = EF = FA = R



a) Démontre que :
$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB}$; $\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OE}$ et $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OE} = \vec{O}$.
b) Déduis-en que $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF} = \vec{O}$.

Chapitre 28 : Organisation des données (collecte des informations, tableau des effectifs)

Objectifs

- Collecter des données ;
- organiser des données ;
- calculer les fréquences en pourcentage.

1 Vocabulaire statistique

Vocabulaire

Population : c'est l'ensemble sur lequel porte l'enquête.
Exemples :
Pour l'activité 1, ce sont les 30 familles du quartier Gardolé de N'djamena.
Pour l'activité 2, ce sont les 45 élèves de la classe de quatrième A du lycée Félix Eboué.
Individu : c'est un élément de la population.
Exemples
Pour l'activité 1, c'est une famille quelconque parmi les 30 familles du quartier Gardolé de N'djamena.
Pour l'activité 2, c'est un élève quelconque de la classe de quatrième A du lycée Félix Eboué.
Effectif total : c'est le nombre total des individus d'une population étudiée.
Exemples
Pour l'activité 1, c'est le nombre 30 (familles).
Pour l'activité 2, c'est le nombre 45 (élèves).
Caractère étudié : c'est l'objet de l'enquête ou de l'étude.
Exemple
Pour l'activité 1, c'est la consommation de riz en Kg.
Pour l'activité 2, c'est la couleur des tenues de sport.
Le caractère étudié peut être :

- *quantitatif si les réponses données à la question d'enquête sont des nombres.*

Exemple de l'activité 1 où la consommation de riz est donnée en nombre de Kg.

- *qualitatif si les réponses données à la question d'enquête ne sont pas des nombres.*

Exemple de l'activité 2 où les couleurs sont verte, bleue, jaune, …

Modalités : ce sont les différentes réponses obtenues. Elles peuvent être des nombres comme pour l'activité 1(caractère quantitatif) où les réponses sont : 15Kg ; 20Kg ;…. Ou bien elles ne sont pas des nombres comme pour l'activité 2 où les réponses sont : bleu ; jaune ; vert….

NB :
A une modalité donnée, on peut faire correspondre l'effectif d'individus ayant cette modalité.

Exercice
On a relevé l'âge des élèves d'une classe de quatrième du lycée de N'Djari à N'Djaména :
Trois élèves ont quatorze ans ; treize élèves ont quinze ans ; sept élèves ont seize ans et deux élèves ont dix-sept ans.

a) Le caractère étudié est-il qualitatif ou quantitatif ?
b) Quel est l'effectif correspondant à la modalité quinze ?

2 Tableaux des effectifs et des fréquences

Tableau des effectifs
Un tableau des effectifs d'une enquête est un tableau à deux colonnes comportant dans la première colonne les modalités et dans la seconde colonne les effectifs respectifs des différentes modalités.
Exercice
Etablis le tableau des effectifs de l'activité 2.

Définition de la fréquence d'une modalité
La fréquence d'une modalité est le quotient de l'effectif de la modalité par l'effectif total.
Une fréquence peut être exprimée sous forme :
- ✓ *d'une fraction ;*
- ✓ *d'un nombre décimal ;*
- ✓ *d'un pourcentage.*

Tableau des fréquences
Un tableau des fréquences est un tableau à deux colonnes ayant dans la première colonne les modalités et dans la seconde colonne les fréquences respectives des différentes modalités.

Conclusion
Organiser les données d'une enquête ou d'une recherche (d'une étude), c'est présenter ces données dans un tableau regroupant :
- *les différentes modalités du caractère étudié ;*
- *les effectifs de chaque modalité ;*
- *les fréquences de chaque modalité le plus souvent exprimées en pourcentage.*

Exercice
Dans une classe de quatrième de 50 élèves, le professeur de mathématiques mène une enquête en vue de savoir combien de bics bleus chaque élève a achetés depuis le début de l'année scolaire 2012 – 2013.

Les réponses des 50 élèves sont les suivantes :

5 ; 4 ; 2 ; 4 ; 7 ; 2 ; 2 ; 3 ; 3 ; 1 ; 1 ; 8 ; 5 ; 9 ; 3 ; 4 ; 4 ; 7 ; 6 ; 5 ; 2 ; 2 ; 1 ; 6 ; 5 ; 4 ; 3 ; 2 ; 2 ; 1 ; 9 ; 8 ; 1 ; 2 ; 4 ; 3 ; 5 ; 7 ; 6 ; 9 ; 5 ; 8 ; 6 ; 6 ; 7 ; 4 ; 2 ; 3 ; 3 ; 1.

a) Quel est le caractère étudié ? Est – t- il qualitatif ou quantitatif ?
b) Donne la population étudiée et définis un individu de cette population.
c) Donne la liste de toutes les modalités de cette étude.
d) Etablis le tableau des effectifs et des fréquences exprimées en fractions, en nombres décimaux puis en pourcentages.

Exercices
1) La répartition du personnel d'une entreprise de la ville de Sarh, d'après le nombre d'enfants de chaque salarié, est donnée dans le tableau suivant :

Nombre d'enfants	1	2	3	4	5	6	7
Effectifs	13	25	20	12	6	3	1

a) Détermine le nombre de personnes de l'entreprise qui ont trois enfants ; six enfants.
b) Donne le tableau de fréquences en pourcentage de cette répartition.

2) Exprime sous forme de fractions décimales les nombres suivants :

0,01 ; 0,1 ; 0,075 ; 0,125 ; 0,33 ; 1,08 ; 1,25 ; 1,42.

3) On a choisi au hasard 32 élèves de la classe de terminale du lycée Fidélité de N'djamena. L'enquête a consisté à demander à chacun d'eux leur matière de préférence en donnant des codes aux différentes matières :

A : philosophie ; B : français ; C : mathématiques ; D : chimie. Les résultats obtenus sont les suivants :
A ; D ; D ; A ; A ; D ; D ; A ; D ; D; A; A; D; D; D; C; D; D; A; A; A; A; B; A; A; D; D; D; C; C; C;B.
Pour ce caractère étudié, précise:

a) La liste des modalités.
b) Les tableaux des effectifs et des fréquences en pourcentage.
c) La modalité qui a le plus grand effectif.

4) Le tableau suivant donne le nombre d'enfants à charge dans une famille :

Enfants	0	1	2	3	4
Familles	144	195	130	180	51

Détermine le tableau de fréquence de cette distribution.

5) Le tableau suivant donne la répartition des élèves d'une classe selon le nombre de frères et de sœurs :

Nombre de frères et sœurs	0	1	2	3	4
Effectifs	10	8	6	1	1

Donne les fréquences des effectifs.

6) Seido, le chanteur tchadien du groupe musical Soubiana trie ses cassettes par genre. Il donne les résultats sous la forme du tableau suivant :

Genre de musique	Classique	Dalla	Chanson française	Sai	Rap	gourna	Salsa	Rumba
Effectif	15	24	12	34	14	26	34	55

a) Quelle est la population étudiée ? Quel est son effectif ?
b) Quel est le caractère étudié ? Est-il qualitatif ou quantitatif ?
c) Etablis le tableau de fréquences en pourcentage de cette étude.

7) Dans une cour de récréation d'un collège, on a posé la question suivante à chacun des élèves d'un groupe : « combien de temps mets-tu pour venir de chez toi au collège ? »

Les réponses sont consignées dans le tableau suivant :

Temps en minutes	5	10	15	20	25	30
Effectif	10	12	23	9	6	4

a) Combien d'élèves a-t-on interrogé au total dans la cour ?
b) Quelle est la modalité qui a le plus grand effectif ?
c) Etablis le tableau des fréquences en pourcentage de cette étude.

Chapitre 29: Traitement des données

Objectifs

- Traiter des données ;
- calculer la moyenne et l'interpréter ;
- calculer un effectif connaissant l'effectif total et la fréquence.

1 La moyenne d'un caractère quantitatif étudié

Moyenne
La moyenne d'un caractère quantitatif est une indication approximative de la modalité de chaque individu de la population étudiée.

2 Calcul de la moyenne

Méthode
Après avoir établi un tableau des effectifs d'un caractère quantitatif, on peut calculer la moyenne en procédant comme suit :

- *on calcule le produit de chaque modalité par son effectif ;*
- *on calcule la somme de tous ces produits ;*
- *on divise la somme de tous les produits par l'effectif total.*

Exercice
Dans une classe de sixième A du lycée Félix Eboué, on a posé à chaque élève la question suivante : « combien de temps en minutes te faut – il pour faire le trajet domicile – lycée Félix Eboué ?

Les réponses de tous les élèves de cette classe sont consignées dans le tableau des effectifs suivant :

Durée du trajet(en mn)	5	8	11	14	17
Effectifs	4	7	16	19	8

1) Etablis le tableau des fréquences en pourcentage de cette étude.
2) Calcule la moyenne de la durée du trajet des élèves de cette classe.

3 Calcul de l'effectif d'une modalité connaissant l'effectif total et la fréquence

<u>Cas pratique :</u>
A un devoir de mathématiques, les 25 élèves d'une classe de cinquième ont obtenu chacun l'une des notes allant de 0 à 15.

Le tableau suivant donne les notes et les fréquences en pourcentage des notes (modalités).

Notes	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Fréquences	4	4	8	8	4	4	8	4	4	8	12	8	8	8	4	4
Effectifs																

Calcule les effectifs des élèves pour chaque note.

Règle
Connaissant l'effectif total et les fréquences par modalité d'un caractère étudié, on peut calculer les effectifs des modalités en multipliant pour chaque modalité la fréquence par l'effectif total.

Exercices

1) Dans un livret d'activités de la classe de quatrième, on a relevé le nombre de pages par chapitre.

On a obtenu :

10 ; 5 ; 9 ; 6 ; 5 ; 9 ; 10 ; 7 ; 7 ; 3 ; 8 ; 8 ; 6 ; 6 ; 5.

Calcule la moyenne du nombre de pages par chapitre.

2) On a relevé l'âge des élèves d'une classe de $4^{ème}$ du lycée de N'djari à N'djamena :

Ages (ans)	14	15	16	17
Effectif	3	13	7	2

Calcule la moyenne de l'âge des élèves de cette classe.

3) Dans une enquête sur la taille des élèves d'une classe de 75 élèves, on a relevé que certains élèves mesurent 1,50m et d'autres 1,55m. Sachant que la fréquence de la modalité 1,50m est 12,36%, quel est le nombre des élèves qui mesurent 1,55 ?

4) Le Cabinet Finance et Management (CFM) emploie 18 auditeurs. La moyenne des salaires mensuels de ces auditeurs est de 358 500F CFA. Quel est le montant de la somme que doit préparer chaque fin de mois le comptable pour payer ces auditeurs ?

5) Dans une classe de quatrième du lycée de Bol, on a déterminé le nombre de frères et sœurs de chaque élève. Les résultats sont regroupés dans le tableau suivant :

Nombre de frères et sœurs	0	1	2	3	4
Effectifs	5	10	8	2	3

a) Donne les fréquences en pourcentage de cette répartition.
b) Calcule la moyenne du nombre des frères et sœurs des élèves de cette classe.

Chapitre 30: Diagrammes

Objectifs

- Construire un diagramme en bâtons, à bandes et circulaire ;
- interpréter un diagramme.

1 Le diagramme en bâtons et interprétation

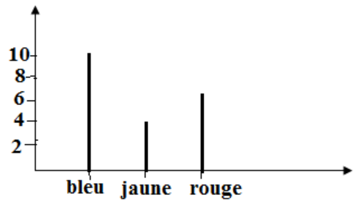
Méthode

Pour un caractère étudié, on peut dessiner dans un repère du plan un diagramme en bâtons qui représente le tableau des effectifs.
Ainsi, sur l'axe des abscisses, on reporte les différentes modalités et sur l'axe des ordonnées, sont notés les effectifs de chaque modalité.
Le segment le plus long est sur la modalité ayant le plus grand effectif.

Exemple
On demande à 20 personnes leur couleur préférée parmi le bleu, le jaune et le rouge.
On obtient le tableau des effectifs suivants :

Couleurs	Bleu	Jaune	Rouge
Effectifs	10	4	6

Le diagramme en bâton correspondant à cette distribution est :



La couleur bleu a le plus grand effectif.

2 Diagramme à bandes et interprétation

<u>Cas pratique :</u>
Le tableau des effectifs suivant donne les années de naissance et le nombre des élèves d'une classe de sixième nés au cours de cette année.

Années de naissance	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005
Effectifs	5	4	8	15	6	2	5

a) Construis un repère du plan ayant sur l'axe des abscisses les années des naissances et sur l'axe des ordonnées les effectifs des naissances par année.
b) Construis dans ce repère des bandes de même largeur sur chacune des années de naissance et de longueur égale ou proportionnelle au nombre des naissances enregistrées dans l'année qu'elle représente.
c) Au vu de cette représentation, peux-tu dire quelle est l'année qui a le plus enregistré de naissances ?

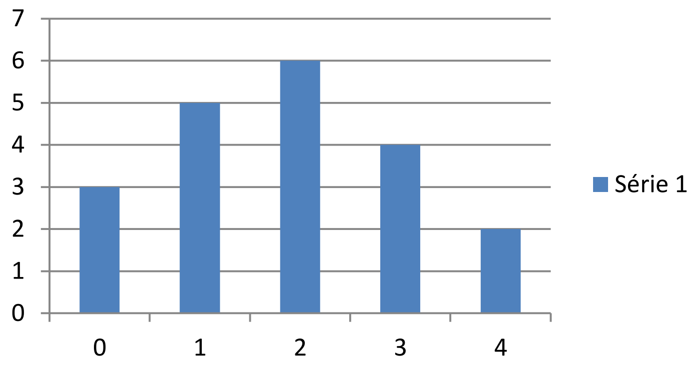
<u>Méthode :</u>
Dans un repère du plan, on peut représenter le diagramme à bandes d'un caractère étudié.

Les modalités sont portées en abscisse et les effectifs en ordonnée.
On construit sur les modalités (abscisses) les bandes de même largeur et de longueur égale où proportionnelle aux effectifs (ordonnées).
La bande ayant la plus grande longueur est sur la modalité qui a le plus grand effectif.

<u>Exemple</u>
Une étude statistique a donné le tableau des effectifs suivant :

Modalités	0	1	2	3	4
Effectifs	3	5	6	4	2

Le diagramme à bande de cette répartition est :



La modalité « 2 » a le plus grand effectif.

3 Diagrammes circulaires et interprétation

<u>Cas pratique :</u>

Au lycée de Gassi, une enquête a consisté à déterminer le nombre d'élèves par niveau.
Les résultats de l'enquête sont consignés dans le tableau suivant :

Niveaux	Seconde U	Première L	Première S	Terminale A	Terminale C	Terminale D
Effectifs	254	215	142	223	25	116

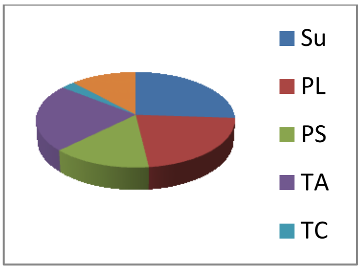
a) Construis un disque de centre O.
b) Partage ce disque en six secteurs circulaires représentant chacun un niveau et d'aire proportionnelle à l'effectif de ce niveau.
c) Le secteur de plus grande surface représente quel niveau ?

Méthode
Sur un disque, on peut représenter les effectifs de chaque modalité par des secteurs circulaires
Ainsi, à chaque modalité, on fait correspondre un secteur circulaire ayant un angle au centre proportionnel à l'effectif de la modalité que le secteur représente.
Le secteur circulaire qui a la plus grande aire correspond à la modalité ayant le plus grand effectif.

Exemple
Pour l'activité 3, on écrit : 975 correspondent à 360°
254 correspondront à x.

$$x = 360° \times 254/975 = 93{,}78°.$$

Le secteur circulaire qui représente le niveau de seconde U a un angle au centre qui mesure 93,78°.



Le secteur circulaire le plus large correspond au niveau de la seconde U.

Exercices

1) A l'hôpital de la mère et de l'enfant de N'djamena, on a donné dans un tableau le nombre des naissances par jour pendant la première semaine du mois de janvier 2013.

Jours	Lundi	Mardi	Mercredi	Jeudi	Vendredi	Samedi	Dimanche
Nombre des naissances	16	8	27	13	19	10	22

a) Dans un repère du plan, représente le diagramme en bâtons de ces informations.
b) Dans un repère du plan, représente le diagramme à bandes de ces informations.
c) Donne le diagramme semi-circulaire de ces informations.

2) A la fin de la saison sportive 2012, l'entraineur de l'équipe de football « Gazelle » de N'djamena a relevé dans le tableau suivant le nombre de joueurs ayant marqué 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 buts.

Nombre de buts	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Nombre de joueurs	1	0	0	2	0	1	2	4	0	1

a) Quelle est la population étudiée ? Quel est son effectif ?
b) Dresse le tableau des fréquences données en pourcentage.
c) Construis le diagramme en bâtons des effectifs.
d) Calcule la moyenne du nombre de buts marqués par joueur.

3) Les 24 élèves d'une classe de quatrième A du lycée Joseph Brahim Seid de Pala ont obtenu les notes suivantes à un devoir de mathématiques.

8; 12 ; 7 ; 15 ; 9 ; 13 ;12 ; 12 ;18 ; 10 ; 7 ; 20 ; 10 ; 15 ; 18 ; 5 ; 9 ; 11 ; 10 ; 3 ; 11 ; 10 ; 15 ; 12.

a) Dresse le tableau des effectifs par note de cette classe.
b) Construis le diagramme en bâtons des notes obtenues.
c) Partage la classe en trois groupes :
Groupe I : les élèves ayant obtenu une note supérieure ou égale à 12 ;
Groupe II : les élèves ayant obtenu une note supérieure ou égale à 8 et inférieure à 12 ;
Groupe III : les élèves ayant obtenu une note inférieure à 8.
Représente cette répartition par un diagramme semi-circulaire.

4) Un sondage a montré que trois familles sur quatre possède un réfrigérateur.

25 pour cent des réfrigérateurs vendus sur le marché sont des réfrigérateurs-congélateurs.

a) Sachant qu'il y a 24 000 familles dans la ville de N'djamena, combien de familles de la ville de N'djamena possèdent un réfrigérateur ?
b) Combien de familles de la ville de N'djamena possèdent un réfrigérateur-congélateur ?
c) Recopie et complète le tableau suivant :

	Nombre de familles
Sans réfrigérateur	
Avec réfrigérateur-congélateur	
Avec réfrigérateur sans congélateur	

d) Fais le tableau des fréquences exprimées en pourcentage correspondant aux effectifs ci-dessus.
e) Construis la représentation semi-circulaire des effectifs.

5) Le tableau suivant donne les populations d'Afrique francophone en 1990 :

Algérie	18 351 810
Burkina-Faso	7 976 019
Burundi	4 852 000
Cameroun	10 446 000
Centrafrique	2 740 000
Congo	2 180 000
Côte-D'ivoire	11 154 000
Gabon	1 050 000
Guinée	6 380 000
Madagascar	10 800 000
Mali	7 600 000
Mauritanie	1 946 000
Niger	7 250 000
Sénégal	6 881 919
Tchad	5 061 000
Togo	3 250 000
Zaïre	32050 000

a) Quelle est la population étudiée ?
b) Quel est le caractère étudié ?
c) Ce caractère est-il quantitatif ou qualitatif ?
d) Calcule la moyenne des populations des pays d'Afrique francophone.
e) Construis le diagramme à bandes des effectifs.

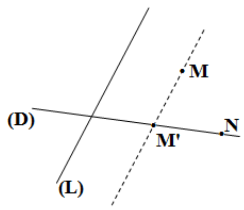
Chapitre 31: Projections

Objectifs

- Définir une projection ;
- construire le projeté orthogonal d'un point ;
- construire le projeté orthogonal d'un segment ;
- trouver un ou (des) point(s) dont le(s) projeté(s) est (sont) connu(s) ;
- utiliser la conservation du milieu pour justifier qu'un point est le milieu d'un segment image par une projection ;
- partager un segment en plusieurs segments de même longueur.

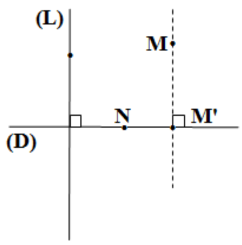
1 Projection d'un point

Définition 1
(D) et (L) sont deux droites sécantes du plan.
On appelle projection sur (D) parallèlement à (L) l'application du plan dans le plan qui, à chaque point M, associe M' point commun de la droite (D) et de la droite parallèle à (L) passant par M.
Le point M' est appelé le projeté de M sur (D).



NB : Si N ∈ (D), N est son propre projeté. Tous les points de la droite (D) sont leurs propres images par une projection parallèle à une droite sécante à (D).

Définition 2



Si (D) est orthogonale à (L), la projection sur (D) parallèlement à (L) est appelée projection orthogonale sur (D).
On a : M' ∈ (D) et (MM') ⊥ (D).
Le point M'est appelé projeté orthogonal de M sur (D).

Exercices
1) ABCD est un parallélogramme de centre O.
Quels sont les projetés orthogonaux respectifs des points A, B, C et D par :

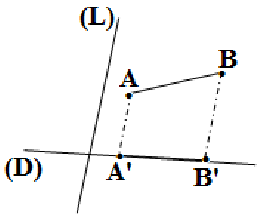
a) la projection sur (CD) ?
b) la projection sur (BC) ?

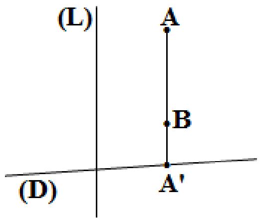
2) Soit (D) une droite. M, N et P sont trois points distincts du plan n’appartenant pas à (D).
Q est un point appartenant à (D).
Construis les projetés orthogonaux des points M, N et P sur la droite (D).
Quel est le projeté orthogonal du point Q sur la droite (D) ? Justifie.

2 Propriétés

2.1 Projeté d’un segment

Propriété
Le projeté d’un segment est un segment ou un point.

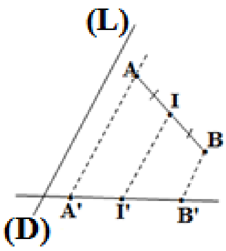




Exercice
ABCD est un parallélogramme de centre O.
I est un point de [AO] tel (OI) ∥ (AB).
Considérons la projection sur (BC) parallèlement à (CD).
Détermine les projetés des segments [AD], [IO] , [OB], [DB], [AC] et [AB].

2.2 Projeté d’un milieu

Propriété
Lorsque le projeté d’un segment n’est pas un point, le projeté du milieu du segment est le milieu du projeté de ce segment.



[A’B’] Projeté de [AB]
I milieu de [AB]
I’ projeté de I
I’ milieu de [A’B’]

Exercice
ABC D est un parallélogramme de centre O. Les points H et K sont les projetés orthogonaux respectifs de A et C sur [BD].
Démontre que O est le milieu de [HK].

3 Partage d’un segment en des segments de même longueur

Méthode
[AB] est un segment de longueur l donnée.
Pour diviser le segment [AB] en n segments de même longueur, on divise l par n. Soit m le nombre obtenu de la division de l par n. A l’aide d’un compas dont l’écart mesure m, on

place n-1point à l'intérieur de [AB], la pointe du compas étant pour la première fois placée en A, puis au point d'intersection de l'arc de cercle de rayon m tracé et du segment [AB], puis au deuxième point d'intersection de l'arc de cercle de même rayon m et du segment [AB], ...,jusqu'au (n-1)^{ème} point. Le dernier arc de cercle coupe le segment [AB] en B

Exercice
Sur une droite (xy) , on marque les points O, I, J, K, L, M distincts tels que :
OI = JI = JK= KL= LM.

a) Construis la droite (D)⊥(OI), passant par O.
b) Soit I' l'un des points de (D) tel que OI' = OI.
   On désigne par I', J', K', L' et M' les projetés de I, J, K, L et M sur (D) parallèlement à (II'). Construis I', J', K', L' et M'.
   Démontre que :
   - OI'= I'J'= J'K'= K'L'= L'M' ;
   - I'J'= IJ ; I'K'= IK ; I'L'= IL ; OM'= OM.
c) Démontre que les milieux des segments [II'], [JJ'], [KK'], [LL'], [MM'] sont alignés avec O.

Exercices
1) ABC est un triangle.
Les points I, J et K sont les milieux respectifs de [BC], [CA] et [AB]. Quels sont les projetés respectifs :

a) des points A, J et C sur (AB) parallèlement à (IJ) ?
b) des points K et J sur (BC) parallèlement à (IJ) ?

2) On donne un triangle ABC rectangle en A. Construis le point H projeté orthogonal de A sur (BC).
Construis les points M et N projetés orthogonaux de H sur (AB) et (AC).
Quelle est la nature du quadrilatère AMHN ?

3) On donne un triangle RST et un point O à l'intérieur de ce triangle.
a) Construis les points A, B et C projetés orthogonaux de O sur les droites (RS), (ST) et (TR) ;
b) Place le point O pour qu'on ait les égalités : OA = OB = OC.

4) Trace un segment [AB] de longueur 10cm et un segment [AC] de longueur 6,3cm ; les point A, B et C n'étant pas alignés.
Construis le point O appartenant à [AB] tel que AO = $\frac{2}{7}$AB.
Construis le point O' projeté de O sur (AC) parallèlement à (BC).
Quelle est la distance des points A et O' ?

5) ABC est un triangle et M est le milieu de [BC].
Le point N est l'image de M par la symétrie de centre C.
Les points R et S sont les projetés respectifs de M et C sur la droite (AN) parallèlement à la droite (AB).
Démontre que : AR = RS = SN.

6) ABCD est un parallélogramme de centre O.
M est le projeté du point A sur (CD) parallèlement à (BD).
N est le projeté du point B sur (CD) parallèlement à (AC).

Les droites (AM) et (BN) se coupent en P.

a) Démontre que : MD = DC = CN ;
b) Démontre que la droite (OP) coupe le segment [DC] en son milieu.

7) API est un triangle et le point C est le milieu du côté [AI].

Par le point A, on mène la parallèle à la droite (CP) ; elle coupe la droite (IP) en O.

a) Fais la figure.
b) Pourquoi le point P est-il le milieu de [OI] ?

8) TRUC est un trapèze tel que les droites (TR) et (UC) sont parallèles.
I est le milieu de [TC] et J, le milieu de [RU].

a) Fais la figure.
b) Par la projection sur la droite (RU) parallèlement à la droite (TR), quel est le projeté du segment [TC] ?
c) Par cette même projection, quel est le projeté du point I ?
d) En déduire que (IJ) et (TR) sont parallèles.

Chapitre 32 : Repérage sur une droite graduée ou dans le plan

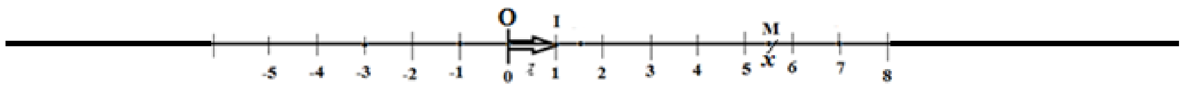
Objectifs

- Placer un point d'abscisse donnée sur une droite graduée ;
- déterminer l'abscisse d'un point d'une droite graduée ou un encadrement de cet abscisse ;
- placer un point de coordonnées données dans un plan muni d'un repère ;
- déterminer les coordonnées d'un point du plan muni d'un repère.

1 Repérage sur une droite graduée

Définition

(D) est une droite graduée de repère (O, I) telle que $\overrightarrow{OI} = \vec{\imath}$.



Tout point M de la droite (D) est repéré par un unique nombre x appelé abscisse de M. Réciproquement, tout nombre x désigne l'abscisse d'un unique point M de la droite (D) de repère (O,I).

On note : M(x) ou $\overrightarrow{OM} = x.\vec{\imath}$

$x.\vec{\imath}$ *est l'écriture vectorielle de* $\overrightarrow{OM}$ *sur la droite graduée (D) de repère (O,I) tel que* $\overrightarrow{OI} = \vec{\imath}$.

Exercice

L'unité de longueur est le centimètre.

a) Trace une droite graduée (D) de repère (O,I) tel que $\overrightarrow{OI} = \vec{\imath}$ et place sur cette droite les points M, N, P, Q, R, S et T d'abscisses respectives -5 ; -3 ; 2 ;4 ; 5 ; 7 et 9.

b) Complète les égalités suivantes :

$\overrightarrow{OM} = \ldots\vec{\imath}$;

$\overrightarrow{ON} = \ldots\vec{\imath}$;

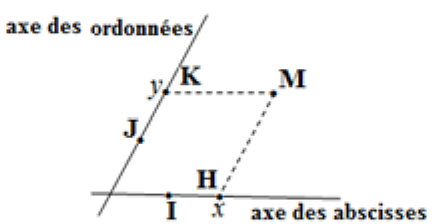
$\overrightarrow{OP} = \ldots\vec{\imath}$;

$\overrightarrow{OQ} = \ldots\vec{\imath}$;

$\overrightarrow{OR} = \ldots\vec{\imath}$;

$\overrightarrow{OT} = \ldots\vec{\imath}$.

2 Repérage dans le plan



Définition et notation

(OI) et (OJ) sont deux droites sécantes en O.

(O, I) est un repère de la droite (OI) et (O, J) est un repère de la droite (OJ).

Soit M un point du plan.

H est le projeté de M sur (OI) parallèlement à (OJ) et K est le projeté de M sur (OJ) parallèlement à (OI).
x est l'abscisse du point H sur (OI) et y l'abscisse de K sur (OJ).

Le triplet (O, I, J) est appelé repère du plan.
Le point O est l'origine du repère (O, I, J).
L'axe (O, I) est appelé axe des abscisses et l'axe (O, J), axe des ordonnées.
Dans ce repère, tout point M est déterminé par un couple unique (x, y) de nombres et tout couple (x, y) de nombres détermine un unique point M.
Les nombres x et y sont appelés des coordonnées du point M dans le repère (O, I, J).
x est l'abscisse du point M dans le repère (O, I, J).
y est l'ordonnée de M dans le repère (O, I, J).
On dit que (x, y) est le couple de coordonnées du point M dans le repère (O, I, J).
On note : M (x, y) pour désigner que M est un point de coordonnées x et y dans le repère (O, I, J).

Exercices

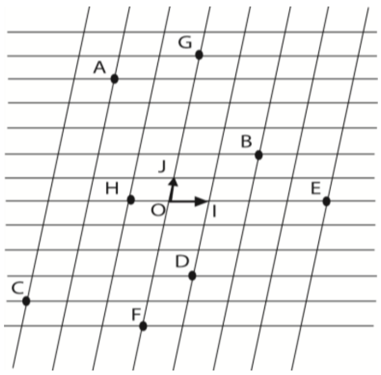
1) (O, I, J) est un repère du plan.

On donne les points :A(2 ; 1,5) ; B(-4 ; 5) ; C(0 ; $-\frac{3}{4}$).

a) Donne l'abscisse et l'ordonnée de chacun de ces points ;
b) Construis le repère (O, I, J) et place les points A, B et C.

2) (O, I, J) est un repère du plan.

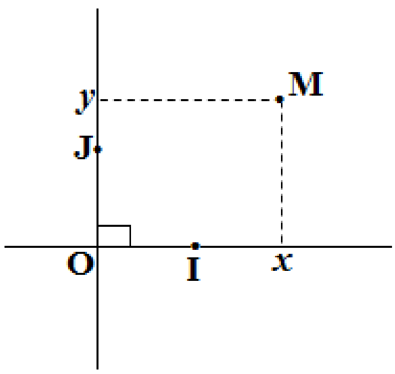
Donne le couple de coordonnées de chacun des points A, B, C, D, E, F, G, H, I, J et O.



3 Repère orthogonal - Repère orthonormé

3.1 Repère orthogonal

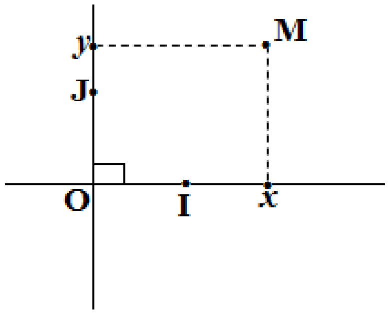
Définition



Le repère (O, I, J) est appelé repère orthogonal si (OI)⊥(OJ). M a pour coordonnées x et y dans le repère orthogonal (O, I, J). on note M(x,y).

3.2 Repère orthonormé (ou orthonormal)

Définition

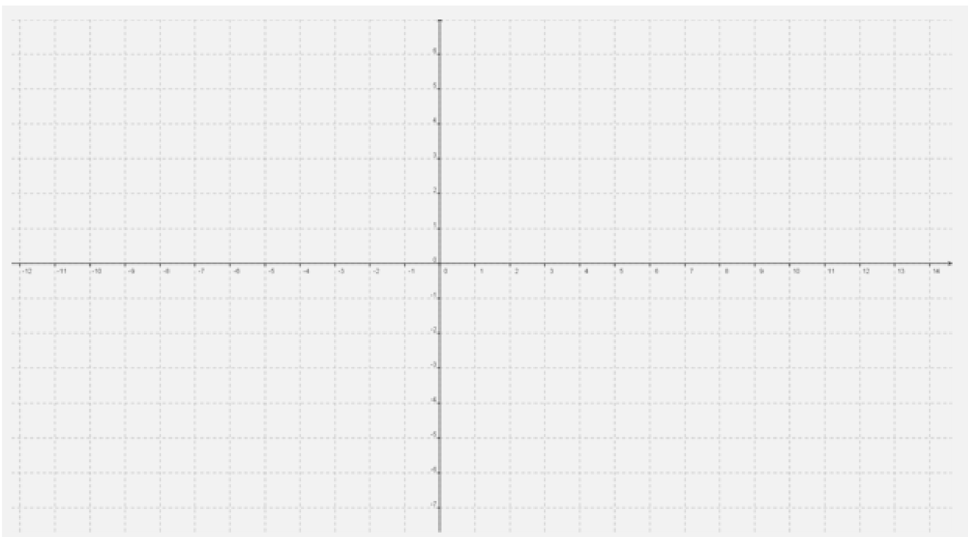


(O, I, J) est un repère orthogonal.
Si OI = OJ, on dit que (O, I, J) est un repère orthonormé ou orthonormal.
On note $M(x, y)$ dans le repère orthonormé.

Exercices

1) (O, I, J) est un repère orthogonal du plan.
Place les points A(2 ; 5) ; B(-1 ; 4) ; C(-3 ; -2) ; D(5 ; -4) ; E(-3 ; 0) et F(0 ; 4).

2) a) (O, I, J) est un repère du plan.
Ce repère est-il orthogonal ou orthonormé ? Dis pourquoi.
b) Les couples des coordonnées suivants sont ceux des points A, B, C, D, E et F respectivement. Place ces points dans le repère suivant.
(1 , -2) ; (1 , 0) ; (0, 5) ; (2, 3) ; (-1, 6) ; (-2, 0).



Exercices

1) L'unité de longueur est le centimètre.
   a) Trace une droite graduée (D) et place les points M et N d'abscisses respectives 8 et – 5.
   b) Considère sur la même droite (D) le repère (M, N).
      – Quelle est, en centimètres, l'unité de longueur dans le repère (M, N) ?

- Dans le repère (M, N), le point P a pour abscisse
  \- 17 ; quelle est son abscisse dans le repère ayant pour unité de longueur le centimètre ?

2) (O, I, J) est un repère orthonormé.
   Place les points A, B, C, A', B', C' de coordonnées respectives :
   (1 ,1) ; (3 ,2) ; (6,-1) ; (1,-1) ; (3, -2) ; (6,1).

3) (O, I, J) est un repère orthogonal. On considère les points : A (2 ;-1) ; B (2 ; 3) ;
   C (-2 ; et D (-3 ;-2).
   a) Quelles sont les coordonnées des projetés orthogonaux de ces points sur (OI) ?
   b) Quelles sont les coordonnées des projetés orthogonaux de ces points sur (OJ) ?

4) ABCD est un carré de centre O.
   a) Construis cette figure.
   b) Quel est le couple de coordonnées de chacun des points A, B, C, D et O dans le repère (D, C, A) ?
   c) Le repère (D, C, A) est-il orthogonal ? Justifie ta réponse.

5) (O, I, J) est un repère orthogonal et M le point de coordonnées (3 ; -2).
   Quelles sont les coordonnées des points N, P et Q, symétriques respectifs de M par rapport à O, (OI) et (OJ) ?
6) Le plan est rapporté à un repère orthonormal (O, I, J).
   a) Marque les points A(-3 ; 2), B(2 ; 5), C(3 ; 1) et
      D(- 2 ; 2).
   b) Par des projections, retrouve les coordonnées des points M et N, milieux respectifs des segments [AC] et [BD]. Le quadrilatère ABCD est-il un parallélogramme ?

7) Le plan est rapporté à un repère orthonormal (O, I, J).
   a) Marque les points A(3 ; 2), B(-2 ; 2).
   b) Construis les points A' et B' symétriques respectifs des points A et B par la symétrie de centre O.
   c) Quelle est la nature du quadrilatère BAB'A' ?

8) ABCD est un parallélogramme de centre I.
   M, N, P et Q sont les milieux respectifs de [AB], [BC], [CD] et [DA].
   Quel est le couple de coordonnées de chacun des points A, B, C D, I, M, N, P et Q dans :
   a) Le repère (B, C, A) ?
   b) Le repère (B, N, M) ?
   c) Le repère (I, P, Q) ?

Bibliographie

C.I.A.M.(1994 – 2008). – Mathématique 4è ; EDICEF .
C.I.A.M.(1994). – Mathématique. Livret d'activités ; EDICEF
CNC. – Manuel de mathématiques quatrième (2012) ; Ed. du CNC

Partenariat
Coopération Suisse
Lycée Saint François Xavier
Label 109

Livret à ne pas vendre

Contact
info@label109.org