Cours de Maths

3ème

Mathématiques

3ème

TABLE DES MATIERES

PREMIERE PARTIE : RAPPELS DE L'ESSENTIEL DU COURS

ACTIVITES NUMERIQUES

CHAPITRE I. CALCUL LITTERAL

I. CE QU'IL FAUT SAVOIR

a, b, c et d sont des nombres réels différents de 0 :

*$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ équivaut à ad=bc

Exemple : calculer a où a désigne un nombre réel différent de 0 : $\frac{3}{a}=\frac{4}{12}$

Solution : $\frac{3}{a}=\frac{4}{12}$ équivaut à 12×3=4×a équivaut à a=$\frac{12\times 3}{4}$=9

*$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ équivaut à $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$

*$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{hc}{hd}$ (h≠0)

*$\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$ équivaut à a=b

*$\frac{a}{c}+\frac{b}{d}=\frac{ad+bc}{cd}$

Exemple : $\frac{2}{7}+\frac{5}{3}=\frac{2\times 3+7\times 5}{7\times 3}=\frac{41}{21}$

$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$ Exemple : $\frac{14}{5}\times\frac{15}{7}=\frac{14\times 15}{5\times 7}$=6

$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc}$

Exemple : $\frac{2}{5}:\frac{9}{4}=\frac{2\times 4}{5\times 9}=\frac{8}{45}$

a et b sont des nombres réels différent de 0, m et n sont des nombres entiers relatifs :

$*a^{-n}=\frac{1}{a^n}$; $a^n b^n=(ab)^n$; $(a^m)^n=a^{mn}$; $a^m a^n=a^{m+n}$; $\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$

Exemple : a est un nombre réel différent de 0.

$(a^3)^7=a^{21}$; $a^8\times a^3=a^{8+3}=a^{11}$; $\frac{a^{12}}{a^5}=a^{12-5}=a^7$

a, b et c sont des nombres réels non nul :

*a-(b+c)=a-b-c ;

*a-(b-c)=a-b-c ;

*a(b+c)=ab+ac ;

*a(b-c)=ab-ac ;

*$(a+b)^2=a^2$+2ab+b^2 ;

*$(a-b)^2=a^2$-2ab+b^2 ;

*(a-b)(a+b)=a^2-b^2 .

a et b sont des nombres réels :

*ab=0 équivaut à a=0 ou b=0 ;

*ab≠0 équivaut à a≠0 ou b≠0 ;

*a^2=b^2 équivaut à a=b ou a=-b.

II. EXERCICES D'APPLICATION

Exercice 1

a désigne un nombre réel

1) Développer, réduire et ordonner les expressions ci-dessous ;
2) Calculer la valeur de A pour chaque valeur de a donnée ;

a) A=(-2a+3)(5a-7), a=-2 ;
b) A=$(3a-5)^2$, a=-4 ;
c) A=3+2(a-7)-[1-5(4a+7)], a=0

Exercice 2

Développer, réduire et ordonner les expressions suivantes

A=3a(a-4)-2a(7+8a)

B=$(2x+3)(3x-1)$+$(x-7)(5x-2)$

C=$(3x+2)^2$-2$(x-2)^2$

D=$(\frac{2}{3}x-3)^2$+$\left(\frac{x}{3}+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{x}{3}-\frac{1}{2}\right)$

Exercice 3

Factoriser les expressions suivantes

A=$(x+5)^2$+$(x+5)(2x-3)$

B=$(9x+2)(x-3)$-$(3-x)(8x-1)$

C=$(3x+7)^2$-$(x-2)^2$

D=$-6x+1+9x^2$

E=$60x+100+9x^2$

Exercice 4

X étant un nombre réel non nul,

I. Simplifier :
   1. $2x^2\left(-\frac{5}{4}x^3\right)\left(-\frac{8}{10}x^7\right)$
   2. $\frac{(3x)^2(-4x^8)}{2x^3(27x^4)}$

II. Pour chacune des expressions suivantes :

a) Factoriser le dénominateur et le numérateur ;
b) La condition d'existence d'une valeur numérique ;
c) Simplifier
   1. A=$\frac{9x^2-16}{(3x-4)(x+4)-2(3x-4)}$
   2. B=$\frac{x^2+4x+4}{x^2-4}$

Exercice 5

On considère les expressions suivantes :

$f(x)=(3x-2)(5x+6)-6(3x-2)$

$g(x)=(4x-3)^2-(x^2-2x+1)$

1. Développer et réduire f(x) et g(x)
2. Factoriser f(x) et g(x)

3. Soit $A(x) = f(x) - g(x)$ et $B(x) = \frac{2}{3}f(x) - \frac{1}{5}g(x)$
   a. Factoriser A(x) et B(x) ;
   b. Calculer $A\left(\frac{2}{3}\right)$ et $B\left(-\frac{3}{5}\right)$

CHAP II. RACINES CARREES

I. CE QU'IL FAUT SAVOIR

a est un nombre réel positif, on appelle la racine carrée de a, le nombre réel positif noté $\sqrt{a}$ tel que $(\sqrt{a})^2$=a

Exemple : $\sqrt{9} = 3$; $\sqrt{81} = 9$

a et b sont des nombres réels positifs :

*$\sqrt{a} = b$ équivaut à $a = b^2$

Exemple : 16=4^2 équivaut à $\sqrt{16} = 4$; $x = \sqrt{3}$ équivaut à

$x^2 = 3$

*$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$; exemple : $\sqrt{4 \times 9} = \sqrt{4} \times \sqrt{9}$=$2 \times 3 = 6$

*$\sqrt{\frac{a}{b}}$=$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ (b≠0) ; exemple : $\frac{\sqrt{75}}{\sqrt{3}}$=$\sqrt{\frac{75}{3}} = \sqrt{25}$ =5

*$\sqrt{a} + \sqrt{b}$ ≠$\sqrt{a + b}$ (En général) ;

exemple : $\sqrt{16} + \sqrt{9} = 4 + 3 = 7$ et $\sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$

a étant un nombre réel positif et n, un entier relatif :

*$\sqrt{a^{2n}} = a^n$; $\sqrt{a^{2n+1}} = a^n\sqrt{a}$

Exemple : $\sqrt{1000} = \sqrt{10^3} = 10 \times \sqrt{10}$

a, b et c sont des nombres réels positifs :

$\sqrt{a^{13}b^{7}c^{9}} = a^{6}b^{3}c^{4}\sqrt{abc}$

a et b sont des nombres réels positifs :

$(\sqrt{a}+\sqrt{b})\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right) = a - b$

(On dit que $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ et $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ sont des expressions conjuguées).

Exemple : $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right) = 1$

II. EXERCICE D'APPLICATION

Exercice 1 : Ecrire plus simplement :

$A = 3\sqrt{125} - 2\sqrt{45} + \sqrt{20} - 2\sqrt{80}$

$B = 3\sqrt{5} \times 5\sqrt{2} \times 2\sqrt{15}$

$C = \sqrt{45}\sqrt{60}\sqrt{12}$

Exercice 2 :

$x = 3 + \sqrt{2}$ et $y = \sqrt{11 + 6\sqrt{2}}$

1. Calculer $x^{2} et\ y^{2}$
2. Comparer $x\ et\ y$

Exercice 3 : Développer puis écrire plus simplement

1. $\sqrt{3}(4 + 2\sqrt{3})$
2. $(2\sqrt{5} - 3\sqrt{7})^{2}$

3. $(\sqrt{5}-\sqrt{3})\,(\sqrt{5}+\sqrt{3})$

Exercice 4 : Ecrire sans radicaux au dénominateur :

$\frac{1}{\sqrt{5}}$; $\frac{3}{\sqrt{7}}$; $\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$;$\frac{\sqrt{2}-5}{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}}$

Exercice 5 :

$A=\sqrt{5}+3\ et\ B=\sqrt{5}-3$

1. Calculer A^2 ; $B^2; AB$
2. Démontrer que $\frac{A}{B}+\frac{B}{A}$ est un nombre entier relatif ;
3. Ecrire au moyen d'un seul radical $\sqrt{14-6\sqrt{5}}$;
4. Sachant que $2.236<\sqrt{5}<2.237$, donner la valeur décimale approchée par défaut à 10^{-3} près de $\sqrt{14-6\sqrt{5}}$

CHAP III. CALCUL NUMERIQUE

I. CE QU'IL FAUT SAVOIR

Soit a, un nombre réel, on appelle valeur absolue de a, le nombre réel positif noté $|a|$ tel que :

$|a|$=a si a≥0 et $|a|$=-a si a≤0.

Exemple : $|-7.1|$=7.1 ; |4.5|=4.5

Soit a, un nombre réel : $\sqrt{a^2} = |a|$

Exemple : $\sqrt{8^2} = 8$; $\sqrt{(-5)^2} = 5$

a et b sont des nombres réels, on appelle distance de a à b, le nombre réel positif $|a - b|$.

Exemple : a=5.1 et b=-1.5 alors, la distance de a à b est

$|5.1 - (-1.5)|$=6.6

a=-3.8 et b=-2, la distance de a à b est $|-3.8 - (-2)|$=1.8

a et b sont des nombres réels tels que a<b.

*$[a; b], [a; b[,]a; b[,]a; b]$ sont appelés des intervalles de bornes a et b et d'amplitude$|b - a|$.

*$a \leq x \leq b$ équivaut à $x \in\ [a; b]$

a, b, c et d sont des nombres réels :

*si $a < b$ alors $a + c < b + c$

*si $a \leq b$ alors $a + c \leq b + c$

*si $a < b$ et $c < d$ alors, $a + c < b + d$

a, b, c et d sont des nombres réels positifs :

*si $a < b$ et $c > 0$ alors, $ac < bc$

*si $a < b$ et $c < 0$ alors, $ac > bc$

*si $a < b$ et $c < d$ alors, $ac < bd$

a et b sont des nombres réels négatifs :

*si $a < b$ équivaut à $a^2 > b^2$

*si $a \leq b$ équivaut à $a^2 \geq b^2$

a et b sont des nombres réels positifs :

*si $a < b$ équivaut à $a^2 < b^2$

*si $a \leq b$ équivaut à $a^2 \leq b^2$

*si $a < b$ équivaut à $\sqrt{a} < \sqrt{b}$

*si $a \leq b$ équivaut à $\sqrt{a} \leq \sqrt{b}$

Exemple : Comparer $2\sqrt{3}$ et $3\sqrt{2}$

$(2\sqrt{3})^2 = 4 \times 3 = 12$ et $(3\sqrt{2})^2 = 9 \times 2 = 18$

$12 < 18$ alors, $2\sqrt{3} < 3\sqrt{2}$

a et b sont des nombres de même signe et différents de 0 :

*$a < b$ équivaut à $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

*$a \leq b$ équivaut à $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$

Exemple : Comparer $\frac{1}{3\sqrt{7}}$ et $\frac{1}{5\sqrt{2}}$

$(3\sqrt{7})^2 = 9 \times 7 = 63$ et $(5\sqrt{2})^2 = 25 \times 2 = 50$

$50 < 63$ donc $\frac{1}{50} > \frac{1}{63}$ alors $\frac{1}{3\sqrt{7}} < \frac{1}{5\sqrt{2}}$

II.**EXERCICES D'APPLICATION**

Exercice 1

I. Ecrire sous forme d'intervalles chacun des ensembles des nombres réels définis par :

1) $x \leq -3$; 2) $2.1 \leq x \leq 7$; 3) $x \geq 4$; 4) $-2 \leq x < 5$

II. Traduire par des inégalités, l'appartenance de x à chacun des intervalles ci-dessus :

1) $[-5; \rightarrow[$; 2) $[1.5; 9]$; 3) $]3; 8[$; 4) $]-7; 1]$.

Exercice 2

Comparer les nombres réels suivants :

9 *et* $4\sqrt{5}$;$-2\sqrt{7}$ et $-7\sqrt{2}$;$\frac{1}{\sqrt{7}}$ et $\frac{-1}{\sqrt{5}}$; $2 + \sqrt{3}$ et $7 + \sqrt{3}$

Exercice 3

Soit a un nombre entier relatif tel que : $4.2 < a < 4.3$

Déterminer un encadrement de $-2a + 9.5$

CHAPITRE IV. EQUATIONS ET INEQUATIONS DANS IR

I. CE QU'IL FAUT SAVOIR

a et b sont des nombres réels tels que : ab=0 équivaut à a=0 ou b=0

a est un nombre positif non nul : $x^2 = a$ équivaut à $x = \sqrt{a}$ ou $x = -\sqrt{a}$

Exemple : $x^2 = 5$ équivaut à $x = \sqrt{5}$ ou $x = -\sqrt{5}$

$x^2 = 0$ équivaut à $x = 0$

a est un nombre et b un nombre positif : $|x - a| = b$ équivaut à
$$\begin{cases} x = a + b \\ \quad ou \\ x = a - b \end{cases}$$

Exemple : $|x - 4| = 2$ équivaut à $\begin{cases} x = 4 + 2 \\ \quad ou \\ x = 4 - 2 \end{cases}$

$|x + 7| = \sqrt{5}$ équivaut à $\begin{cases} x = 7 + \sqrt{5} \\ \quad ou \\ x = 7 - \sqrt{5} \end{cases}$

. Une solution à une équation ou une inéquation est un nombre qui vérifie cette équation ou inéquation.

Exemple : 3 est une solution de l'équation : $x^2 - 9 = 0$

. Résoudre une équation ou une inéquation, c'est trouver l'ensemble de toutes ces solutions.

Exemple : $S = \{-3; 3\}$ est l'ensemble de solution de l'équation $x^2 - 9 = 0$

. Deux équations ou inéquations sont dites équivalentes lorsqu'elles ont même ensemble de solutions. En additionnant un même nombre aux deux nombres (ou en multipliant par un même nombre non nul les deux membres) d'une équation ou d'une inéquation, on obtient d'équation ou d'inéquation équivalente.

Exemple : $2x + 3 = 7x - 2$; $4x + 5 = 9x$; $8x + 12 = 28x - 8$….. sont des équations équivalentes.

II.EXERCICES D'APPLICATION

Exercice 1 : Résoudre les équations suivantes

1) $7(x-3) - 8(x+2) = 0$
2) $\frac{5}{3}x - \frac{1}{4} = \frac{7}{6}x + \frac{1}{2}$
3) $(1 + 2\sqrt{3})x - \sqrt{3} + 2 = 0$
4) $(3x+7)^2 - x^2$
5) $(x-1)(2x+3) - (x-1)(5-4x) = 0$
6) $\left|x - \frac{2}{3}\right| = \frac{3}{4}$

Exercice 2 : Résoudre les inéquations suivantes et représenter graphiquement leur ensemble de solutions

1) $5(x+3) < 3$
2) $3x - 3 \geq -5x + 6$
3) $\frac{x+2}{4} - \frac{2x+1}{3} \leq \frac{x+4}{3}$

Exercice 3 : Résoudre les systèmes d'inéquations suivants et représenter leur ensemble de solutions :

1) $\begin{cases} 4x - 1 > x + 2 \\ 7 - 5x \geq 1 - 3x \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \frac{x+3}{2} - \frac{2x-3}{7} < 0 \\ \frac{5}{3} - \frac{3x+1}{4} \geq \frac{7}{2} - 2x \end{cases}$

CHAPITRE V. EQUATIONS ET INEQUATIONS DANS $\boldsymbol{IR \times IR}$

I.CE QU'IL FAUT SAVOIR

a, b, c, d, a', b', et c' sont des nombres réels :

$\begin{cases} ax + by + c = 0 \ (E_1) \\ a'x + b'y + c' = 0 \ (E_2) \end{cases}$ est le système d'équations inconnues $(x; y)$

Résoudre un tel système, c'est trouver les solutions communes aux équations (E_1) et (E_2).

Exemple : $\begin{cases} 2x + y - 3 = 0 \ (E_1) \\ x - y + 2 = 0 \ (E_2) \end{cases}$

.Différentes méthodes de résolution

*Résolution par substitution :

-Exprimer y en fonction x : $y = -2x + 3$ (1) ;

-Dans l'équation(E_2), on remplace y par son expression :

$x - (-2x + 3) + 2 = 0$

$3x - 1 = 0$

$x = \frac{1}{3}$

-On remplace x par sa valeur dans (1) : $y = -2\left(\frac{1}{3}\right) + 3 = \frac{7}{3}$

-Vérification : $2\left(\frac{1}{3}\right) + \frac{7}{3} - 3 = 3 - 3 = 0$

$$\left(\frac{1}{3}\right) - \frac{7}{3} + 2 = -2 + 2 = 0$$

-Conclusion : l'ensemble des solutions de ce système est :

$S = \left\{\left(\frac{1}{3}; \frac{7}{3}\right)\right\}$

*Résolution par combinaison :

-Recherche de y, on élimine x :

$$\begin{cases} 2x + y - 3 = 0\ (E_1) \\ x - y + 2 = 0\ (E_2) \times (-2) \end{cases}$$

Équivaut à $\begin{cases} 2x + y - 3 = 0\ (E_1) \\ -2x + 2y - 4 = 0\ (E_2) \end{cases}$

$$3y - 7 = 0$$

$$y = \frac{7}{3}$$

-Recherche de x, on élimine y :

$$\begin{cases} 2x + y - 3 = 0\ (E_1) \\ x - y + 2 = 0\ (E_2) \end{cases}$$

$$3x - 1 = 0$$

$$x = \frac{1}{3}$$

.On retrouve $S = \left\{\left(\frac{1}{3}; \frac{7}{3}\right)\right\}$

.

Résolution par comparaison

$$\begin{cases} 2x + y - 3 = 0 \ (E_1) \\ x - y + 2 = 0 \ (E_2) \end{cases}$$

-Exprimer y en fonction de x dans (E_1) :

$y = -2x + 3$ (1);

-Exprimer y en fonction de x dans (E_2) :

$y = x + 2$ (2) ;

-Comparer les équations (1) et (2) ;

$$-2x + 3 = x + 2$$

$$-3x = -1$$

$$x = -\frac{1}{3}$$

-Remplacer x par sa valeur dans (1) ou (2) :

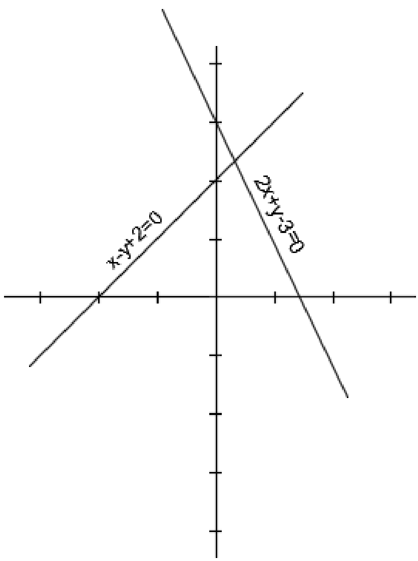
$$y = -2\left(\frac{1}{3}\right) + 3 = -\frac{2}{3} + 3 = \frac{7}{3}$$

On retrouve le couple de solution $\left(-\frac{1}{3};\frac{7}{3}\right)$

*Résolution graphique

-On trace dans le plan muni d'un repère, les droites (D_1) et (D_2) d'équations respectives

$2x + y - 3 = 0$ et $x - y + 2 = 0$, le couple de coordonnées du point d'intersection de ces deux droites est le couple de solution du système.



Remarque : cette méthode ne permet que d'avoir une solution approchée.

* Principe de résolution d'un problème du premier degré dans $IR \times IR$

-Evaluer ce qui est connu et ce qui est inconnu ;

-Choisir les inconnues ;

-Mettre en équation (équation ou inéquation ou système) ;

-Résoudre (l'équation, l'inéquation ou le système trouvé) ;

-Vérifier les résultats obtenus ;

-Conclure : donner les solutions au problème posé.

Exemple : Madji a 3 fois plus d'économie qu'Assem. A la fin du mois, leur père offre à Madji 5.000f et à Assem 3.000f alors, Madji a 2 fois plus d'argent que Assem.

Quelle était l'économie de chacun avant de recevoir de l'argent de leur père ?

Solution :

Je connais que :

-Madji a 3 fois plus d'économie que Assem et qu'en recevant 5.000f de son père, il aura 2 fois plus d'économie que Assem qui en a reçu 3.000f.

Je ne connais pas l'économie respective de Madji et Assem.

-Choix d'inconnues :

Soit x la part de Madji et y celle de Assem

-Mise en équation : $\begin{cases} x = 3y \\ x + 5000 = 2(y + 3000) \end{cases}$

-Résolution :

$\begin{cases} x = 3y \\ 3y + 5000 = 2(y + 3000) \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} x = 3y \\ 3y + 5000 = 2y + 6000) \end{cases}$

$\begin{cases} x = 3y \\ y = 1000 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} x = 3y = 3000 \\ y = 1000 \end{cases}$

-Vérification :

$$3000 = 3 \times 1000 \; et \; 3000 + 5000 = 800 = 2(1000 + 3000)$$

-Conclusion :

Madji avait 3.000f d'économies et Assem en avait 1.000f.

II.EXERCICE D'APPLICATION

Exercice 1 :

1) Résoudre graphiquement le système $\begin{cases} 2x + y - 1 = 0 \\ x - y + 4 = 0 \end{cases}$
2) Retrouver le résultat obtenu par la méthode de substitution.

Exercice 2 :

Résoudre chacun des systèmes suivants :

1) $\begin{cases} 3x - 2y - 5 = 0 \\ 2x + 3y + 7 = 0 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 5x + 3y - 7 = 0 \\ 3x - 7y + 8 = 0 \end{cases}$

Exercice 3 :

Représenter graphiquement les solutions de chacune des inéquations suivantes :

1) $-x + 4y - 5 > 0$
2) $x + y \leq 3$

Exercice 4 :

Représenter graphiquement les solutions de chacun des systèmes d'inéquations suivantes :

1) $\begin{cases} 2x + y - 1 < 0 \\ x - y + 3 < 0 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x + y + 1 \leq 0 \\ x + 3y - 2 \geq 0 \end{cases}$

Exercice 5 :

Un libraire a vendu pour la journée 23 livres dont les uns à 1500f et les autres à2800f pour une recette totale de 46200f.

Quel est le nombre de livres de chaque prix vendu par le libraire ?

CHAPITRE VI : APPLICATIONS AFFINES

I-CE QU'IL FAUT SAVOIR

a et b étant des nombres réels :

*On appelle application affine, toute application $f: IR \to IR$

$$x \to ax + b$$

a est appelé le coefficient et b est appelé le terme constant.

Exemple : $f: IR \to IR$

$$x \to ax + b$$

*Lorsque b=0, f est appelée application linéaire.

*Lorsque a=0, f est une constante.

*Lorsque a≠0, f est une bijection.

*La représentation graphique d'une application affine :

$f: x \to ax + b$ est la droite d'équation : $y = ax + b$.

*Lorsque $a > 0$:

- Pour tout u et v tels que $u < v$, $f(u) < f(v)$: on dit que f est croissante sur IR ;

-Pour tout x de$\left]-\infty; -\frac{b}{a}\right[$, $f(x) < 0$;

-Pour tout x de $\left]-\frac{b}{a}; +\infty\right[$, $f(x) > 0$;

*Lorsque $a < 0$:

-Pour tout u et v de IR tels que $u > v$, $f(u) > f(v)$: on dit que f est décroissante sur IR ;

-Pour tout x de $\left]-\infty; -\frac{b}{a}\right[$, $f(x) > 0$;

-Pour tout x de $\left]-\frac{b}{a}; +\infty\right[$, $f(x) < 0$;

II.EXERCICES D'APPLICATION

Exercice 1

Soit l'application affine définie par : $f: x \to 5x + 3$

1) Calculer $f(-1)$; $f(0)$; $f(\sqrt{2})$; $f(-\frac{1}{2})$.
2) Calculer m tel que $f(m) = 8$

Exercice 2

f est l'application affine telle que : $f(-1) = 3$; $f(2) = 1$

a) Calculer le coefficient et le terme constant de f
b) Compléter le tableau suivant :

x	-2	0	½		
f(x)				2	0

Exercice 3

1) Préciser le sens de variation de chacune des applications affines suivantes ;

2) Représenter graphiquement chacune de ces applications.

a) $f(x) = -2x + 5$

b) $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$

ACTIVITES GEOMETRIQUES

CHAPITRE I : PROPRIETES DE THALES

I-CE QU'IL FAUT SAVOIR

Propriété de Thalès

ABC est un triangle, M un point de (AB) et N un point de (AC).

Si $(BC)\|(MN)$ alors $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$

Exemple : ABC est un triangle tel que :

AB=3.8

AM=2.5

BC=3

$(BC)\|(MN)$

Calculer AC et MN.

Réciproque de la propriété de Thalès

ABC est un triangle, M un point de (AB) et N un point de (AC).

Si $\frac{\overline{AM}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AN}}{\overline{AC}}$ alors $(BC)\|(MN)$

Exemple : Soit O, B et D 3 points non alignés du plan.

A le milieu de $[OB]$ et C, le milieu de $[OD]$.

Montrer que les droites (AC) et (BD) sont parallèles.

Solution : Considérons le triangle OBD.

$A \ \in (OB) et\ C \ \in (OD)$ avec $\overline{OA} = \frac{1}{2}\ \overline{OB}$ et $\overline{OC} = \frac{1}{2}\ \overline{OD}$

Soit $\frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OC}}{\overline{OD}} = \frac{1}{2}$ d'où $(AC)\|(BD)$

ABC sont deux triangles semblables si et seulement si :

$$\frac{AB}{MN} = \frac{AC}{MP} = \frac{BC}{NP}$$

ABC sont deux triangles semblables si et seulement si :

$$mes\hat{A} = mes\widehat{M}, mes\hat{B} = mes\widehat{N}\ et\ mes\hat{C} = mes\widehat{P}$$

II.EXERCICE D'APPLICATION

Exercice 1

LMN est un triangle tel que : $K \ \in (OB)\ et\ P \ \in (OD)$ et $(MN)\|(PK)$ avec LK=5 ; LP=4 ; KM=3

Calculer NP

Exercice 2

ABC est un triangle tel qu'AC=3 et AB=7.5

Les points B' et C'appartiennent respectivement aux demi-droites $[AB]$ et $[AC]$ et sont tels que AB'=12.5 et AC'=5

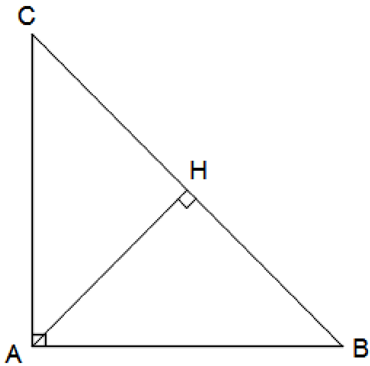
Justifier que $(B'C')||(BC)$

Exercice 3

ABC est un triangle en A. $[Ah]$ la hauteur relative à son hypoténuse.

1)a) Démontrer que les triangles ABC et HAC sont semblables.

b) En déduire que : $AC^2 = BC \times HC$ et $AB \times AC = AH \times BC$



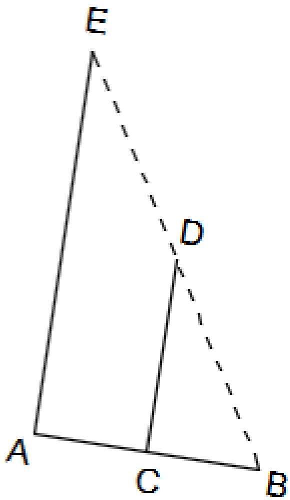
Exercice 4

On plante verticalement un bâton en A.

L'observateur vise horizontalement le point C, puis le point B.

On marque le point E où le rayon visuel (BD) rencontre le bâton.

1) Montrer que $AB = CD \times \frac{AE}{AC}$
2) Calculer AB si CD=1.5m ; AC=1.6m ; AE=1.2m



CHAPITRE II : TRIANGLE RECTANGLE ET TRIGONOMETRIE

I.CE QU'IL FAUT SAVOIR

Théorème de Pythagore : si ABC est un triangle rectangle en A, alors $AB^2 + AC^2 = BC^2$

Exemple : ABC est un triangle rectangle en A tel que AB=4 et AC=3

Calculer BC.

Solution :

$AB^2 + AC^2 = BC^2$ $AN: BC^2 = 4^2 + 3^2 = 25$

D'où BC=5

Réciproque de la propriété de Pythagore :

Si ABC est un triangle tel que $AB^2 + AC^2 = BC^2$, alors ABC est un triangle rectangle en A.

Exemple : MNP est un triangle tel que MN=13, NP=12 et MP=5

Etudier la nature du triangle MNP.

Solution : $MN^2 = 169$, $MP^2 = 25$ et $NP^2 = 144$

On a : 169=144+25 soit $MN^2 = NP^2 + MP^2$ alors le triangle MNP est rectangle en P.

ABC est un triangle rectangle en A, H le projeté orthogonal de A sur (BC) alors :

*$AH^2 = \overline{HB} \times \overline{HC}$

*$AB \times AC = BC \times AH$

Exemple : ABC est triangle en A, H le projeté orthogonal de A sur (BC) tel que :

AB=8 et AC=6

Calculer BC et AH

Solution : on a : $BC^2 = AB^2 + AC^2 = 8^2 + 6^2 = 100$

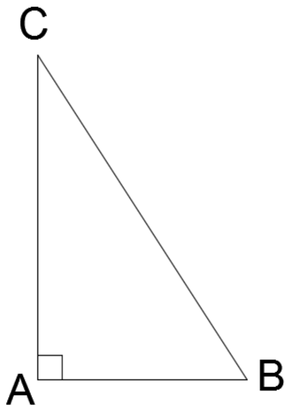
Alors BC=100 et $AB \times AC = BC \times AH$ donc

$AH = \frac{AB \times AC}{BC} = \frac{8 \times 6}{10} = 4.8$

ABC est un triangle rectangle et isocèle en A tel que AB=AC=a, alors $BC = a\sqrt{2}$

ABC est un triangle équilatéral tel que : AB=AC=BC=a et $[AH]$ la hauteur relative à $[BC]$ alors $AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

ABC est un triangle rectangle en A :



*$\cos\hat{B} = \frac{AB}{BC} = \frac{\text{côté } adjacent}{hypoténuse}$

*$\sin\hat{B} = \frac{AC}{BC} = \frac{\text{côté } opposé}{hypoténuse}$

*$\tan\hat{B} = \frac{AC}{AB} = \frac{\text{côté } opposé}{\text{côté } adjacent}$

Exemple : ABC est un triangle rectangle en A tel que

$mes\hat{B} = 60^{¤}$et $BC = 5$

Calculer AB et AC

Solution : $\cos\hat{B} = \frac{AB}{BC}$ alors $AB = BCcos\bar{B}$=$5 \times 0.5 = 2.5$

et $\sin\hat{B} = \frac{AC}{BC}$ alors $AC = BCsin\bar{B}$=$5 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$

Deux angles $\hat{A}$ et $\hat{B}$ sont complémentaires si $mes\hat{A} + mes\hat{B} = 90^{¤}$

Dans ce cas : $\cos\hat{B} = sin\hat{A}$; $sin\hat{B} = cos\hat{A}$; $tan\hat{B} = \frac{1}{tan\hat{A}}$

Pour tout angle aigu de mesure x :

$*cos^2x + sin^2x = 1$

$*0 \leq cosx \leq 1$ et $0 \leq sinx \leq 1$

Exemple : le cosinus d'un angle $\hat{A}$ aigu est $\frac{3}{4}$, calculer son sinus et sa tangente.

$cos^2\hat{A} + sin^2\hat{A} = 1$ Alors $sin^2\hat{A} = 1 - cos^2\hat{A}$

Soit $sin^2\hat{A} = 1 - \frac{9}{16} = \frac{7}{16}$. D'où $sin\hat{A} = \frac{\sqrt{7}}{4}$

$tan\hat{A} = \frac{sin\hat{A}}{cos\hat{A}} = \frac{\frac{\sqrt{7}}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{7}}{3}$ $tan\hat{A} = \frac{\sqrt{7}}{3}$

Cosinus, sinus et tangente d'angles remarquables

x	0°	30°	45°	60°	90°
$cosx$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$sinx$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$tanx$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	N'existe pas

II.EXERCICES D'APPLICATIONS

Exercice 1

ABC est un triangle équilatéral de côté 3cm et H le pied de la hauteur relative à (BC)

1) Calculer AH
2) On donne $1.732 < \sqrt{3} < 1.733$. Calculer l'approximation décimale d'ordre 2 par excès de AH.

Exercice 2

L'unité de longueur est le cm. ABC est un triangle rectangle en B tel que $mes\hat{A} = 30^{\circ}$ et AC=2.

Calculer BC et AB.

Exercice 3

ABC est un triangle rectangle en A tel que AB=7.5 et AC=12.5

1) Calculer $tan\hat{C}$
2) En déduire la valeur approchée entière de $mes\hat{C}$

Exercice 4

Sachant que $cosx = 0.6$. Calculer sinx et tanx.

Exercice 5

Pour mesurer la hauteur de l'arbre représenté par la figure ci-contre, on a effectué les mesures suivantes :

$mes\widehat{ABC} = 53^{\circ}$

$mes\widehat{ACB} = 37^{\circ}$

$mes\widehat{CDB} = 38^{\circ}$

BC=12m

Par ailleurs $(AD)\perp(BC)$

Calculer la hauteur de l'arbre.

CHAPITRE III : VECTEURS

I.CE QU'IL FAUT SAVOIR

.Egalité de deux vecteurs : deux vecteurs sont égaux s'ils sont :

- La même direction ;
- Le même sens ;
- La même longueur.

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ équivaut à $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{DC}$

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ équivaut à $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ équivaut à $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{DB}$

.A, B et sont 3 points du plan :

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ (Egalité de Chasles)

. A et B sont deux points du plan : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$: on dit que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BA}$ sont opposés et on note $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$

. $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{PQ}$ sont des vecteurs :

*$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AB}$ (Commutativité de l'addition des vecteurs)

*$\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}\right) + \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AB} + (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{PQ})$ (Associativité des vecteurs)

*$\overrightarrow{AB} + \vec{0} = \overrightarrow{AB}$ ($\vec{0}$ est l'élément neutre)

$\overrightarrow{AB}$ est un vecteur et k un nombre réel :

*Si $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$; $k.\overrightarrow{AB} = \vec{0}$;

* Si $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$; $k.\overrightarrow{AB}$ est tel que si $\overrightarrow{AC} = k.\overrightarrow{AB}$; $\overline{AC} = k.\overline{AB}$ (k est l'abscisse du point C dans le repère (A,B)).

$k.\overrightarrow{AB}$ est le produit du vecteur $\overrightarrow{AB}$ par le réel k.

Remarque :

-Si $k > 0$alors $k.\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont de même sens ;

-Si $k < 0$alors $k.\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont de sens contraires ;

. $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont des vecteurs, k et k' deux nombres réels.

* $1.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}$

*$k(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}) = k\overrightarrow{AB}+ k\overrightarrow{CD}$

* $(k + k')\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AB}+ k'\overrightarrow{AB}$

*$(k'k).\overrightarrow{AB} = kk'\overrightarrow{AB}$

Exemples :

$2\left(3\overrightarrow{AB} - 4\overrightarrow{CD}\right) + 5\left(\frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{CD}\right) = 6\overrightarrow{AB} - 8\overrightarrow{CD} + \frac{15}{4}\overrightarrow{AB} + 10\overrightarrow{CD}$

$$= (6\overrightarrow{AB} + \frac{15}{4}\overrightarrow{AB}) + (10\overrightarrow{CD} - 8\overrightarrow{CD})$$

$$= (6 + \frac{15}{4})\overrightarrow{AB} + (10 - 8)\overrightarrow{CD}$$

$$= \frac{39}{4}\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{CD}$$

.Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ont même direction équivaut à : il existe un nombre réel k tel que

$\overrightarrow{CD} = k.\overrightarrow{AB}$

.$(AB) \parallel (CD)$ équivaut à : il existe un nombre réel non nul k tel que $\overrightarrow{CD} = k\overrightarrow{AB}$

.Deux vecteurs sont orthogonaux s'ils sont vecteurs directeurs de droites perpendiculaires.

.A et B sont deux points du plan et M un point du plan :

$M \in (AB)$ équivaut à $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires.

.Les points A, B et C sont alignés équivaut à : il existe un nombre réel k non nul tel que $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$

.I est milieu de $[AB]$ équivaut à $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AI}$

équivaut à $\overrightarrow{IA} = -\overrightarrow{IB}$

.Le plan est muni d'un repère (O,I,J) :

*A et B sont deux points du plan, le couple de coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est le couple (x,y) tel que équivaut à

$\overrightarrow{AB} = x\overrightarrow{OI} + y\overrightarrow{OJ}$

Notation $\overrightarrow{AB}(x; y)$ ou $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

.Etant donnés les vecteurs $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} x\prime \\ y\prime \end{pmatrix}$ alors

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} x+x\prime \\ y+y\prime \end{pmatrix}$

Exemple : $\overrightarrow{AB}\binom{-3}{7}$ et $\overrightarrow{CD}\binom{8}{2}$, alors $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}\binom{5}{9}$

.Etant donné un vecteur $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et k, un nombre réel, alors $k\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$

Exemple : $\overrightarrow{AB}\binom{1}{-3}$, $-4\overrightarrow{AB}\binom{-4}{12}$

Le plan est muni d'un repère (O,I,J)

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} x\prime \\ y\prime \end{pmatrix}$ sont colinéaires équivaut à $xy' - yx' = 0$

Le plan est muni d'un repère (O,I,J)

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} x\prime \\ y\prime \end{pmatrix}$ sont orthogonaux équivaut à $xx' + yy' = 0$

Exemple : $\overrightarrow{AB}\binom{3}{2}$ et $\overrightarrow{CD}\binom{-6}{-4}$:

$3 \times (-4) - 2 \times (-6) = -12 + 12 = 0$

Alors les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

$\overrightarrow{AB}\binom{-2}{1}$ et $\overrightarrow{CD}\binom{2}{4}$: $2 \times (-2) + 1 \times 4 = -4 + 4 = 0$

Alors les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont orthogonaux.

.Le plan est muni d'un repère (O,I,J)

A(x ; y) et B(x' ; y'), alors $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x'-x \\ y'-y \end{pmatrix}$

Exemple : A(7 ;-3) B(4 ;2) alors $\overrightarrow{AB}\binom{-3}{5}$

Le plan est muni d'un repère (O,I,J)

A(x ;y), B(x' ;y') et I le milieu de $[AB]$ alors $I = (\frac{x+x'}{2}; \frac{y+y'}{2})$

Exemple : A (2 ;8), B(-4 ;6) et I le milieu de $[AB]$ alors

$I = (\frac{2+(-4)}{2}; \frac{8+6}{2})$; I(-1 ;7)

.Le plan est muni d'un repère orthonormé (O,I,J)

A(x ;y), B(x',y') alors la distance de A à B est :

$AB = \sqrt{(x'-x)^2 + (y'-y)^2}$

Exemple : A(-2 ;5), B(4 ;1) alors $AB = \sqrt{(4+2)^2 + (1-5)^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$

III.EXECRCICES D'APPLICATION

Exercice 1

A, B, C, D, E, F et G sont des points du plan.

Simplifier l'écriture de chacune des sommes suivantes :

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{EG}$
b) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{BE}$
c) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{ED}$

Exercice 2

A, B, C et D sont des points du plan.

Construire :

a) Le point M tel que :$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}$
b) Le point N tel que :$\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$

Exercice 3

A, B et O sont trois points distincts et non alignés du plan. A' et B' sont les symétriques respectifs de A et B par rapport à O.

Démontrer que :

a) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{B'A'}$
b) $\overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{BA'}$

Exercice 4

A, B et C sont trois points distincts et non alignés du plan.

1) Construire les points E et F tels que $\overrightarrow{BE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$
2) Exprimer $\overrightarrow{EF}$ en fonction de $\overrightarrow{AC}$

Exercice 5

On considère les points A(5 ;4), B(4 ;0), P(-2 ;-1) et E(-1 ;3)

1) Calculer les coordonnées des vecteurs$\overrightarrow{AC}$,$\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE}$et $\overrightarrow{AP}$
2) a) Comparer les vecteurs $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AP}$.
   b) Quelle est la nature du quadrilatère ACPE.

Exercice 6

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on donne les points suivants :

A(-2 ;-2), B(-4 ;4), C(2 ;6) et D(4 ;0)

1) Calculer les coordonnées du milieu de $[AC]$, puis celui $[BD]$

En déduire que $[AC]$ et $[BD]$ ont même milieu.

2) Comparer les distances AC et BD.
3) Démontrer que$\overrightarrow{AC \perp BD}$.

4) Déduire de tout ce qui précède la nature du quadrilatère ABCD.

CHAPITRE : IV : EQUATIONS DE DROITES

I.CE QU'IL FAUT SAVOIR

.Dans le plan muni d'un repère (O,I,J).

*Toute droite (D) a une équation de la forme $ax + by + c = 0$

(a, b et c sont des nombres réels avec (a,b)≠(0 ;0)).

*Réciproquement, toute équation de la forme $ax + by + c = 0$

(a, b et c sont des nombres réels avec (a,b)≠(0 ;0)) est une équation de droite.

Exemples : $(D_1): 2x - y + 3 = 0$

$(D_1): 2x - y + 3 = 0$

.Etant donné les points distincts A et B, M, un point du plan.

$M \in (AB)$ équivaut à $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires or

$\overrightarrow{AM}(x-2; y+3)$ et $\overrightarrow{AB}(-6; 6)$, donc

$M \in (AB)$ équivaut à $-6(x-2) - 6(y+3) = 0$

équivaut $-6x + 12 - 6y - 18 = 0$

équivaut $-6x - 6y - 6 = 0$

Conclusion : La droite (AB) : $-6x - 6y - 6 = 0$

Remarque : $-x-y-1=0$; $x+y+1=0$; $y=-x-1$ etc sont des droites d'équations équivalentes à $-6x-6y-6=0$ donc elles sont aussi équations de la droite(AB).

.Toute droite (D) non parallèle à l'axe des ordonnées a pour équation : $y = mx + p, (m \neq 0)$

-m est appelé le coefficient directeur de la droite (D) ;

-p est appelé son ordonnée à l'origine.

Exemple : (D) : $y = 5x + 8$

Le coefficient directeur de la droite (D) est 5 et son ordonnée à l'origine est 8.

Remarque : Si A et B ont deux points du plan tels que la droite (AB) est non parallèle à l'axe des ordonnées, alors le coefficient directeur de la droite (AB) est :

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

Exemple : A(-1 ;1) et B(3 ;2), alors $m = \frac{2-1}{3+1} = \frac{1}{4}$

.Le plan est muni d'un repère (O,I,J).

Les droites (D) et (D') ont pour coefficient respectifs m et m'

$(D) \parallel (D')$ équivaut à m=m'

.Le plan est muni d'un repère orthonormé (O,I,J).

Les droites (D) et (D') ont pour coefficient respectifs m et m'.

$(D)\perp(D')$ équivaut à $m \times m' = -1$

II.EXERCICIES D'APPLICATION

Exercice 1

Parmi les points suivants D(-1 ;1) ; E(-87 ;177) ; A(3 ;-2) ; B(1 ;1) et C(0 ;3).

1) Quels sont les points qui appartiennent à la droite (D) : $y = -2x + 3$
2) Construire la droite (D)

Exercice 2

A(-3 ;2) et B(1 ;5) sont deux points du plan muni d'un repère (O,I,J).

1) Déterminer une équation de la droite (AB) ;
2) Déterminer une équation de la droite (D_1) parallèle à (AB) et passant par l'origine O ;
3) Déterminer une équation de la droite (D_2) perpendiculaire à (AB) et passant par le point C(-1 ;1).

Exercice 3

Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O,I,J), on donne la droite (D) :$y = mx + 2$

Déterminer m dans chacun des cas suivants :

1) La droite (D) passe par le point $A(\frac{2}{3}; 1)$
2) (D) est parallèle à (D_1) d'équation :$3x - 2y + 7 = 0$;
3) (D) est perpendiculaire à (D_2) d'équation :
   $-2x - 5y + 4 = 0$;

Exercice 4

Le plan est muni du repère (O,I,J)

Les droites (D) et (D') ont pour équation respectives

$-x + 4y - 3 = 0$ et $y = 2x - \frac{3}{2}$

1) Démontrer que les droites (D) et (D') sont sécantes ;
2) Calculer le couple de coordonnées de leur point d'intersection.

CHAPITRE V : ANGLES INSCRITS

I.CE QU'IL FAUT SAVOIR

.(C)est un cercle de centre O.

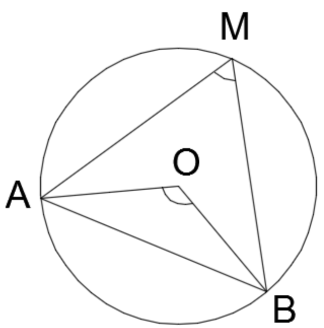
.A, B et M sont des points de (C)

*l'angle $\widehat{AMB}$ est un angle inscrit dans le cercle (C) ;

*l'angle $\widehat{AOB}$ est un angle au centre ;

*l'angle au centre $\widehat{AOB}$ est associé à l'angle inscrit $\widehat{AMB}$;

*l'angle au centre $\widehat{AOB}$ et l'angle aigu inscrit $\widehat{AMB}$ interceptent le même arc $\widehat{AB}$.

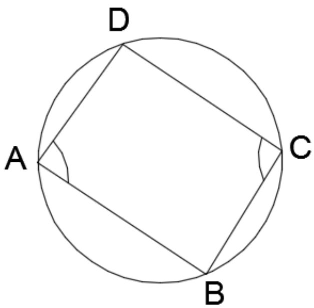


*$mes\widehat{AMB} = \frac{1}{2}mes\widehat{AOB}(\widehat{AMB}aigu)$

**$mes\widehat{AMB} = 180° - \frac{1}{2}mes\widehat{AOB}(\widehat{AMB}\ obtus)$

.Deux angles inscrits interceptent le même arc si et seulement s'ils ont même mesure.

.ABCD est un quadrilatère inscriptible dans le cercle alors ses angles opposés sont supplémentaires :



$*mes\widehat{BAD} + mes\widehat{BCD} = 180°$

$*mes\widehat{ADC} + mes\widehat{ABC} = 180°$

.La somme des mesures des angles d'un triangle est égale à 180° (πrad)

II.EXERCICE D'APPLICATION

Exercice 1

1) Tracer un triangle ABC isocèle de sommet A et le cercle (C) de centre O circonscrit à ce triangle.
2) Soit M un point de (C) non situé sur l'arc$\widehat{AB}$.
   a) Comparer les angles $\widehat{AMB}$ et $\widehat{ACB}$
   b) Sachant que $mes\widehat{ABC} = 70°$, calculer les mesures des angles $\widehat{AMB}$ et$\widehat{AOB}$.

Exercice 2

(C) est un cercle de centre O, $[AB]$ une corde ne passant pas par O et E un point du grand arc $\widehat{AB}$.

La bissectrice de l'angle au centre $\widehat{AOB}$ coupe le petit arc $\widehat{AB}$ au point F.

Comparer mes$\widehat{AOB}$ et mes$\widehat{AEB}$.

Exercice 3

ABC est un triangle inscrit dans un cercle (C) de centre O et tel que les angles $\widehat{AOB}$ et $\widehat{BOC}$ sont adjacents et mes$\widehat{AOB}$=50° et mes$\widehat{BOC}$=100°

Calculer la mesure de chacun des angles du triangle ABC.

CHAPITRE V : .SYMETRIES ET TRANSLATIONS

I.CE QU'IL FAUT SAVOIR

DEFINITIONS

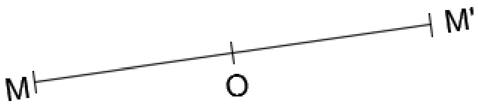
Symétrie centrale

O étant un point du plan P.

On appelle symétrie centrale de centre O, l'application du plan dans lui-même, qui à tout point M associe le point M' tel que O est le milieu de $[MM']$.

Notation : $S_0 : P \to P$

$$M \to M'$$



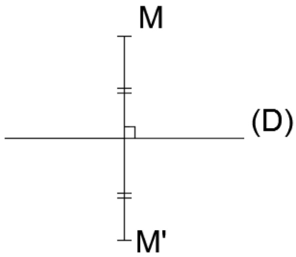
Symétrie orthogonale

(D) est une droite du plan P.

On appelle symétrie orthogonale d'axe (D), l'application du plan dans lui-même, qui à tout point M associe le point M' tel que (D) est la médiatrice de $[MM']$.

Notation : $S_D : P \to P$

$M \to M'$



Translation

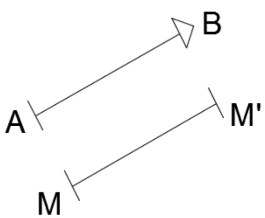
$\overrightarrow{AB}$ est un vecteur du plan.

On appelle translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$, l'application du plan dans lui-même, qui à tout point M associe le point M' tel que

$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AB}$.

Notation : $t_{\overrightarrow{AB}} : P \to P$

$M \to M'$



PROPRIETES

Par une symétrie centrale ou une symétrie orthogonale ou une translation :

*les images des points alignés sont des points alignés ;

*l'image d'un segment est un segment de même longueur ;

*l'image du milieu d'un segment est le milieu du segment image ;

*l'image d'une droite est une droite ;

*les images de deux droites parallèles sont deux droites parallèles ;

*les images de deux droites perpendiculaires sont deux droites perpendiculaires ;

*l'image d'un cercle est un cercle de même rayon ;

*l'image d'un angle est un angle de même mesure ;

*l'image du point d'intersection de deux figures est le point d'intersection des figures images.

Composée de deux symétries centrales (symétries successives) :

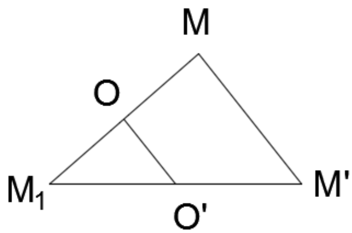
S_o et $S_{o'}$ sont deux symétries centrales respectives de centre O et O'.

La composée des symétries S_o et $S_{o'}$(ou S_o suivie de $S_{o'}$) est la translation de vecteur $\overrightarrow{2OO'}$

Notation : $S_o 0 S_{o'=t_{\overrightarrow{2OO'}}}$

$$S_o \qquad S_{o'}$$

$$M \longmapsto M_1 \longmapsto M'$$



.Composée de deux symétries orthogonales (symétries successives) :

*$S_{(D)}$ et $S_{(D')}$ sont deux symétries orthogonales d'axes respectifs (D) et (D') parallèles.

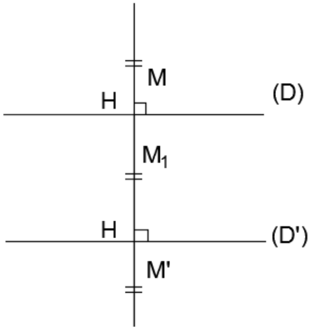
La composée des symétries $S_{(D)}$ et $S_{(D')}$(ou $S_{(D)}$ suivie de $S_{(D')}$) est une translation.

Notation :

$$S_{(D)} \qquad S_{(D')}$$

$$M \longmapsto M_1 \longmapsto M'$$

$$S_{(D)} \mathrm{O}\, S_{(D')} = t_{\overrightarrow{2HH'}}$$



*$S_{(D)}$ et $S_{(D')}$ sont deux symétries orthogonales d'axes respectifs (D) et (D') perpendiculaires en O.

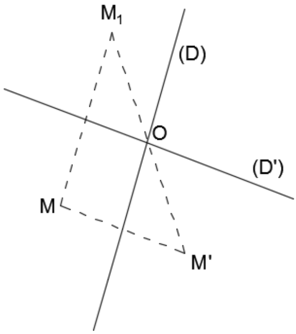
La composée des symétries $S_{(D)}$ et $S_{(D')}$ (ou $S_{(D)}$ suivie de $S_{(D')}$) est la symétrie centrale de centre O.

Notation :

$$\quad S_{(D)} \qquad S_{(D')}$$

$$M \longmapsto M_1 \longmapsto M'$$

$$S_{(D)} \mathrm{O}\, S_{(D')} = S_O$$



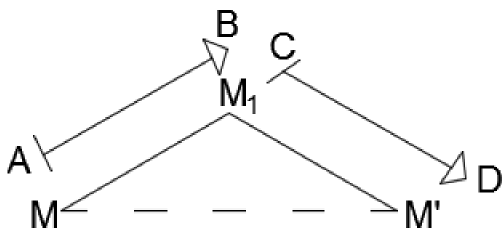
.Composée de deux translations

La composée de deux translations de vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ est une translation de vecteurs $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$.

$t_{\overrightarrow{AB}} \quad t_{\overrightarrow{CD}}$

$M \longmapsto M_1 \longmapsto M'$

$t_{\overrightarrow{AB}}$ O $t_{\overrightarrow{CD}} = t_{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}}$



II.EXERCICES D’APPLICATION

Exercice 1

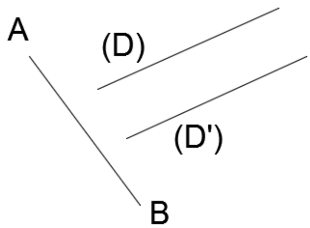
ABCD est un rectangle, (Δ) et (Δ') sont les médiatrices des côtés.

On considère les symétries orthogonales $S_{(\Delta)}$ et $S_{(\Delta')}$.

1) Quelle est l’image de A :
   a) Par la composée de $S_{(\Delta)}$ et $S_{(\Delta')}$;
2) Même question avec les points B, C et D.

Exercice 2

Les droites (D_1) et (D_2) sont parallèles et $[AB]$ est un segment tel que (AB) n’a pas la même direction que ces deux droites.



On considère les symétries S_1 et S_2 d’axes orthogonales respectives (D_1) et (D_2).

1) Construire l’image $[A'B']$ de $[AB]$ par la composée de S_1 et S_2.
2) Démontrer que $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'}$
3) Quelle est la nature du quadrilatère AA’B’B ?

Exercice 3

Soit ABC un triangle, I le milieu de $[AB]$ et J, le milieu de$[BC]$.

Soit I' le symétrique de I par rapport à B et I'' le symétrique de I' par rapport à J.

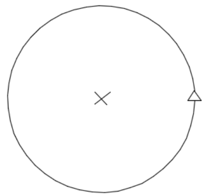
1) Faire une figure ;
2) Nommer la composée de la symétrie de centre B et de la symétrie de centre J.
3) a) Démontrer que $\overrightarrow{BC'} = \overrightarrow{II''}$
   b) En déduire la nature du quadrilatère BII''C.

CHAPITRE VII : ROTATIONS ET HOMOTHETIES

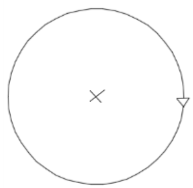
I.CE QU'IL FAUT SAVOIR

Dans le plan, on distingue 2 sens de déplacement sur un cercle ;

-Le sens direct : le sens contraire des aiguilles d'une montre



-Le sens indirect : le sens des aiguilles d'une montre



.A et B étant 2 points d'un cercle (C) non diamétralement opposés.

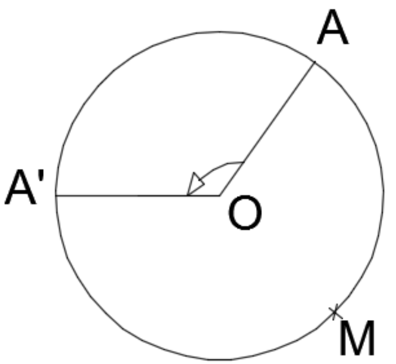
Le sens de déplacement de A vers B sur (C) est le sens de déplacement de A vers B sur le petit arc $\widehat{AB}$.

.Etant donné un triangle OAA' isocèle en O, (C) le cercle de centre O et de rayon OA.

On appelle rotation de centre O et d'angle $\widehat{AOA'}$, l'application du plan dans le plan qui, à tout point M associe le point M' tel que :

-Si M=0, alors M'=0

-Si M≠0, alors OM'=OM, $mes\widehat{MOM'} = mes\widehat{AOA'}$ et le sens de déplacement de M vers M' sur le cercle (C) de centre O et de rayon OM est celui de A vers A' sur le cercle (C).



L'image d'un segment par une rotation est un segment de même longueur.

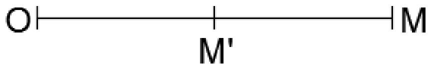
.Etant donné un point O du plan et k, un nombre réel différent de 0.

On appelle homothétie de centre O et de rapport k, l'application du plan dans le plan qui à chaque point M, associe le point M' tel que $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$

Exemple :

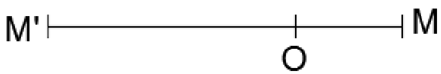
-Soit h, l'homothétie de centre O et de rapport $\frac{1}{2}$:

$M \longmapsto M', \overrightarrow{OM'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OM}$



-Soit h l'homothétie de centre A et de rayon -3 :

$M \longmapsto M', \overrightarrow{OM'} = -3\overrightarrow{OM}$



.Par une homothétie de rapport k, si A a pour image A' et B a pour image B', alors :

*le segment $[AB]$ a pour image le segment $[A'B']$ tel que A'B'=kAB

*La droite (AB) a pour image la droite (A'B') telle que $(AB) \parallel (A'B')$

II.EXERCICE D'APPLICATION

Exercice 1

ABC est un triangle équilatéral inscrit dans un cercle de centre O, on désigne par r la rotation de centre O qui applique A sur B.

1) Quelles sont les images par r de chacun des points O, B et C ?
2) Quelles sont les images respectives des triangles ABC et OBC par r ?

Exercice 2

MNPQ est un rectangle de centre I.

On désigne par r la rotation de centre I et qui applique M sur N ;

1) Quelles sont les images respectives de r de chacun des points I et P ?

2) Construire les images respectives R et S par r des points N et Q ?

3) Quelle est l'image par r du rectangle MNPQ ? Quelle est sa nature ?

Exercice 3

2) Déterminer les composantes (ou coordonnées) des vecteurs$\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AC}$.

3) Calculer les distances AB, BC et AC.

4) En déduire la nature du triangle ABC

5) Déterminer les coordonnées du point I milieu du segment $[AC]$

6) Soit (Δ) la droite passant par B et I. Donner une équation de la droite(Δ).

7) Soit (Δ') la droite passant par (C) et de vecteur directeur$\overrightarrow{AB}$. Donner une équation de la droite (Δ') .

8) Soit D le symétrique de B par rapport à I ; donner ses coordonnées.

9) Soit k le point d'intersection de (Δ) et (Δ') ; donner les coordonnées de K. Que remarque-t-on ?

10) Donner la nature du quadruplet ABCD.

<u>Documents ayant servi à élaborer ce support de cours</u>

Mathématiques, guide pédagogique, CIAM Edicef,1997

Myriade 3^e Maths, Manuel de l'élève, Sous la direction de M. Marc Boullis Bordas 2016

Partenariat
Lycée Saint François Xavier
Label 109

Livret à ne pas vendre

Contact
info@label109.org

Télécharger gratuitement les applications et livres numériques sur le site:
http://www.tchadeducationplus.org

Mobile et WhatsApp: 0023566307383

Rejoignez le groupe: https://www.facebook.com/groups/tchadeducationplus