MATHS

2ndS

Ensemble,Construisons Demain
Edu+

MATHS

Seconde S

Table de Matières

ACTIVITES NUMERIQUES

Chapitre 1 : Théorie des ensembles

I. Notion d'ensembles, d'appartenance

1. Définition

Un ensemble est défini comme une collection ou un regroupement d'objets appelés élément d'un ensemble.
En mathématique, on considère ou on distingue les objets, comme des nombres (chiffres, des couples, des relations, …)
On peut former des ensembles avec des objets et les objets d'un ensemble sont dits éléments.
Exemple : La classe de 2^{nde} SI forme un ensemble et les éléments de cette classe sont les objets (éléments) de cet ensemble.

2. Notation

- Un ensemble en mathématiques est noté par la lettre majuscule ;
- Un élément en mathématiques est noté par la lettre en minuscule et des chiffres.

Exemple : $\mathrm{E} = \{\mathrm{a}\ ;\ \mathrm{b}\ ;\ \mathrm{c}\ ;\ \mathrm{d}\ ;\ \mathrm{e}\ ;\ \mathrm{f}\}$, $\mathrm{A} = \{0\ ;\ 1\ ;\ -1\ ;\ 3\ ;\ 4\ \}$
$A\ \ et\ E$ sont des ensembles finis des éléments.

- Un ensemble est défini en extension si on énumère les éléments.

Exemple : $A\ \ et\ E$ sont des ensembles définis en extension.

- Un ensemble est défini en compréhension, si les éléments sont explicites.

Exemple : F={tous les nombres supérieurs ou égal à 10}
Remarque : Un ensemble est vide s'il n'a pas et l'ensemble est noté $\emptyset$ ou$\{\}$.

3. Notion d'appartenance

On dit qu'un élément x appartient à un ensemble E et on note "$x \in E$" ; si x n'appartient pas à E, on écrit . "$x \notin$E"
Dans un univers U, un ensemble E est utilisé pour chaque objet x de l'univers U, on peut décider soit $x \in E$ et soit $x \notin$E

4. Les notions usuelles sur les ensembles

N: C'est l'ensemble des nombres entiers naturels : $\mathrm{N} = \{0\ ;\ 1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ ...\}$.
Z: C'est l'ensemble des nombres relatifs : $\mathrm{Z} = \{\ ...\ ; -3\ ; -2\ ; -1\ ;\ 0\ ;\ +1\ ;\ +2\ ;\ +3\ ; ...\}$
φ : C'est l'ensemble des nombres relationnels : $\varphi = \{\ ...\ ; -1/3\ ;\ -1/2\ ;\ 0\ ;\ ½\ ;\ ½\ ;\ 1/3\ ;\ ¼\ ;\ ...\}$
D : C'est l'ensemble des nombres décimaux :
$\mathrm{D} = \{...\ ;\ -0{,}3\ ;\ -0{,}2\ ;\ -0{,}1\ ;\ 0\ ;\ 0{,}1\ ;\ 0{,}2\ ;\ 0{,}3\ ;\ ....\}$
R : C'est l'ensemble des nombres réels :
$\mathrm{R} = \{-\infty\ ;\ ...\ ;\ -3\ ;\ -2\ ;\ -1\ ;\ 0\ ;\ 1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ ...\ ;\ +\infty\ \}$
Remarque : Nous avons les inclusions suivantes : $\mathrm{N} \subset \mathrm{Z} \subset \varphi \subset \mathrm{D} \subset \mathrm{R}$

- Si 0 est l'ensemble nul de l'ensemble N, l'ensemble N'{0} est l'ensembles des entiers non nuls et on note N* ;
  N*= {1 ;2 ;3 ;4 ;…}=N'{0} de même pour Z* ; D* ; Q* et R*.
- Z+ est l'ensemble des nombres entiers relatifs positifs : Z+= {0 ; 1 ; 2 ; 3 ;…}=N ; de même pour Q+ ; D+ et R+.
- Z- est l'ensemble des nombres entiers négatifs : Z-= {… ; -3 ; -2 ; -1 ; 0} ; de même pour Q- ; D- et R-.
- Z^*_+ est l'ensemble des entiers relatifs strictement positifs : Z^*_+= {1 ; 2 ; 3 ;…}=N* ; de même pour Q^*_+ ; D^*_+ et R^*_+.
- Z^*_- est l'ensemble des entiers relatifs strictement négatifs : Z^*_-={… ; -3 ; -2 ; -1} ; de même pour Q^*_- ; D^*_- et R^*_-.

5. Cardinal d'un ensemble

Le cardinal d'un ensemble est le nombre des éléments que contient un ensemble. On considère un ensemble E finis d'éléments et son cardinal est noté ''Card (E)''.

Exemple : Soit E $= \{-2\,;-1\,;0\,;2\,;3\}$.

Donnons le cardinal de E. On a : Card (E)=5.

A $= \{n\,;y\,;z\,;a\,;b\,;c\,;d\,;e\,;f\}$

Card (A)=9.

6. Notion de la logique

Les théories des mathématiques se construisent à l'aide de règle logique en se servant d'un vocabulaire particulier que l'on utilise par fois dans son langage courant.

a) Vocabulaire de la logique

Le langage mathématique utilise à la fois le forage courant convenable et précis, des signes mathématique de fois : les parenthèses ( ) ; les crochets [ ] ; les accolades { } ; et les signe spécifiques tel que :(+. = ; x ; / ; ≥ ; <,…).

Nous affirmons que le langage mathématique est pratiquement un langage symbolique.

b) Proposition (assertion)

Nous appelons assertion, tout énoncé par le quel on affirme sans hésitation et renseignement complémentaire s'il est vrais ou faux (chacune de ces assertions excluent l'autre).

c) La table de vérité

Considérons par exemple deux(2) assertions p et q , deux(2) cas possibles peuvent découler de cette assertion (vrai et faux).

Dans ce cas nous pouvons établir la table de vérité de quatre(4) lignes dans les lignes qui suivent :

P	Q
V	V
V	F
F	V
F	F

V = 1
F = 0

$\Longrightarrow$

P	Q
1	1
1	0
0	1
0	0

7) Les connecteurs logiques

D'une manière générale, nous enregistrons cinq(5) connecteurs logiques en mathématique, à savoir : la conjonction ; la disjonction ; la négation, l'implication et l'équivalence.

a) **La conjonction(1)**

Soit p et q deux (2) assertions données dans une énoncée. La conjonction de p et q est noté ''pΛq'' et on lit « p et q ». Si nous considérons à la fois les énoncés p et q on dit que p et q sont conjoints.

La conjonction p et q est vrai si et seulement si p et q sont tous deux (2) vrais.

Table de vérité de pΛp :

p	Q	pΛq
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

b) **La disjonction (v)**

La disjonction de p et q est noté ''p$\vee$q et on lit « p ou q ». Si nous considérons au moins un des énoncées p, q on dit que p et q sont la conjonction p$\vee$q est v rai si au moins un des p, q est vrai

Table de vérité de pvq

P	**Q**	pvq
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

c) **Négation « ne … pas » ou « non » ($\urcorner$)**

Si p est une énoncé, sa négation se note $\urcorner$p ou $\bar{P}$et on lit « non p ».

Si p est vrai, $\bar{P}$est faux si $\bar{q}$ est vrai, q est faux.

La table de vérité de la négation

p	q	$\bar{P}$	$\bar{q}$
1	1	0	0
1	0	0	1
0	1	1	0
0	0	1	1

d) **Implication ($\Rightarrow$)**

L'implication de p et q se note ''p $\Rightarrow$q'' et on lit « p implique ».quand on exprime un conditionnel par la locution.

L'implication p $\Rightarrow$ q est vraie si la disjonction $\bar{P}$ $\vee$q est vraie : $\bar{P}\vee$q = p$\Rightarrow$q

Table de vérité de p ⇒ q

p	Q	$\bar{P}$	$\bar{P}$∨q = p⇒q
1	1	0	1
1	0	0	0
0	1	1	1
0	0	1	1

e) L'Equivalence (⇔)

L'équivalence de p et q se note" p⇔q " et on lit : « p équivaut à q ». On exprime donc un biconditionnel.

Si deux implications p⇒q et q⇒p sont vraies, ont dit que les énoncées p et q sont équivalents et on écrit : p ⇔q

Tableau de vérité de p ⇔q

p	q	$\bar{P}$	$\bar{q}$	p⇒q	q⇒p	p⇒q
1	1	0	0	1	1	1
1	0	0	1	0	1	0
0	1	1	0	1	0	0
0	0	1	1	1	1	1

f) Contraposée

L'implication p ⇒ q et $\bar{q}$⇒p sont équivalentes c'est-à-dire (p⇒ p) ⇔(q̅⇒p).

En effet, les deux(2) derniers colonnes de la table de vérité sont identiques, l'implication $\bar{q}$ ⇒$\bar{P}$ est dite contraposée de p⇒q.

Table de vérité :

p	Q	$\bar{q}$	$\bar{P}$	p⇒q	$\bar{q}$ ⇒$\bar{P}$
1	1	0	0	1	1
1	0	1	0	0	0
0	1	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1

g) conséquences :

Tous les ensembles vides sont égaux. En effet, soit A et B deux ensembles vides « si $x \in A\ alors\ x \in B$» est vrai, (cas o⇒o de l'implication).

« si $x \in B\ alors\ x \in A$» est vrai (même cas). Ainsi on dit qu'il n'Ya qu'un ensemble vide (Q).

h) Egalité

- Des éléments x et y d'un ensemble E sont égaux, et on écrit x=y si x et y représente le même objet.
- Un élément n'est égal qu'à lui-même, cette égalité est appelée identité.
- On dit que des ensembles A et B sont égaux, et on note A=B ; si tous les éléments de B et si tous les éléments de B sont éléments de A.

  $A = B, \Leftrightarrow \forall x$ (x ∈ A⇒ $x \in$ B et $x \in$ B⇒($x \in$ A

L'égalité de deux(2) ensembles est caractérisée par la présence de mêmes éléments.

Exemple : soit A {1 ; 2 ; 4 ; 8}

$B = \{x \in$ N est un diviseur de 8} on à A $=$ B.

Propriété :

L'égalité des ensembles est :

- Réflexive : A = A
- Symétrique : A =B⇒ B=A
- Transit A=B et B=C) ⇒(A=C)

8) Les quantificateurs

Chaque élément de l'ensemble E possède la propriété p : on écrit∀ x,

$P(x)$ $\bar{q}$ se lit « quel que soit x » ou « pour tout x » appartenant à E, la propriété est vraie pour $\boldsymbol{x}$. Le symbole ∀ est appelé quantificateur universel.

Le quantificateur universel nous sert à désigner un et un seul élément.

- Si l'ensemble E ne comprend pas tous les objets de l'univers U, on écrit $\exists\ x\ \in$ u, $\bar{P}\ (x)$ $\bar{q}$ se lit « il existe au moins un élément x de l'univers U tel que la propriété p n'est pas vraie pour x » Alors on dit que $x \notin$ E

Le symbole ∃ est appelé quantificateur existentiel.

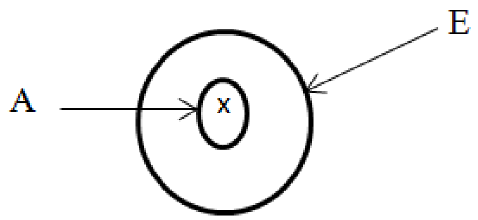
Remarque : on observe que les quantificateurs de même nature peuvent s'intervenir de ce qui est faux lorsqu'il est de la nature différente.

9) partie d'un ensemble

a) Inclusion(c)

Tous ensemble A formé avec les éléments de E, est appelé sous ensemble au partie de E. on affirme que A est inclus dans E et que contient A, ce qui se note :

A⊂E et E contient A(E⊃ A) et on dénonce comme suit A ⊂ E⇔∀ X (X £ A⇒X £ E)



Si $A \not\subset E$ signifie qu'il existe au moins un élément de A qui ∉ à E.

∀E, O ⊂ E alors, ∅ est la partie vide de E

b) propriétés de l'inclusion

Les propriétés suivantes sont une conséquence de la définition

- L'inclusion est réflexible ; lors A ⊂ A ;

- Elle est antisymétrique ; (A ⊂ B et B ⊂ A) ⇒A=B ;
- Elle est transitive (A ⊂ B et B ⊂ C) ⇒A⊂ C.

  Remarque :

  Pour démontrer l'égalité de deux(2) ensembles A et B, on peut utiliser l'antisymétrique.

C) Partie complémentaire

- **Définition** : on appelle complémentaire d'une partie A d'un ensemble E, l'ensemble des éléments de E qui ∉ à l'ensemble A.

  On le note C_E^A ou plus simplement CA ou encore $\bar{A}$ et on lit « complémentaire de A par rapport à E » ou complémentaire de A dans E ».

  $\mathrm{C_E^A} = \{x\ / x \in \mathrm{E} \text{ et } x \notin \mathrm{A}\}$
- **Cas particulier** :

  $\mathrm{C_E^E} = \emptyset; \mathrm{C_E^\emptyset} = \mathrm{E} \text{ et } \mathrm{C_E}(\mathrm{C_E^A}) = \mathrm{A}$
- **Preuve**

En effet, si A est défini par une propriété P

$\mathrm{A} = \{x \in \mathrm{E}\ /\ \mathrm{P}(x)\}$

$\mathrm{C_E^A} = \{x \in \mathrm{E}\ /\overline{\mathrm{P}}(x)\}$

$\mathrm{C_E}(\mathrm{C_E^A}) = \{x \in \mathrm{E}/ \neg\, \mathrm{P}(x)\} \text{ or } \neg\, \mathrm{P}(x)$

$= \mathrm{P}(x)\ = \{x \in \mathrm{E}/\mathrm{P}(x)\}$

$\Rightarrow \mathrm{C_E}(\mathrm{C_E^A}) = \mathrm{A}$

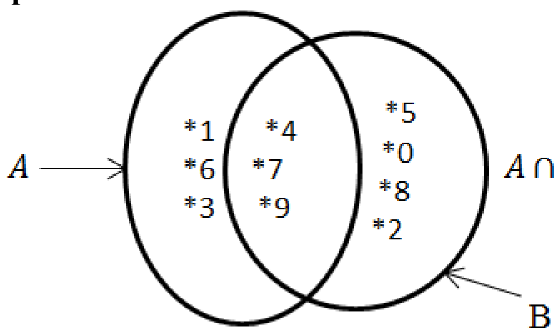
II. Opérations sur les ensembles

1 – **Intersections**

On appelle intersection de deux(2) ensembles A et B l'ensemble formé des éléments qui est à la fois à A et B. cet ensemble est noté : "$A \cap B$" et on lit « A inter B »

$On\ a : x \in A \cap B \Leftrightarrow (x \in A\ et\ x \in B)$

Exemple : soit :



$A \cap B = \{4\ ;\ 7\ ;9\}$

Si A est défini par une propriété caractéristique P et B est défini par une propriété caractéristique q, alors :

A∩B = $\{x\ £\ E/P(x)\Lambda q(x)\}$. $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \{x \in \mathrm{E}/\mathrm{P}(x) \wedge \mathrm{q}(x)\}$

L'intersection correspond d'après la rotation ci – dessus.

- **Cas particulier**

  Si $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \emptyset$, les ensembles A et B sont dites disjoints.

  Exemple :

  $\mathrm{A} = \{\mathrm{a}\ ;\ \mathrm{b}\ ;\mathrm{c}\ ;\ \mathrm{d}\ \}\ ;\ \mathrm{B}\ =\ \{\ \mathrm{b}\ ;\ \mathrm{d}\ ;\ \mathrm{e}\ ;\ \mathrm{f}\ \} \text{ et } \mathrm{C}\ =\ \{x\ ;\ 1\ ;\mathcal{Y}\ ;2\ ;\mathfrak{z}\ \}$

  Donnons les éléments des ensembles suivants

  $\mathrm{A} \cap \mathrm{B}\ =\ \{\mathrm{b}\ ;\mathrm{d}\}\ ;\ \mathrm{A} \cap \mathrm{C}\ = \emptyset\ ;\ \mathrm{B} \cap \mathrm{C} = \{\ \}$

  Donnons leurs cardinaux :

  Card $(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})\ =\ 2\ ;$card$(\mathrm{A} \cap \mathrm{C}\ =\ 0\ ;$ card$(\mathrm{B} \cap \mathrm{C})\ =\ 0$

Propriétés:

Soit A, B, C des parties de E.

- $\cap$ est commutative : $A \cap B = B \cap A$.
- $\cap$ est associative : $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
- $\forall A \in P(E)$; $A \cap A =$:(on dit que A est idempotent des éléments de P(E) pour l'intersection.

$A \cap \emptyset = \emptyset$, on exprime ce fait en disant que $\emptyset$ est absorbant pour l'intersection.

$A \cap C_E^A = A \cap \overline{A} = \emptyset$ avec $\overline{A} = C_E^A$

2- **La réunion**

a) Définition : La réunion de deux(2) ensembles A et B, est l'ensemble formé des éléments appartenant à l'un au moins des ensembles A et B.

Cet ensemble est noté ‟ $A \cup B$” et on lit « A union B ».

$Si\ x \in A \cup b \Leftrightarrow x \in A\ ou\ x \in B.$

Si A et B sont définis par des propriétés P et q, alors

$A \cup B = \{x \in E/P(x) \vee q(x)\}$

La réunion correspond à la disjonction (v).

Exemple : $A = \{0, 1, 3, 4\}$ et $B = \{x\ ; \mathcal{Y}\ ; a\ ; b\}$

$A \cup B = \{0;\ 1;\ 3\ ; 4\ ; x\ ; y\ ; a\ ; b\}$ Card $(A \cup B) = 8$

b) Propriétés:

L'opération réunion est :

- Commutative : $A \cup B = B \cup A$
- Associative : $A \cup (B \cup C) = A \cup B \cup C$
- $\forall A \in P(E)$: $A \cup \emptyset = A$; *on dit que* $\emptyset$ *est neutre* pour la reunion
- $\forall A \in p(E)$: $A \cup A = A$(Idempotent des éléments de p(E)*pour U*)
- $A \cup \bar{A} = E\ avec\ \bar{A} = C_E^A$

3) Formule de Morgan

Soit A,B deux(2) parties de E,notons $\bar{A}\ et\ \bar{B}$ leur complementaire dans E

On peut écrire $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$

Démonstration

$\bar{A} = \{x/x \in E\ et\ x \notin A\}$

$\overline{A \cup B} = \{x/x \in E\ et\ x \notin A \cup B\}$

Or $x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A\ ou\ x \in B$

$x \notin A \cup B \Leftrightarrow x \notin A\ ou\ x \notin B$

$\overline{A \cup B} = \{x/x \in E\ et\ x \notin A\ ou\ x \notin B\}$

$= \{x/x \in E\ et\ x \in \bar{A}\ ou\ x \in \bar{B}\}$

$= \{x/x \in \bar{A}\ et\ x \in \bar{B}\}$

$\Leftrightarrow \boxed{\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}}$

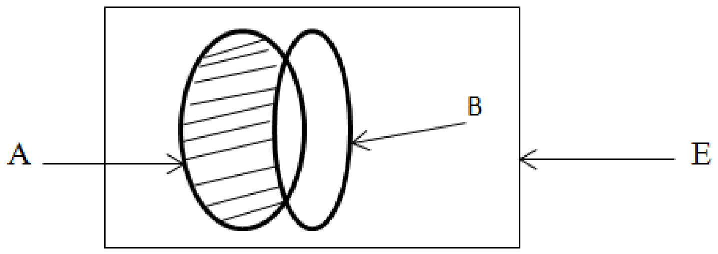
4) **Différences de deux(2) ensembles**

a) Définition : on appelle différence de deux(2) ensembles A et B l'ensemble noté ‘’ A – B’’ des éléments de $E\ \bar{q}\ \in A\ et \notin B$

$On\ a: A - B = \{x \in E/x \in A\ et\ x \notin B\}$

$\{x \in E/x \in A\ et\ x \in \bar{B}\}$

$A - B = A \cap \bar{B} de\ même\ que\ B - A = B \cap \bar{A}$



A-B

Exemple : on donne $A = \{a, 2 ;\ x ;\ 3\}$ et $B = \{2 ; 3 ; x ; y ; z\}$

$A - B = \{a\}$; $card(A - B) = 1$

$B - A = \{y; z\}$; $card\ (A - B) = 2$

b) **Propriétés :**

- L'opération différence n'est pas commutative :

  $A - B \neq B - A.$

  - La différence n'est pas associative :

    $A - (B - C) \neq (A - B) - C$

5) **Différence symétrique**(Δ)

Définition : on appelle différence symétrique de deux(2) ensembles A et B, l'ensemble note "**A** Δ B" des éléments qui appartiennent à un et un seul des ensemble A et B

$A\,\Delta\,B = \{x \in E/(x \in A \text{ et } x \notin B) \text{Ou } x \notin A \text{ et } x \in B)\}$

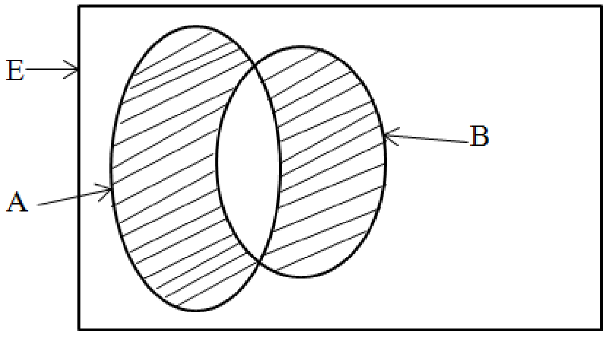
D'où $A\,\Delta\,B = (A - B) \cup (B - A)$

$= \{x \in E/ x \in (A - B) \text{ ou } x \in (B - A)\}$

$= \{x \in E/ x \in (A - B) \cup (B - A)\}$

Or $\begin{cases} A - B = A \cap \overline{B} \\ B - A = B \cap \overline{A} \end{cases}$

$A\,\Delta\,B = (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A})$



A Δ B

Exemple ; on donne A $= \{a\ ;\ 2\ ;y\ ;\ x\ ;\ 1\}$
B $= \{y\ ;\ 2\ ;\ -1\ ;\ x\ ;\ 4\ ;\ u\}$
Donnons les éléments de A Δ B et $\overline{A}\ \Delta\ \overline{B}$ puis leur cardinal
On sait que A Δ B $=\ (A - B)\ \cup\ (B - A)$
On à : $A - B = \{a\ ;\ 1\}$ et $B - A = \{-1\ ;\ 4\ ;\ u\}$
$A\ \Delta\ B = \{1\ ; a\ ;\ -1\ ;\ 4\ ;\ u\}$
$\overline{A}\ \Delta\ \overline{B} = (\overline{A} - \overline{B}) \cup (\overline{B} - \overline{A})$
Or: $\overline{A} = \{-1\ ;\ 4\ ;\ u\}$ et $\overline{B} = \{a;\ 1\}$
$\Rightarrow \begin{cases} \overline{A} - \overline{B} = \{-1; 4; u\} \\ \overline{B} - \overline{A} = \{a; 1\} \end{cases}$
$\Rightarrow\ \bar{A}\ \Delta\ \bar{B} = \{-1\ ;\ 4\ ;\ u\ ;\ a\ ;\ 1\}$
Donnons leur cardinal : card $(A\ \Delta\ B) = 5$
$\mathrm{Card}(\overline{A}\ \Delta\ \overline{B}) = 5$
b) propriété
- L'opération delta est commutative plus que la réunion A Δ B = B Δ A
- Elle est associative : A Δ (B Δ C) = (A Δ B) Δ C.

III – Produit cartésien

1) Définition

Considérons deux(2) ensembles A et B : on appelle produit cartésien de l'ensemble A par B, l'ensemble de tous les couples (x, y) tel que x ∈ A et y ∈ B ou simplement le produit de A et B.
On note "AB" et lit « A croix B »
$\mathrm{AxB} = \{(x, y)\ /\ x \in\ A \text{ et } y\ \in\ B\}$
Exemple : on donne : A = {a ; b ; c} et B = {0 ; 1 ; 2}
Le produit cartésien de AxB est de :
$\mathrm{AxB} = \{(a, 0); (a, 1); (a, 2); (b, 0); (b, 1); (b, 2); (c, 0); (c, 1)(c, 2)\}$
Ou encore

B / A	0	1	2
a	(a, 0)	(a, 1)	(a, 2)
b	(b, 0)	(b, 0)	(b, 0)
C	(c, 0)	(c, 1)	(c ,2)

Card (AxB) = 9

2) **Schéma cartésien**
La représentation graphique suivante est appelée schéma cartésien. Il est caractérisé par le fait qu'aucune distance n'est à définir pour placer les points sur les droites de bas A et B.

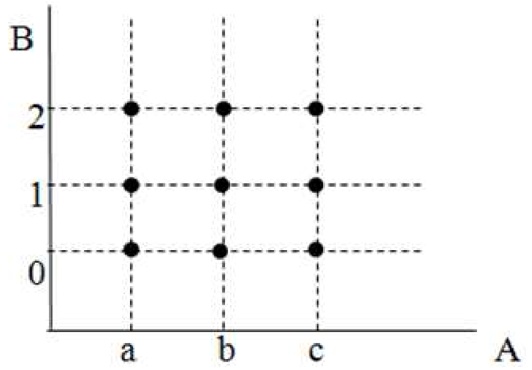


Schéma cartésien
Remarque : si A=B, produit cartésien AxB se note de 2 couples :
$(a, b) = (a', b') \Leftrightarrow a = a' et\ b = b'; (a, b) \neq (b, a)$
$\text{AxB} = \text{AxA} = \text{A}^2$

3) **Propriété :**

- $\text{AxB} = \emptyset \Leftrightarrow (\text{A} = \emptyset \text{ ou } \text{B} = \emptyset)$
- $\text{A x } (\text{B} \cap \text{C}) = (\text{AxB}) \cap (\text{AxC})$

La distribution de x sur l'intersection n.

IV- Loi de composition interne

1) **Définition**

On appelle loi de composition interne dans ∈, toute application définie sur ∈ tel que : (E x E→ E).La loi est notée par symboles divers :

- O, T,⊥, s, T, x, ●, v, 1 …….

On affirme que E est muni de la loi considérée et on définit ainsi un nouveau objet (E ; *)

On dit que « ensemble E muni de la loi interne * ».

La définition signifie qu'à tout couple (x , y) d'élément de E , la loi interne associe un élément un seul δ de l'ensemble E.

On a :E x E ⟼ E

$(x, y) \longmapsto \delta = x * y$

δ est appelé le composé de x et y

Remarque : La loi est dite additive si le symbole est + et multiplicative si le symbole est x ; ou la juxtaposition (x y)

2) **Propriété**

Soit E un ensemble muni d'une loi ∗ par tout définit

- **Commutative :** La loi ∗ est commutative : $\Leftrightarrow \forall (x, y) \in E^2,\ x * y = y * x$
- **Associativité :** La loi ∗ est associative $\Leftrightarrow \forall (x, y,) \in E^3 : x * (y * z) = (x * y) * z$
- **Régularité**

a est régulier à droite $\Leftrightarrow \forall (x, y) \in E^2$;

$x * \text{a} = y * \text{a} \Rightarrow x = y$

a est régulier à gauche $\Leftrightarrow \forall (x, y) \in E^2$,

$\text{a} * x = \text{a} * y \Rightarrow x = y$

Si a vérifié chacune de deux(2) implications (régularité à gauche et régularité à droite), on dit que l'élément a est régulier pour la loi ∗

Neutralité

Neutralité à gauche équivaux à : $\forall x \in E, \text{e} * x = x$

Neutralité à droite équivaux à : : $\forall x \in E, x * e = x$.

Si e vérifie les deux (2) propriétés, on dit que l'élément e est neutre pour la loi

- Symétrie (opposée) :

Soit (E,∗), une structure possédant un élément a est symétrisable

$\Leftrightarrow \exists \text{a}' \in \text{E}/\text{a}' * \text{a} = \text{a} * \text{a}' = \text{e}$

$\Rightarrow \begin{cases} a' * a = e \\ a * a' = e \end{cases}$

On dit que a' est un élément symétrique de a dans (E,∗).

3 – **Théorème** :

Si $*$ est associative et si a est symétrique :

- Le symétrique de a est unique et a est régulier
- Le composé de deux (2) élément symétrisables est symétrisable, on a : $(a*b)' = a' * b' \; \forall (a, b) \in E^2$.

4 –**Idempotence:**

Soit x un élément de l'ensemble E, x idempotent ⇔ $\forall x \in E, x * x = x$

Si x est idempotent par la loi étoile, ⇔$(x * x) * x = x * x = x$

5) **Partie stable (loi induite)** :

Une partie A d'un ensemble E muni d'une loi interne est dite stable ou fermer pour cette loi, si $\forall (x, y) \in A^2 ; (x * y) \in A$.

L'application : AxA ⟼ A

$(x, y) \longmapsto x * y$ est une loi interne définie sur la partie A de E, appelée loi induite sur A pour la loi $*$ définie sur E.

Exemple : soit (Z, x) et A = {-1 ; 0 ; 1}

Vérifions si la loi x est stable pour l'ensemble A.

Solution :

X est stable si $\forall (x, y) \in A^2 ; x, y) \in x\, y \in A$

$\forall(-1 ; 0) \in A^2 ; -1 * 0 = 0 ; 0 \in A$

⇒ x est stable dans A

6) Axiome de distributivité

Soit E un ensemble muni de deux (2) lois internes partout définie : $*$ et Δ.

On affirme que la loi étoile est distributive par rapport à la loi Δ si

$\forall(x, y, z) \in E^3 ; x * (y \Delta z) = (x * y) \Delta (x * z)$ (1)

Si la loi $*$ est commutative, alors :

$\forall(x, y, z) \in E^3 ; (y \Delta z) * x = (y * x) \Delta (z * x)$ (2)

Si la loi $*$ n'est pas commutative, on distingue deux (2) distributivités

- La distributive à gauche de $*$ par rapport à Δ : (1)

- La distributivité à droite de $*$ par rapport à Δ : (2)

Exemple : Dans R, la multiplication est distributive par rapport à l'addition (le développement)

On a: $\forall (a, b, c) \in R^3 ; a(b + c) = a.b + a.c)$

- L'intersection est distributive par rapport à la réunion : soit A, B, C des ensembles de E. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Chapitre 2 : Nombres Réels

I. Rappel sur les ensembles

D'une manière générale, on enregistre cinq (5) ensembles :

- l'ensemble des nombres entiers naturels noté N ;
- l'ensemble des nombres relatifs noté Z ;
- l'ensemble des nombres décimaux noté D. c'est le produit d'un ensemble par une puissance de 10.

Exemple : $0{,}3 = 3.10^{-1}; 0{,}43 = 43.10^{-2}$

- l'ensemble des nombres rationnels noté Q : c'est le rapport d'un nombre entier relatif et d'un nombre entier naturel non nul. Tous rationnels peuvent s'écrire sous forme de fraction
  $\frac{p}{q}$ $(p \in Z\, et\, q \in N^*)$.

Exemple : $-\frac{7}{3} \in Q$; $\frac{1}{2} \in Q$.

- l'ensemble des nombres réels noté R.

Remarque : on a $N \subset Z \subset D \subset Q \subset R$.

$\frac{0}{0}$; $\frac{1}{0}$; $\frac{p}{0}$ ne sont pas des nombres rationnels. Ces nombres n'existent pas mais tendent vers l'infinie.

$$R_+ \, U \, R_- = R \; et \; R_+ \cap R_- = \{0\}.$$

II. Règle de calcul dans R

a. règle de parenthèse

Soient $a, b\ et\ c$ des nombres réels :

- $a + (-b) = a - b$.
- $a - (-b) = a + b$.
- $a - (+b) = a - b$.
- $a - (b + c) = a - b - c$.
- $a - (b - c) = a - b + c$

Exemple : $\forall\ (3, 1, 2) \in N$; $2 + (-3 + 1) = 2 - 3 + 1 = -1 + 1 = 0$.

- $2 + (-1) = 2 - 1 = 1$
- $-3 - (-2) = -3 + 2 = -1$

b. Distributivité

Soient $a, b\ et\ c$ des nombres réels :

- $a\,(a + b) = ab + ac$
- $(a + b)c = ac + bc$

c. règle de signe

Soient $a, b\ et\ c$ des nombres réels, on a :

- $a \times (-b) = -ab$
- $(-a) \times (-c) = ac$
- $c \times (-a) = -ac$
- $(a \times b) \times (-c) = -abc.$

d. quotients des nombres réels

Soient $a\ et\ b$ deux nombres réels non nuls. Le quotient de $\frac{a}{b}$ est l'unique nombre réel $\frac{q}{q} = \frac{a}{b} \Rightarrow bq = a.$

$\frac{a}{b}$ Existe lorsque $b \neq 0.$

Propriété

Soient $a, b, c\ et\ d$ des nombres réels non nuls.

On a :

- $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$ (produit de moyen est égal au produit des externes).
- $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}.$
- $\forall K \in R,\ k \times \frac{a}{b} = \frac{Ka}{b}$
- $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$
- $\frac{1}{\frac{a}{b}} = 1 \times \frac{b}{a} = \frac{b}{a}$
- $\frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{a}{b} \times \frac{1}{c} = \frac{a}{bc}$

Exemple : calculer les nombres suivants :

$\mathrm{A} = \frac{1+\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}-\frac{2}{5}}$ et $\mathrm{B} = 1 + \frac{\frac{1}{2}+3}{1-\frac{3}{4}}$

Solution :

$\mathrm{A} = \frac{1+\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}-\frac{2}{5}} = \frac{\frac{2+1}{2}}{\frac{15-4}{10}} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{11}{10}} = \frac{3}{2} \times \frac{10}{11} = \frac{30}{22}$

$\boxed{\mathrm{A} = \frac{15}{11}}$

B = $1+\frac{\frac{1}{2}+3}{1-\frac{3}{4}} = 1+\frac{\frac{1+6}{2}}{\frac{4-3}{4}} = 1+\frac{\frac{7}{2}}{\frac{1}{4}} = 1+\left(\frac{7}{2}\times\frac{4}{1}\right) = 1+\frac{28}{2} = 1+14 = 15$

$\boxed{B = 15}$

e. puissances

Définition :

Soit a, un nombre réel ; n est un nombre entier naturel plus grand que 1.

$\underbrace{a^n = a\times a\times a\times \ldots\times a}_{n \text{ facteurs de a}}$

Par convention $\begin{cases} a^0 = 1 \\ a^1 = a \end{cases}$ $et\ \ a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

Propriété :

Soient $a\ et\ b$ deux nombres non nuls et m, n des nombres entiers naturels plus grands que

- $a^m \times a^n = a^{m+n}$
- $(a^m)^n = a^{m\times n}$
- $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$
- $-\ \frac{a^m}{a^n} = \begin{cases} a^m \times a^{-n} = a^{m-n} \text{ si } m > n \\ \frac{1}{a^{n-m}} \quad si\ n > m \end{cases}$
- $(ab)^m = a^m \times b^m$
- $(-a)^n = \begin{cases} a\ si\ n\ est\ paire \\ -a \text{ si n } est\ impaire \end{cases}$

Exemple : calculons les nombres suivants :

$$A = \frac{(8)^{\frac{1}{3}}\times 4}{2^7\times(16)^3} = \frac{(2^3)^{\frac{1}{3}}\times 4}{2^7\times 4^6} = \frac{2^{3\times\frac{1}{3}}\times 4}{2^7\times 4^6} = \frac{3\times 4}{2^7\times 4^6} = \frac{1}{2^6\times 4^5} = \frac{1}{2^6\times(2^2)^5}$$
$$= \frac{1}{2^6\times 2^{2\times 5}} = \frac{1}{2^6\times 2^{10}}$$

$= \frac{1}{2^{6+10}} = \frac{1}{2^{16}} = 2^{-16}$

$\boxed{A = 2^{-16}}$

$B = \frac{(10)^7\times 3^2}{5^2\times 2^5\times 3^{-5}} = \frac{(2\times 5)^7\times 3^2}{5^2\times 2^5\times 3^{-5}} = \frac{2^7\times 5^7\times 3^2}{5^2\times 2^5\times 3^{-5}} = \frac{2^2\times 5^5\times 3^2}{3^{-5}}$

$= 2^2\times 5^5\times(3^2\times 3^5) = 2^2\times 5^5\times(3^2\times 3^5) = 2^2\times 5^2\times 3^7$

$\boxed{\mathbf{B = 2^2\times 5^5\times 3^7}}$

f. Identités remarquables

Soient a et b deux (2) nombres réels non nuls

1. $(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + 2\text{ab} + b^2$ $(carré\ de\ la\ somme)$
2. $(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a^2 - 2\text{ab} + b^2$ $(carré\ de\ la\ différence)$
3. $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ $(différence\ de\ deux\ (2)\ carrés)$
4. $(a+b)(a^2 - \text{ab} + b^2) = a^3 + b^3$ $(somme\ de\ deux\ (2)\ cubiques)$
5. $(a-b)(a^2 + \text{ab} + b^2) = a^3 - b^3$ $(différence\ de\ deux\ (2)\ cubiques)$
6. $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ $(\ somme\ cubique)$
7. $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ $(\ difference\ cubique)$

g. Racine carrées

Soit a, un nombre réel positif, $\sqrt{a}$ est l'unique nombre réel positif dont le carré est a c'est-à-dire : $(\sqrt{a})^2 = a$

- **Remarque :** elle n'existe que si a est positif ; mais n'a pas de sens si a est négatif.
- **Cas particulier** : $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$; $\sqrt{0} = 0$ et $\sqrt{1} = 1$
- **Propriété :** Pour tout nombre réel positif $a\ et\ b$; pour tout entier naturel n, on a :

- $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$
- $(\sqrt{a})^2 = \sqrt{a^2} = |a|$
- $\sqrt{\frac{1}{a}} = \frac{1}{\sqrt{a}}$ $(a \neq 0)$
- $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ $(b \neq 0)$
- $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$
- $(\sqrt[n]{a})^n = (a^{\frac{1}{n}})^n = a^{\frac{1}{n}\times n} = a$
- $\sqrt[n]{a \times b} = \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b}$
- $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = (b \neq 0)$
- $\sqrt[n]{\frac{1}{a}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a}}$ $car\ \sqrt[n]{1} = 1$

Remarque : $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$: $n^2 = q \Rightarrow n = \sqrt{a}\ ou\ n = -\sqrt{a}$

Exemple : calculons les termes suivants :

$A = \sqrt{75} - \sqrt{12} + \sqrt{64}$

$= \sqrt{3 \times 25} - \sqrt{3 \times 4} + \sqrt{8^2}$

$= 5\sqrt{3} - 2\sqrt{3} + 8 = 3\sqrt{3} + 8$

$\boxed{\mathbf{A = 3\sqrt{3} + 8}}$

$B = \sqrt[3]{27} + \sqrt[4]{64} + \sqrt[5]{16}$

$= \sqrt[3]{3 \times 9} + \sqrt[4]{8^2} + \sqrt[5]{4^2}$

$= \sqrt[3]{3^3} + \sqrt[4]{8^2} + \sqrt[5]{4^2}$

$= (3^3)^{\frac{1}{3}} + (2^6)^{\frac{1}{4}} + (2^4)^{\frac{1}{5}}$

$= 3^{3 \times \frac{1}{3}} + 2^{6 \times \frac{1}{4}} + 2^{4 \times \frac{1}{5}}$

$= 3 + 2^{\frac{3}{2}} + 2^{\frac{4}{5}}$

$= 3 + \sqrt{2^3} + \sqrt[5]{2^4}$

$= 3 + \sqrt{2 \times 2^2} + \sqrt[5]{2^4} = 3 + 2\sqrt{2} + \sqrt[5]{16}$

$$\boxed{\boldsymbol{B = 3 + 2\sqrt{2} + \sqrt[5]{16}}}$$

h. Expressions conjugué

Soient a et b deux nombres réels non nuls, on a :

- $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{c}-\sqrt{d}} = \frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})\,(\sqrt{c}+\sqrt{d})}{(\sqrt{c}-\sqrt{d})(\sqrt{c}+\sqrt{d})}$
- $\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}^2} = \frac{\sqrt{a}}{a}$
- $\frac{\sqrt{a}+b}{\sqrt{c}-d} = \frac{(\sqrt{a}+b)(\sqrt{c}+d)}{(\sqrt{c}-d)(\sqrt{c}+d)}$
- $\frac{1}{b-\sqrt{a}} = \frac{b+\sqrt{a}}{(b-\sqrt{a})\,(b+\sqrt{a})}$

Exemple : calculons les termes suivants :

$A = \frac{1}{1+\sqrt{5}} = \frac{1-\sqrt{5}}{(1+\sqrt{5})\,(1-\sqrt{5})} = \frac{1-\sqrt{5}}{1-\sqrt{5})+\sqrt{5}-(\sqrt{5})^2} = \frac{1-\sqrt{5}}{1-5}$

$= \frac{1-\sqrt{5}}{-4} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$

$$\boxed{\mathbf{A} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}}$$

$B = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{2}-\sqrt{5}} = \frac{(\sqrt{3}+\sqrt{2})\,(\sqrt{2}+\sqrt{5})}{(\sqrt{2}-\sqrt{5})(\sqrt{2}+\sqrt{5})} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{15}+(\sqrt{2})^2+\sqrt{10}}{(\sqrt{2})^2+\sqrt{10}-\sqrt{10}+\sqrt{25}}$

$= \frac{\sqrt{6}+ \sqrt{15} +2 + \sqrt{10}}{2-5} = \frac{\sqrt{6}+ \sqrt{15} +2 + \sqrt{10}}{-3}$

$$\boxed{\boldsymbol{B = \frac{-2 - \sqrt{6} - \sqrt{15} - \sqrt{10}}{3}}}$$

III. Ordre dans *R*

1. Inégalité dans *R*

a. soient a et b deux nombres réels :

- $a \leq b$ signifie que $a - b \leq 0$ et $b - a \geq 0$
- $a < b$ signifie que $a - b < 0$ et $b - a > 0$

Remarque :

- les notations (Symboles) $\leq ou \geq$ sont des inégalités au sens large.
- les symboles $< et\ >$ sont des inégalités au sens strict.

b. Propriétés

Pour tous nombres réels $a, b\ et\ c$ on a :

- $a \leq a$
- $a \leq b \ \Rightarrow\ a + c \leq b + c$
- $a \leq b$ et $b \leq a \ \Rightarrow a = b$
- $a \leq b$et $b \leq c \ \Rightarrow\ a \leq c$
- $a \leq b \ \Rightarrow ac \leq bc\ (c \geq 0)$
- $a \leq b \ \Rightarrow ac \geq bc\ (c \leq 0)$
- $a \leq b\ -a \geq -b\ (en\ particulier)$
- $a \leq b \ \Rightarrow\ a^2 \leq b^2$
- $a \leq b \ \Rightarrow\ \sqrt{a} \leq \sqrt{b}$
- $a \leq b \ \Rightarrow\ \frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$

2. Partie entière

La partie entière d'un nombre réel n est le nombre entier naturel relatif n qui vérifie :

$n \leq n\ \leq n + 1$

Elle est notée $E\ (n)$. on admet que pour tous nombre réel n, il existe un unique nombre entier relatif n tel que : $n \leq n\ \leq n + 1\ \Rightarrow E\ (n) = n$

Exemple :

- $3 \leq \pi\ \leq 4\ \Rightarrow E\ (\pi) = 3$
- $8 < 8{,}75 \leq 9\ \Rightarrow E\ (8{,}75) = 8$

3. Comparaison

Pour comparer deux nombres réels, on peut :

- Les comparer à un nombre intermédiaire
- Etudier le signe de leur différence ;
- S'ils sont strictement positif, comparer leur carré, leur racine carré ou leur inverse.

Exemple : comparer les nombres suivants :

$\frac{1}{\sqrt{3}+1} = \frac{\sqrt{3}-1}{(\sqrt{3}+1)\sqrt{3}-1} = \frac{\sqrt{3}-1}{3-1} = \frac{\sqrt{3}-1}{2} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}-1}{2} < \sqrt{3}-1$

$\frac{-3}{7}\ et\ \frac{-2}{7} \Leftrightarrow \frac{-3}{7} < \frac{-2}{7}$

$\frac{5}{7}\ et\ \frac{7}{10} \Leftrightarrow \frac{50}{70}\ et\ \frac{49}{70} \Leftrightarrow \frac{49}{70} < \frac{50}{70}$

4. Encadrement

On utilise les propriétés d'encadrement sur les nombres positifs.

- **somme**

$$\begin{cases} a \le n \le b \\ c \le y \le d \end{cases} \Rightarrow a + c \le x + y \le b + d$$

- **produit**

$$\begin{cases} a \le n \le b \\ c \le y \le d \end{cases} \Rightarrow ac \le xy \le bd$$

- **opposé**

$$\begin{cases} a \le n \le b \\ -b \le -y \le -a \end{cases}$$

- **inverse**

$$a \le n \le b \Leftrightarrow \frac{1}{a} \le \frac{1}{n} \le \frac{1}{b}$$

- **carré**

$$a \le n \le b$$

$$a^2 \le n^2 \le b^2$$

- **racine carré**

$$a \le n \le b$$

$$\sqrt{a} \le \sqrt{n} \le \sqrt{b}$$

Remarque: pour encadrer une somme, on peut ajouter membre à membre les égalités de même sens donnant l'encadrement de chaque terme de la somme.

Pour encadrer une différence, on peut :

- Encadrer le premier terme,
- Encadrer l'opposé du 2ème terme ;
- Ajouter ensuite membre à membre les inégalités de même sens ainsi obtenus.

Pour encadrer un produit, n peut utiliser des encadrements ou ne figure que des nombres positifs et multiplier membre à membre les inégalités de même sens donnant l'encadrement de chaque facteur du produit.

❖ Pour encadrer un quotient, on peut utiliser des encadrements ou ne figure que des nombres positifs.
- encadrer le numérateur
- encadrer l'inverse de dénominateur
- multiplier membre à membre les inégalités de même sens ainsi obtenu.

Exemple: $x\ et\ y$ sont deux réels vérifiant :

$1 < x < 2\ et - 5 < y < -4$

Encadrons $B = \frac{x+y}{xy}$

Solution

$B = \frac{x+y}{xy} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$

$on\ a: 1 < x < 2 \Leftrightarrow 1 > \frac{1}{x} > \frac{1}{2}\ et - 5 < y < -4\ \Leftrightarrow\ -\frac{1}{5} > \frac{1}{y} > -\frac{1}{4}$

$\Rightarrow 1 - \frac{1}{5} > \frac{1}{x} + \frac{1}{y} > \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\ \Rightarrow\ \frac{5-1}{5} > \frac{x+y}{xy} > \frac{4-2}{8}\ \Rightarrow\ \frac{4}{5} > \frac{x+y}{xy} > \frac{1}{4}$

$\boxed{\boldsymbol{B = \frac{1}{4} > \frac{x+y}{xy} > \frac{4}{5}}}$

IV. Relation d'ordre dans IR

1. intervalles des réels

L'ensemble des nombres réels est l'intervalle $]-\infty; +\infty[$

$R_+^* =]0; +\infty[\ ;\ x > 0$

$R_-^* =]-\infty; 0[\ ; x < 0$

a) Intervalles bornés

Soients $a\ et\ b$ des nombres réels. On a:

$a \leq x \leq b \Rightarrow x \in [a; b]$

$a < x < b \Rightarrow x \in]a; b[$

$a \leq x < b \Rightarrow x \in [a; b[$

$a < x \leq b \Rightarrow x \in]a; b]$

Exemple : $2 \leq x \leq 5 \Rightarrow x \in [2; 5]$

$-1 < x \leq 0 \Rightarrow x \in]-1; 0]$

b) Intervalles non bornés

Soient un nombre réel a. on a :

$x \geq a \Rightarrow x \in [a; +\infty[$

$x > a \Rightarrow x \in]a; +\infty[$

$x \leq a \Rightarrow x \in]-\infty; a]$

$x < a \Rightarrow x \in]-\infty; a[$

Exemple : $x \geq 3 \Rightarrow x \in [3; +\infty[$

$x < -1 \Rightarrow x \in]-\infty; -1[$

2. Majorant et Minorant
Minimum et Maximum d'un ensemble

Définition 1: $\forall a \in R$ et soit x un nombre reel donné tel que $x \leq a$ est un majorant de x ;

$\forall b \in R$ et soit x un nombre reel donné tel que $b \leq x$ est un minorant de x ;

$\forall (a, b) \in R^2$, et soit x tel que $b \leq x \leq a$ est un encadrement de x.

NB : pour tout $(a, b) \in R^2, b \leq x \leq a$

$\Rightarrow x \in [b; a] \Leftrightarrow \{x \in R \,/\, b \leq x \leq a\}$

Définition 2: soit F un sous ensemble de R.

- $\forall M \in R$et $x \in F$; $x \leq M$ est un majorant de$F$. On dit qu'un nombre réel M est un majorant de F si M est supérieur ou égal à tous les éléments de sous ensemble.
- $\forall x \in R$et $x \in E$; $M \leq x$ et minorant de Fsi M est inferieur ou egal à tus les éléments de F.

Lorsqu'il existe le plus grand élément de F, c'est appelé maximum de F et lorsqu'il existe le plus petit élément de E, c'est le minimum de F.

Exemple : soit $E = \{0, 1; 2; 5; 6\}$

- 6 est le maximum de E ; car $\forall x \in \frac{E}{x} \leq 6$.
- 7 est le majorant de E, mais pas un maximum.
- 0 est le minimum de E, car $\forall x \in \frac{E}{x} \geq 0$.
- -1 est le minorant de E, mais pas un minimum.

3. Valeur absolue

a. Définition

Soit x un nombre réel. Une valeur absolue est le plus grand des deux nombres réels $x\ et\ -x\ on\ note$: $|x|$.

$$|x| = \begin{cases} x\ si\ x > 0 \\ -x\ si\ x < 0 \end{cases} \Rightarrow |x| = \begin{cases} x\ si\ x\ \in]0;+\infty[\\ -x\ si\ x\ \in]-\infty;0[\end{cases}$$

Exemple : $|-5| = 5$; $\left|\frac{4}{3}\right| = \frac{4}{3}$

: $\left|-3+\frac{5}{2}\right| = \left|\frac{-6+5}{2}\right| = \left|\frac{-1}{2}\right| = \frac{1}{2}$

Remarque : la valeur absolue d'un nombre reste toujours positives ou nulle $|x| \geq 0$.

B. Propriétés :

- la valeur absolue d'un produit est égale au produit des valeurs absolues :

$$|x \times y| = |x| \times |y|.$$

- la valeur absolue d'un quotient est égale aux quotients des valeurs absolues :

$\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$; $(y \neq 0)$.

- $\left|\frac{1}{x}\right| = \frac{1}{|x|}$; $(x \neq 0)$.
- $x + y \leq |x| + |y|$ (inégalité triangulaire).

Exemple :

1°) $|-3(x-4)| = |-3| \times |x-4| = 3|x-4|$

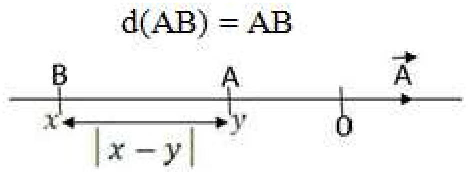
2°) $|(-3)+\sqrt{2}| \leq |-3| + |\sqrt{2}|$

$\Rightarrow |(-3)+\sqrt{2}| \leq 3+\sqrt{2}$.

3°) $|x-4| \leq |x| + |-4| \Rightarrow |x-4| \leq x+4$.

4. Distance entre deux nombres réels

x et y étant deux nombres réels, ils sont des abscisses de deux points A et B.



Par définition la distance entre x et y est la valeur absolue de leur différence :

$d(AB) = |x - y|$

a. Intervalle centré

On considère un intervalle borné $[a, b]$ $et\ c$ le centre de l'intervalle : on détermine le centre de l'intervalle par $[a, b] \Rightarrow c = \frac{a+b}{2}$.

Exemple :

sur $[1; 2] \Rightarrow c = \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow c = \frac{3}{2}$

b. Rayon de l'Intervalle

On calcule le rayon de l'intervalle par : $r = \frac{1}{2}|b - a|$

Exemple : calculons le rayon de $[1; 2]$;

$r = \frac{1}{2}|2 - 1| = \frac{1}{2}|1| = \frac{1}{2}$

$$\boxed{\boldsymbol{r = \frac{1}{2}}.}$$

Remarque : on exprime que la distance d'un nombre x de l'intervalle au centre c est $\leq$ au rayon.

$|x - c| \leq r$

Exemple :

- $[-3; 5]$ a pour centre : $c = \frac{-3+5}{2} = 1$

$$\boldsymbol{c = 1}$$

- rayon $r = \frac{1}{2}|5—3| = \frac{1}{2}|8| = 4$
  $\boldsymbol{r = 4}$
- $x \in [-3; 5] \Leftrightarrow |x - 1| \leq 4$.

5. Equations et Inéquations avec valeur absolue

Méthode :

- l'équation du type $|x - c| = r$ a pour solution :

$$\begin{cases} x - c = r \\ x - c = -r \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = r + c \\ x = -r + c \Leftrightarrow c - r \end{cases}$$

$$\boxed{S = \{c - r;\ c + r\}}$$

Exemple : résoudre dans IR l'équation :

$|x-3| = 2$

$\begin{cases} x-3=2 \\ x-3=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2+3 \\ x=3-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=5 \\ x=1 \end{cases}$

$\boxed{S = \{1;\ 5\}}$

- L'inéquation du type $|x-c| \leq r$ a pour solution : $-r \leq x-c \leq r$

Exemple : $|x-1| \leq 5$

$\Rightarrow\ -5 \leq x-1 \leq 5$

$\Rightarrow -5+1 \leq x \leq 5+1\ \Leftrightarrow\ -4 \leq x \leq 6$

$x \in\ [-4; 6]$

$\boxed{S =\ [-4; 6]}$

- l'inéquation du type $|x-c| > r$ a pour solution :
$\begin{cases} x-c>r \\ ou \\ x-c<-r \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>r+c \\ x<-r+c \end{cases}$

Exemple : $x-5| > 1{,}5$

$\begin{cases} x-5>1{,}5 \\ x-5<-1{,}5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>1{,}5+5 \\ x<-1{,}5+5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>6{,}5 \\ \text{ou} \\ x<3{,}5 \end{cases}$

$\Rightarrow x \in]6{,}5;\ +\infty[\ u\ x \in]-\infty; 3{,}5[$

$\boxed{S =]6{,}5;\ +\infty[\ \cup\ ]-\infty; 3{,}5[}$

6. Valeurs approchées

Soit x, y deux nombres réels et Ɛ un reel strictement positif. y est une valeur approchée de x à Ɛ près, signifie que : $|x-y| \leq$ Ɛ. On note $x = y$ à Ɛ près ; le nombre Ɛ est appelé incertitude de cette valeur approchée.

Exemple : $3{,}14 \leq \pi \leq 3{,}15$ est un encadrement de π à 10^{-2} près par défaut et par excès.

3,14 est la valeur approchée de π à 10^{-2} près par défaut.

3,15 est la valeur approchée de π à 10^{-2} près par excès.

L'incertitude $\mathcal{E} = 3{,}15 - 3{,}14 = 0{,}01$.

$\mathcal{E} = 10^{-2}$

7. Notation scientifique ou écriture flottante normalisée

On appelle écriture flottante normalisée d'un nombre décimal d, lorsqu'il s'écrit sous la forme : $d = b \times 10^{r}\ avec\ r\ \mathcal{E}\ \in$ Z et b $\in\ R^{*}\ /\ 1 \leq \left|b\right| < 10$.

Exemple :
$3{,}14 = 3{,}14.10^{0} = 314.10^{-2} = 31{,}4.10^{-1} = 0{,}000000596$

$= 596.10^{-9} = 5{,}96.10^{-7} = 59{,}6.10^{-8}$

8. Ordre de grandeur (Arrondi)

Soit $d = b \times 10^{r}$ une notation scientifique.

Posons $b = c \times m\ avec\ 1 \leq c < 9\ et\ 0 \leq m < 1$

On a :$d = (c + m) \times 10^{r} = c.10^{r} + m.10^{r}$

$c.10^{r}$ Est appelé ordre de grandeur de d ou c est le l'arrondi d'ordre zéro de d.

Exemple : $2{,}98.10^{8}$ a pour ordre de grandeur 3.10^{8}.

$1{,}602.10^{-20}$ a pour ordre de grandeur 2.10^{-20}.

Remarque : un calcul à l'aide d'ordre de grandeur permet d'obtenir rapidement une approximation grossière de la valeur d'une expression numérique.

9. Intersections et réunions d'intervalles

a°) Intersection

Les réels qui sont à la fois dans l'intervalle $[a; b]$ et dans $[x; y]$ forment un autre intervalle appelé intersection.

Exemple : on donne deux intervalles $[3; 2]$ et $[-1; 6]$ déterminons l'intersection de ces 2 intervalles.

$[3; 2] \cap [-1; 6]$

$[3; 2] \cap [-1; 6] = [-1; 2]$

b°) Réunions

Les réels qui sont dans $[a; b]$ ou dans $[x; y]$ forment un autre intervalle appelé la réunion.

Exemple : $[3; 2] \cup [-1; 6] = [-3; 6]$

10. Pourcentage d'une quantité

Une quantité partielle d'une quantité totale peut être s'exprimer sous la forme d'une fraction $\frac{QP}{QT}$ ou d'un pourcentage de la quantité totale :

$QP = P\%\ de\ QT$ avec :

QP	*P*
QT	*100*

$\Leftrightarrow P\% = \frac{QP\times 100}{QT}$

Exemple : 60 personnes sur un totale de 150 représente le 2/5 du total ou le 40% du total.

$QP = 60; QT = 150$

$\frac{QP}{QT} = \frac{60}{150} = \frac{2}{5}$

60	*P*
150	*100*

$\Leftrightarrow P\% = \frac{60*100}{150} = 40\%$

$\boxed{P\% = 40\%}$

Travaux Dirigé (T.D)

Exercice n°1:

1. Calculer les nombres suivants en présentant les résultats sous la forme d'une fraction irréductible.

$$\frac{2}{\frac{1}{3}-\frac{2}{3}}\ ;\ \frac{\frac{3}{5}+\frac{2}{3}}{\frac{3}{5}-\frac{2}{3}}\times\frac{\frac{4}{5}-\frac{3}{4}}{\frac{4}{5}-\frac{3}{4}}$$

2. Démontrons que pour $a > b \geq 0$:

$$\left(\sqrt{a+\sqrt{a^2-b^2}}+\sqrt{a-\sqrt{a^2-b^2}}\right)^2 = 2(a+b)$$

Exercice n°2 :

Soit à un nombre réel

1. on suppose $0 < a < 1$

a. Comparer $a\ et\ a^2;\ a\ et\ \sqrt{a}\ ;\ a\ et\ \frac{1}{a}$

b. Ranger dans l'ordre croissant : 1 ; a ; $\sqrt{a}$; a^2; a $et \frac{1}{a}$

2. on suppose $a > 1$

Ranger dans l'ordre croissant : $1; a$; $\sqrt{a}; a^2$; a $et \frac{1}{a}$

Exercice n°3:

Donner l'écriture scientifique des nombres suivants :

1) 160000×350

2) $6 \times 10^{-3} \times 0{,}02$

3) $\frac{360.10^5}{0{,}004}$

4) $31{,}2.10^{-15} - 17{,}3.10^{-14}$

Exercice n°4 :

Dans chacun des cas suivants, déterminer des encadrements de $x + y; x - y; xy;$ $x^2; \frac{1}{w}.\frac{x}{y}$

1) $2{,}1 < x < 2{,}2$ et $3{,}3 < y < 3{,}4$

2) $-1{,}5 < x < -1{,}4$ et $5 < y < 5{,}1$

3) $-4{,}1 < x < -4$ et $-0{,}9 < y < -0{,}8$

Exercice n°5 :

On donne $I = \ ]-\infty; 3]; J = [-6; +\infty[; K =]3; 18]$

1) donner en intervalle les éléments des ensembles suivants :

I ∩ J; I ∩ K; I ∪ K; J ∪ I; J ∪ I ∪ K.

2) Résoudre dans R les équations et inéquations suivantes :

a) $2|x - 5| \leq 8$

b) $|3x - 6| = 27$

c) $\left|\frac{x-7}{4}\right| > \frac{2}{3}$

3) Résoudre dans N les équation et Inéquations suivantes :

a) $|x - 3| = 2$

b) $|x - 7{,}6| < -3{,}1$

c) $|x - 7{,}54| \leq 3.10^{-2}$

Devoir surveillé de mathématiques

Géométrie

- A, B, C, D, E, F et G sont des points du plan :

Simplifier l'écriture de chacune des sommes suivantes :

- $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{EG}$
- $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE}$
- $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{ED}$
- $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{FG} + \overrightarrow{GE}$
- Construire graphiquement la somme des vecteurs $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ tel que $\overrightarrow{AB} et\ \overrightarrow{BC}$ ne sont pas colinéaires.

Numérique

Exercice n°1 :

- calculer le nombre suivant en présentant le résultat sous la forme d'une fraction irréductible.

$A = \frac{\frac{3}{5}+\frac{3}{2}}{\frac{3}{5}-\frac{3}{2}} \times \frac{\frac{4}{5}-\frac{3}{4}}{\frac{4}{5}+\frac{3}{4}}$

- donner l'écriture scientifique des nombres suivants :
- $17{,}3.10^{-14} + 31{,}2.10^{-15}$
- $3.10^{-4} \times 0{,}0005$
- $\frac{360.10^{5}}{0{,}004}$

Exercice n°2 :

- résoudre dans R les équations et les inéquations suivantes :
  a) $\left|\frac{x-5}{2}\right| \leq 4$
  b) $|3x - 6| = 27$
  c) $\frac{1}{4}|x + 7| > \frac{2}{3}$
  d) $|4x - 4| = 3$

2) résoudre dans N les équations et inéquations suivantes :

$a)$ $|x - 7{,}6| < -3{,}1$

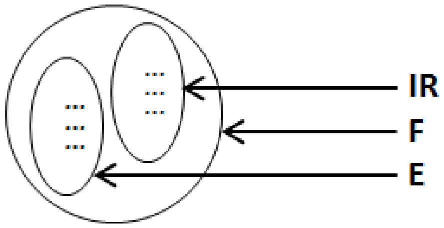
$b)$ $|x - 7{,}54| \leq 3.10^{-2}$

Chapitre 3 : Fonction réelle

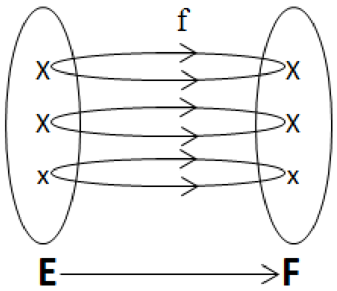
I – Généralités

1 – Notion des fonctions

a) Définition : Soit E et F deux sous ensemble non vide de l'ensemble IR.



On appelle fonction de E vers F, toutes correspondances à chaque élément de E, on associe un ou plusieurs éléments de l'ensemble F.



b) Vocabulaire

On dit que f est la fonction de E → F à x on associe $(x \longmapsto f(x))$. E est l'ensemble de départ, F l'ensemble d'arrivé. x est la variable et f(x) est l'image de x par f. on définit l'application : $f: \begin{matrix} E \to F \\ x \longmapsto f(x) \end{matrix}$

NB : Lorsque b est l'image de x par f, on affirme que x est l'antécédent de b par f : on note $b = f(x)$

- Lorsque l'ensemble d'arrivée d'une fonction f est un ensemble de nombre réel, on dit que f est une fonction numérique.

Exemple : L'application h : $\begin{matrix} E \to IR \\ x \longmapsto x^2 - x + 2 \end{matrix}$ est une fonction numérique

- Lorsque l'ensemble de départ d'une fonction numérique est un ensemble de nombre réel, on dit que f est une fonction numérique de variable réel.

Exemple : L'application g : $\begin{matrix} IR \to F \\ x \longmapsto x^2 - 1 \end{matrix}$ est une fonction à variable réelle.

- L'application $f: \begin{matrix} E \to F \\ x \longmapsto |x| + 2 \end{matrix}$ est une fonction numérique à variable réelle.
- Une symétrie, une translation sont des fonctions du plan vers le plan.

Remarque :

- Une application d'un ensemble E observe 1 ensemble E est une fonction de E vers F.
- Fonction déterminée par une formule explicite : on considère l'application

  f : IR → IR

  $x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{4x-3}}$

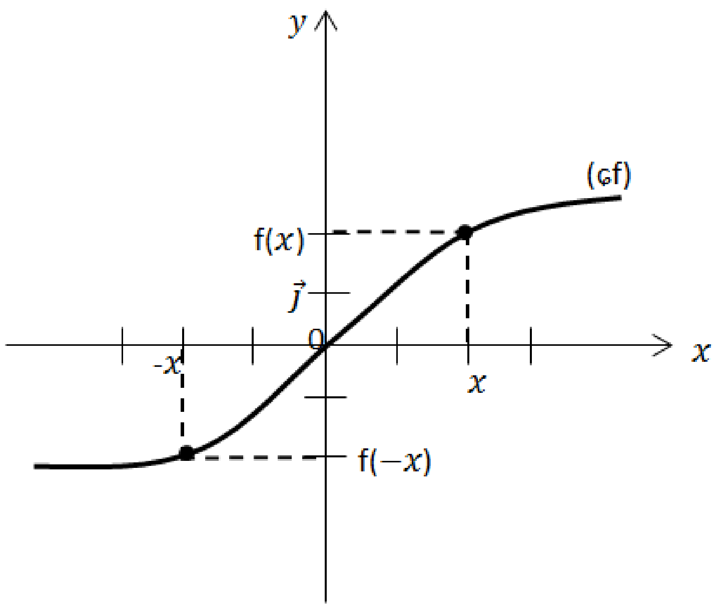
Formule de f	Programme de calcul de f	Schéma de calcul de f
$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{4x-3}}$	- Prendre un nombre x - Le multiplier par 4 - Ajouter (-3) - Prendre la racine carrée - Prendre son inverse et on obtient f(x)	x $4x$ $4x-3$ $\sqrt{4x-3}$ $\frac{1}{\sqrt{4x-3}} \to \mathrm{f}(x)$

2 – Représentation graphique

Le plan est muni d'un repère$(o,\vec{\imath}\,\vec{\jmath})$. f est une fonction numérique d'une variable réelle d'ensemble de définition noté Df.

On appelle représentation graphique de f ou courbe représentative de f notée (Cf), l'ensemble des points M$\binom{x}{f(x)}$ où x est un élément de l'ensemble de définition de f.

Exemple :



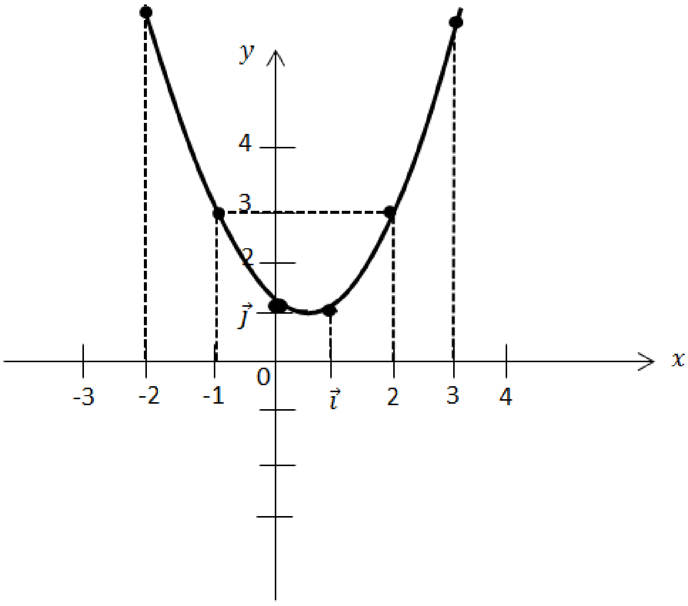
Exemple : Donner la représentation graphique e la fonction par : $g(x) = x^2 - x + 1$

Solution :

$g(x) = x^2 - x + 1$;   Dg = IR = $]-\infty;\ +\infty\,[$

Tableau des valeurs

x	0	1	2	3	-1	-2	-3
g(x)	1	1	3	7	3	7	13



3) Coïncidence des fonctions sur un ensemble

Soit f et g deux fonctions définis sur un ensemble E. on dit que les fonctions f et g se coïncident sur E (ou qu'elles sont égales sur E) lorsque pour tout élément x de E, $f(x) = g(x)\ \forall x \in E$.

Exemple : $f(x) = x - 1$ et $g(x) = \frac{x^2-1}{x+1}$

Montrons que f et g se coïncident.

Solution : Montrons que f et g se coïncident :

$Df =]-\infty; +\infty[$; $g\ \exists \Leftrightarrow x + 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1$

$\Rightarrow Dg =]-\infty; -1[\cup]-1; +\infty[$

$\forall\ x \in Dg;\ g\ (x) = \frac{x^2-1}{x+1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x+1} = x - 1$

$\Leftrightarrow g\ (x) = f(x)$

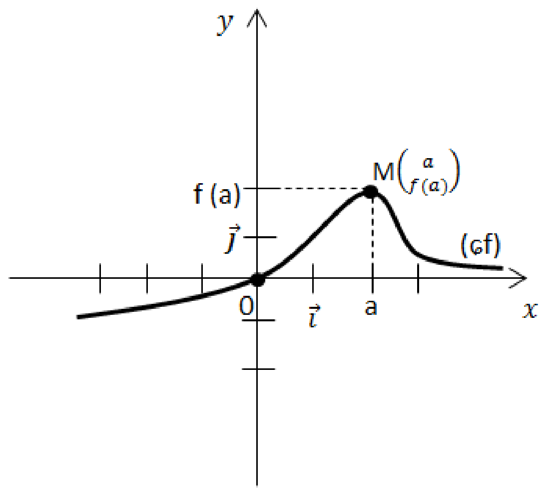
On conclut que les fonctions g et f se coïncident sur l'intervalle$]-\infty; -1[\cup]-1; +\infty[$.

4) Image directe, image réciproque d'un intervalle (graphiquement)

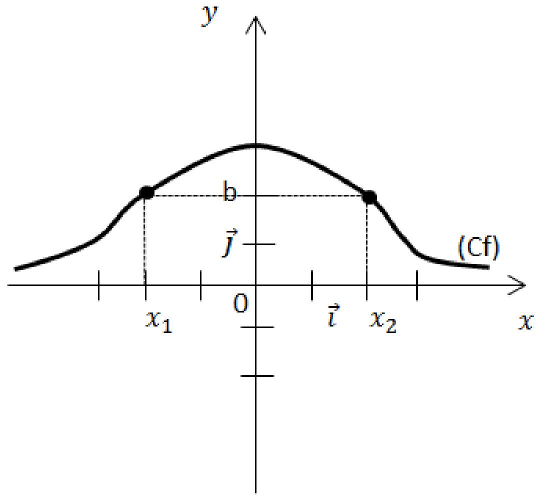
a) Image et antécédent d'un nombre

Le plan est muni d'un repère $(o ; \vec{i} ; \vec{j})$

- Image de a par f :



- Antécédent de b par f

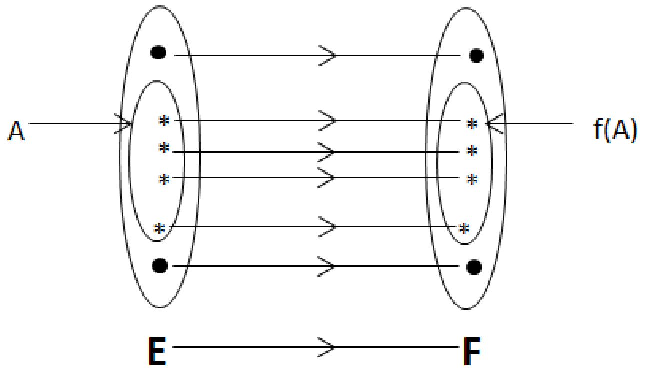


NB : ∗ Par la fonction f, l'image de a est l'ordonné f(a) du point d'abscisse à la courbe (Cf).

∗ Par la fonction f, les antécédents de b sont les abscisses x1, x2 des points d'ordonné b sur la courbe (Cf).

b) Image directe d'un ensemble

Définition : f est une fonction de E vers F et A une partie de E. On appelle l'image directe de A par F l'ensemble des images de tous les éléments de A et on note f(A).



Exemple : On considère une fonction f définie sur [0 ; 1] par : $f(x) = x - 2$

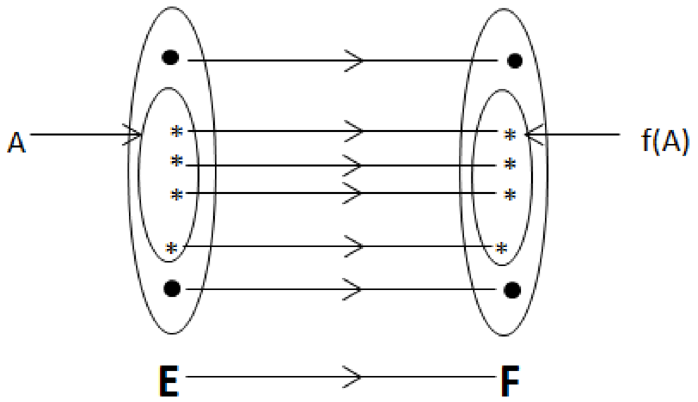
On a : f(0) = -2 et f(1) = -1

L'image directe par f de [0 ; 1] est l'intervalle [-2 ; -1] / f ([0 ; 1]) = [-2 ; -1].

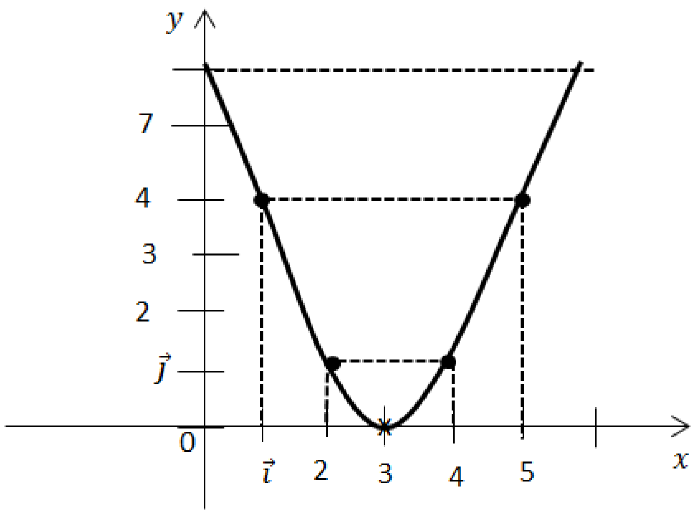
C) Image réciproque

Définition : f est une fonction définie de E $\to$ F et B une partie de F.

On appelle image réciproque de B par F notée f^{-1} défini de F $\to$ E, l'ensemble B' des antécédents par f de tous les éléments de F.



Exemple : Le plan est muni du repère (o,$\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$). La courbe (Cf) ci-dessous est la représentation graphique de la fonction définie par f(x) = (x-3)$^{2.}$



Déterminer graphiquement l'image réciproque de [4 ; 9] par cette fonction.

Solution :

Déterminons graphiquement l'image réciproque de [4 ; 9].f: $\underset{x \mapsto (x-3)^2}{IR \to IR}$

$f(1) = 4 \; et \; f(6) = 9 \Rightarrow f([1;6]) = [4\,;\; 9]; f\big([4\,;\; 9]\,\big) = [1;6]$.

Remarque : ∗ Pour résoudre graphiquement une équation du type f(x)=g(x), on peut procéder de la manière suivante :

- Disposer les courbes (Cf) et (Cg) d'équations respectives y= f(x) et y=g(x).

- L’ensemble des abscisses des points d’intersection de (Cf) et (Cg) est l’ensemble de solution de cette équation.

∗ Pour résoudre graphiquement une inéquation de type f(x)<g(x), on procède de la manière suivante :

- Disposer les courbes (Cf) et (Cg) d’inéquations respectives y= f(x) et y=g(x).
- L’ensemble de solution de l’inéquation est des abscisses des points de (Cf) situé au-dessus de (Cg).

Exemple : Résoudre graphiquement les équations et inéquations suivantes de la fonction $f(x) = g(x)$: $f(x) = x^2 + x - 1$ $et g(x) = \frac{x+1}{x-1}$

Solution :

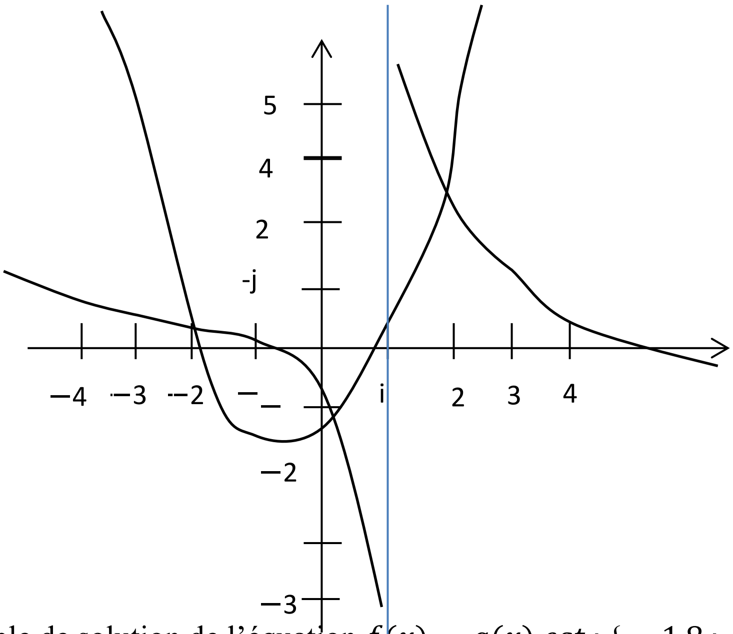
Résolvons graphiquement : $f(x) = g(x)$ et $f(x) > g(x)$.

On a : $Df =]-\infty;\ +\infty[$ et $Dg =]-\infty;\ -1[\ \cup\ ]1;\ +\infty[$

Représentation graphique

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	5	1	-1	-1	1	5	11

x	-4	-3	-2	-1	0	2	3	4
$g(x)$	3/5	1/2	1/3	0	-1	3	2	5/3



- L’ensemble de solution de l’équation $f(x) = g(x)$ est : $\{-1{,}8\ ;\ 0\ ;\ 1{,}5\}$
- L’ensemble de solution de l’inéquation $f(x) > g(x)$ est $]-\infty;\ -2[\ \cup\ ]2;\ +\infty[$.

5) Variation d’une fonction

a) Maximum et Minimum d’une fonction

Soit f une fonction numérique d’une variable réelle définit sur un ensemble E : α ∈ E.

- Lorsque, $\forall x \in E, \exists\, \alpha \in E\ /\ f(\alpha) \geq f(x)$, on dit que f(α) est le maximum de f sur E.

- Lorsque, $\forall x \in E, \exists \alpha \in E \, / \, f(\alpha) \leq f(x)$, alors f(α) est appelé le minimum de f sur E.

b) Recherche d'une fonction minimum ou d'un maximum d'une fonction

On considère une fonction de IR → IR définie par $f(x) = 1 + 2\sqrt{x-4}$.

Démontrer que la fonction f admet un minimum sur son ensemble de définition.

Solution :

Démontrons que f admet un minimum sur son Df.

f ∃ si et seulement si $x - 4 \geq 0 \Rightarrow x \geq 4 \Rightarrow x \in [4\,;\,+\infty[$

$Df = [4\,;\,+\infty[$.

Cherchons le minorant de f :

$\forall x \in [4\,;\,+\infty[\,;\, x - 4 \geq 0$

$\Rightarrow \sqrt{x-4} \geq \sqrt{0}$

$\Rightarrow 2\sqrt{x-4} \geq 2\sqrt{0}$

$\Rightarrow 1 + 2\sqrt{x-4} \geq 1 + 0$

$\Rightarrow 1 + 2\sqrt{x-4} \geq 1 \Leftrightarrow f(x) \geq 1$.

1 est-il le minimum de f sur [4 ; +∞[?

Pour se rassurer du minimum, résolvons l'équation f(x) =1

$\Rightarrow 1 + 2\sqrt{x-4} = 1$

$\Rightarrow 2\sqrt{x-4} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x-4} = \frac{0}{2} = 0$

$\Rightarrow \sqrt{x-4} = 0 \Leftrightarrow x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 4$

$\Rightarrow$ f(4) = 1 et f(α) = 1 $\Leftrightarrow \alpha = 4$

On a : $f(x) \geq f(4) \Leftrightarrow f(4) \leq f(x)$; la fonction f admet en 4 un minimum = 1.

Exemple : On considère une fonction $f(x) = -x^2 - 2x + 7$

Déterminer le majorant de f.

Solution :

Df = IR

$f(x) = -x^2 - 2x + 7 \Rightarrow -(x^2 + 2x - 7) = -[(x+1)^2 - 8]$

$f(x) = -[(x+1)^2 - 8] = -(x+1)^2 + 8$

Cherchons le majorant :

$\forall x \in$ IR $(x+1)^2 \geq 0$

$-(x+1)^2 \leq 0$

$\Rightarrow -(x+1)^2 + 8 \leq 0 + 8$

$\Rightarrow -(x+1)^2 + 8 \leq 8 \Leftrightarrow f(x) \leq 8$

8 est-il un maximum sur IR ?

Résolvons l'équation $f(x) = 8$.

$f(x) = 8 \Leftrightarrow -(x+1)^2 + 8 = 8$

$\Rightarrow -(x+1)^2 = 0$

$\Rightarrow -1 \neq 0$ et $(x+1)^2 = 0 \Rightarrow x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$

$\Rightarrow \mathrm{f}(-1) = 8 \Leftrightarrow \mathrm{f}(x) \leq \mathrm{f}(-1)$

$\Rightarrow f(x) \leq f(\alpha) \Leftrightarrow f(\alpha) \geq f(x)$ $avec$ $\alpha = -1$

8 est le maximum de f sur IR, alors f admet en -1 un maximum égal à 8.

6) Sens de variation d'une fonction

a) Fonction croissante, Fonction décroissante sur un intervalle

- Une fonction f est croissante sur un intervalle I, signifie que sur l'intervalle I, si les valeurs de la variable x augmentent, alors, les images f(x) augmentent aussi.

$\forall (x_1, x_2) \in I^2$; $x_1 \leq x_2 \Rightarrow \mathrm{f}(x_1) \leq f(x_2)$, donc f est croissante sur I.

Autrement dit, une fonction croissante conserve l'ordre.

b) Représentation graphique d'une fonction variable

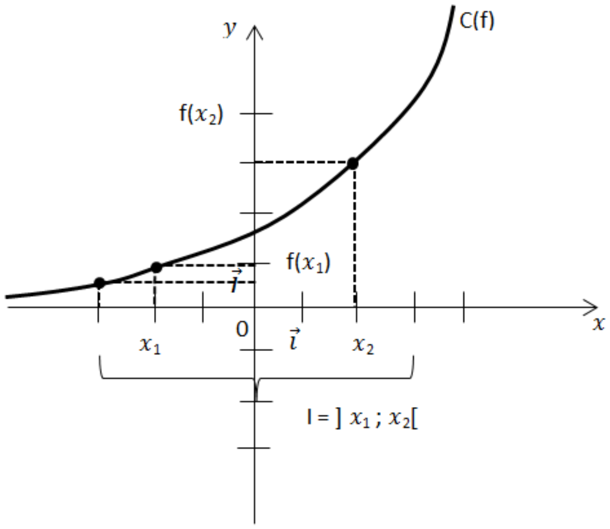


Tableau de Variation

Respectivement, $x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow$ f est croissante sur] x_1 ; x_2[

x	x_1	x_2
f (x)	f(X_1) $\nearrow$	f(X_2)

- Une fonction f est décroissante sur l'intervalle I, signifie que sur l'intervalle I, si les valeurs de la variable x augmentent, alors les images f(x) diminuent.

$\forall (x_1, x_2) \in I^2, x_1 \leq x_2 \Rightarrow \mathrm{f}(x_1) \geq \mathrm{f}(x_2)$, alors f est décrois

c) Représentation graphique

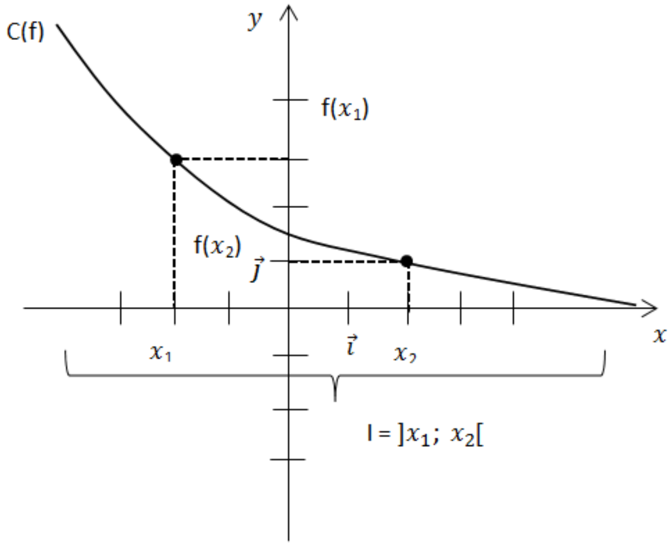


Tableau de variation

Respectivement : $x_1 < x_2 \;=>\; f(x_1) > f(x_2)$

f est décroissante sur $]x_1\,;\,x_2[$

Autrement dit, une fonction décroissante échange de l'ordre.

x	x_1	x_2
f (x)	f (x_1) ↘	f (x_2)

- Une fonction est croissante sur un intervalle I, lorsque pour H,

$x_1, x_2 \in$ I, $\Rightarrow$ $f(x_1) = f(x_2)$

Représentation graphique

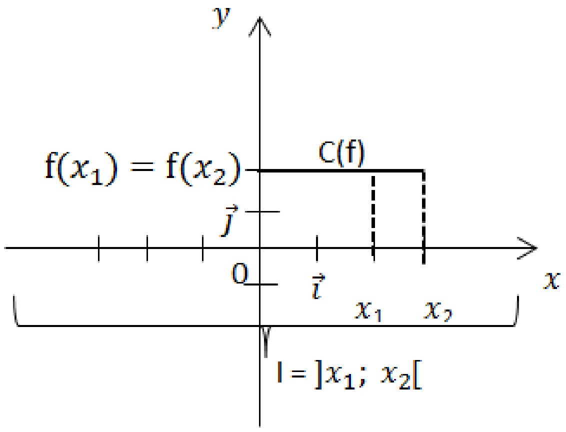


Tableau de variation

Pour tout $(x_1, x_2) \in I^2$, $f(x_1)=f(x_2)$, alors f est croissante sur $]x_1\,;\,x_2[$.

x	x_1	x_2
f(x)	$f(x_1)$ →	$f(x_2)$

∗ f est une fonction monotone sur I lorsqu'elle est :

- Soit croissante sur I ;
- Soit décroissante sur I.

∗ Une fonction f est strictement monotone sur I lorsqu'elle est :

- Soit strictement croissante sur I ;
- Soit strictement décroissante sur I.

7) Etude de la variation d'une fonction dans un intervalle

Soit x_0 un élément de l'intervalle I.

- On dit que f admet un maximum $f(x_0)$, si et seulement si, $f(x_0) \geq f(x)$ $\forall\, x \in$ IR.

Tableau de variation

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
$f(x)$	$-$	↗	$f(x_0)$ Maximum	↘	

- On dit que f admet un minimum $f(x_0)$ en x_0 si, pour tout $x_0 \in$ IR, $f(x_0) \leq f(x)$, le point $M\begin{pmatrix} x0 \\ f(x0) \end{pmatrix}$ est un sommet à la courbe représentatif.

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
$f(x)$		↘	$f(x_0)$ Maximum	↗	

<u>Exemple</u> : On considère une fonction définie sur IR par : $f(x) = -x^2 + 2x - 1$

a) Etudier la variation de f.
b) Donner la représentation graphique de f.

Solution

a) Etudions la variation de f.

$Df\ =\ ]-\infty;\ +\infty[\ =\ ]-\infty;\ 0] \cup [0\ ;\ +\infty[$

$*$ Sens de variation de f.

$\forall\ x \in\ ]-\infty;\ 0[\ =\ I1$

$\forall(-1;-2) \in I_1^2; -1 \geq -2$

$f(-1) = -(-1)^2 + 2(-1) - 1$

$\quad = -1 - 2 - 1$

$\Rightarrow f(-1) = -4$

$f(-2) = -(-2)^2 + 2(-2) - 1 = -4 - 4 - 1 = -9$

$\Rightarrow f(-2) = -9$

$-4 \geq -9 \Rightarrow f(-1) \geq f(-2)$;

Alors f est croissante sur]-∞; 0].

$\forall$ x $\in$ [0 ; +∞[$= I_2$

$\forall(1,2) \in I_2^2 \Rightarrow 1 \leq 2$

$f(1) = -(1)^2 + 2(1) - 1 = -1 + 2 - 1 = 0$

$f(1) = 0$

$f(2) = -(2)^2 + 2(2) - 1 = -4 + 4 - 1 = -1$

$f(2) = -1$

$0 \geq -1 \Leftrightarrow f(1) \geq f(2)$, alors f est décroissante sur I_2.

∗ Tableau de variation

$f(0) = -(0)^2 + 2(0) - 1 = 0 + 0 - 1 = -1$

$\Rightarrow f(0) = -1$

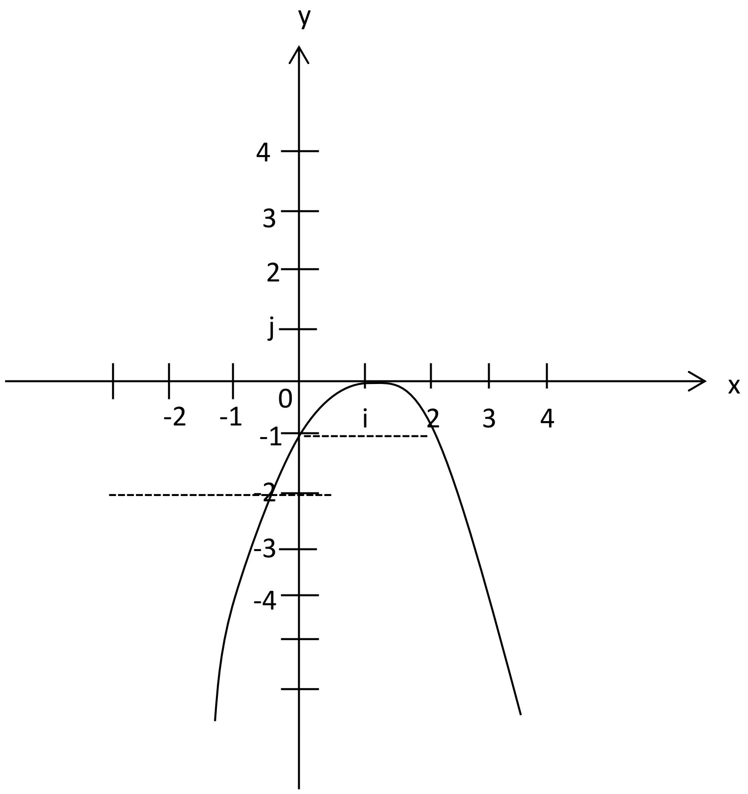
x	-∞		0		+∞
$f(x)$		$\nearrow$	-1	$\searrow$	

-1 est le maximum de f en 0 sur IR

b) Représentation graphique

∗ Tableau de valeur

x	- 2	- 1	0	1	2
f(x)	- 9	- 4	- 1	0	- 1



8) Parité et période

a) Parité

∗ Fonction paire

Soit une fonction numérique et Df son domaine de définition.
On dit que f est une fonction paire si et seulement si
$\forall x \in Df, \Rightarrow -x \in Df \;/\; f(-x) \geq f(x)$, alors on dit que f est paire.

Exemple : Soit $f(x) = x^2 - 2$. Montrer que f est paire.

Solution
Montrons que f est paire.
$Df =]-\infty; +\infty[$
$\forall x \in Df; \Rightarrow -x \in Df, f(-x) = (-x)^2 - 2 = x^2 - 2$
$f(-x) = f(x)$, alors f est paire.

∗ Fonction impaire

De même que la fonction paire, $\forall\ x \in Df\ ;\ \Rightarrow\ -x \in Df\,/\,f(-x) = f(x)$, alors f est impaire.

Exemple : Soit f(x) $= \frac{1}{x^3}$; Montrons que f est une fonction impaire.

$f\ \exists\ \Leftrightarrow\ x^3 \neq 0\ \Rightarrow\ x \neq \sqrt[3]{0}\ \Rightarrow x \neq 0$

$\Rightarrow Df =]-\infty; 0[\ \cup\ ]0; +\infty[$

$\forall x \in Df; \Rightarrow -x \in Df\,/\,f(-1) = \frac{1}{(-x)^3} = \frac{1}{-x^3} = -\left(\frac{1}{x^3}\right)$

$\Rightarrow f(-x) = -f(x)$, alors f est impaire.

Remarque

De plus de ce qui précède,

$\forall\ x \in Df\ ;\ \Rightarrow\ -x \in Df\,/\,f(-x) \neq f(x)\ et\ f(-x) \neq -$ f(x), alors on affirme que la fonction f n'est ni paire ni impaire.

b) Fonction périodique

Soit f une fonction numérique. On dit que f est périodique de période T ou T période ;

$\forall$ x $\in Df\ ;\ \Rightarrow\ x + T\ x \in Df\ \ et\ x - T\ x \in Df\,/\,f(x+T) = f(x-T) = f(x)$; alors f est périodique de période T.

Exemple :

Montrons que f est périodique de période I = 2 pour $f(x) = x - E(x)$ ou désigne la période.

Solution :

Montrons que f est périodique de période I = 2.

$\forall x \in IR\,;\ \Rightarrow\ x + 2 \in IR\ et\ x - 2 \in IR\ \ /\,f(x + 2) = f(x).$

$f(x + 2) = x + 2 - E(x + 2)$

$= x + 2 - [E_{(x)} + E_{(2)}]\,or E_{(2)} = 2$

$\Rightarrow\ x + 2 - E_{(x)} - 2 = x - E_{(x)}$

$\Rightarrow\ f(x + 2) =$ f(x); alors f est périodique de période I = 2.

Chapitre 4 : Polynôme et Fonctions Rationnelles

1. Généralité sur les Polynômes

Considérons la fonction numérique définie par :

$f(x) = (1-2x)(x^3+3) + \; 2x(x^3-4) + x^2 - 1$, le développement de f donne :

$f(x) = x^3 + 3 - 2x^4 - 6x + 2x^4 - 8x + x^2 - 1$

$f(x) = x^3 + x^2 - 14x + 2$

Le coefficient du monôme le plus haut degré est 1 ; f est 1 polynôme de degré 3.

a. Définition :

Toute fonction numérique f de variable réel x definie par
$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_0 x^0$ est appelée polynome de degre n ou
$a_n;\ a_{n-1};\ n_{n-2}; \ldots\ a_0$ designe les coefficients de $f\ et\ n; n-1; n-2 \ldots 0$ sont les degre du polynome f.

$a_n x^n$ est appelé monome ou terme du plus haut degré de coefficient a_n et de degre n.

On appelle polynôme, toute somme algébrique des monômes et d'une constante.

Exemple : $f(x) = \; x^3 + x^2 - 14x + 2$

Le degré de $n\ de\ f$ est noté generablement $''d°f'' = n$

Exemple : $d°f = 3$

2. Racine d'un polynôme

On appelle racine évidente d'un polynôme$f$, tout nombre reel α, tel que $f(\alpha) = 0$. Autrement dit, pour déterminer la racine évidente d'une fonction f ; ceci consiste à resoudre simplement l'equation $f(x) = 0$.

Exemple 1 : on considère une fonction f definie par : $f(x) = 2x^2 + x - 3$. Montrer que le réel 1 est la racine evidente de f.

Solution :

Montrons que 1 est la racine évidente de f si et seulement si $f(1) = 0$

$\Rightarrow f(1) = 2 \times 1^2 + 1 - 3 = 2 + 1 - 3 = 3 - 3 = 0$

$\Rightarrow f(1) = 0$

$\Rightarrow$ 1 est la racine evidente de f.

Exemple 2 : Déterminer les racines évidentes de f definie par : $f(x) = \; x^2 + x - 2$

Solution :

Résolvons l'équation $f(x) = 0$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow\ x^2 + x - 2 = 0\ \Leftrightarrow\ x^2 - x + 2x - 2 = 0$

$\Rightarrow x(x-1) + 2(x-1) = 0$

$\Rightarrow (x-1)(x+2) = 0$

$$\begin{cases} x - 1 = 0 \\ ou \\ x + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ ou \\ x = -2 \end{cases}$$

$\boxed{S = \{-2; 1\}}$

1 et -2 sont les racines évidentes de f.

3. Produit des Polynômes

Soient $f et\ g$ deux fonctions distincts definie par :

$$\begin{cases} f(x) = x^3 + 3x + 2 \\ g(x) = 3x^3 - 2x^2 + x - 1 \end{cases}$$

Posons $v(x) = f(x) \times g(x)$

Le produit de deux polynômes $f\ et\ g$ est un polynôme V $tel\ que\ v = f \times g\ et\ de\ degre\ v$:

$d°v = d°(f \times g); d°v = d°f + d°g \Rightarrow d°v = 6.$

Déterminons le polynôme v

$V(x) = f(x) \times f(x) = (x^3 + 3x + 2)(3x^3 - 2x^2 + x - 1)$

$= 3x^6 - 2x^5 + x^4 - x^3 + 9x^4 - 6x^3 + 3x^2 - 3x + 6x^3 - 4x^2 + 2x - 2$

$\boxed{\mathrm{V}(x) = 3x^6 - 2x^5 + 10x^4 - x^3 - x^2 - x - 2}$

4. Somme des polynômes

La somme de deux polynômes $f\ et\ g$ est un polynome noté $(f + g)$; le degré de $(f + g)$ est inférieur ou égal au plus grand degré des monômes de degré de $(f\ et\ de\ g)$.

Exemple : (lorsque le degré de $\left(f = d°g = 3; alors\ d°(f + g)\ = 3\right)$.

5. Polynôme du second degré (type : $ax^2 + bx + c$)

a. Forme canonique

La forme canonique nous sert à factoriser les polynômes du second degré :

Soit $p(x) = ax^2 + bx + c), avec\ (a, b, c) \in R^3$.

- On met premièrement *a* en facteur :

$p(x) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$

- On cherche le début du carré de $x^2 + \frac{b}{a}x$:

$x^2 + \frac{b}{a}x = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2$

- Remplaçons $x^2 + \frac{b}{a}x$ dans $p(x)$ par son début de carré :

$p(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right]$

$= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b}{4a^2}^2 + \frac{c}{a}\right] = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b}{4a^2}^2 + \frac{4ac}{4a^2}\right]$

$= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)\right]$

$$\boxed{p(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right)\right]}$$

Cette forme finale de $p(x)$ est appelée la forme canonique.

Exemple : mettre sous la forme canonique les polynômes suivants :

$f_1(x) = 4x^2 - 12x + 10$

$f_2(x) = x^2 - 7x + 6$

$f_3(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + 1$

Forme canonique :

$f_1(x) = 4x^2 - 12x + 10 = 4(x^2 - \frac{12}{4}x + \frac{10}{4})$

$= 4(x^2 - 3x + \frac{5}{2})$

Début du carré de $x^2 - 3x$

$x^2 - 3x = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{-3}{2}\right)^2$

$= \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}$

$f_1(x) = 4\left[\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + \frac{5}{2}\right] = 4\left[\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + \frac{10}{4}\right]$

$= 4\left[\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{9-10}{4}\right)\right] = 4\left[\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{-4}{4}\right)\right]$

$= 4\left[\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+1\right]$

$$\boxed{f_1(x) = 4\left[\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+1\right]}$$

$f_2(x) = \ x^2 - 7x + 6 = 1(x^2 - 7x + 6)$

$x^2 - 7x = (x - \frac{7}{2})^{\ 2} - (\frac{7}{2})^{\ 2} = (x - \frac{7}{2})^{\ 2} - \frac{49}{4}$

$f_2(x) = \ \left((x - \frac{7}{2})^{\ 2} - \frac{49}{4} + 6\right) = (x\frac{-7}{2})^{\ 2} - \left(\frac{49-24}{4}\right)$

$$\boxed{f_2(x) = (x - \frac{7}{2})^{\ 2} - \frac{25}{4}}$$

$$\boxed{f_3(x) = \left[\frac{1}{2}(x-1)^2+1\right] = \frac{1}{2}(x-1)^2 + 1 = f_3(x)}$$

b. Factorisation d'un polynôme du second degré :

On sait que : $p(x) = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)\right]$ d'après la forme canonique.

Posons $p(x) = \alpha = \frac{b}{2a}\ et\ \beta = -\left(\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)$

On obtient : $p(x) = a[(x+\alpha)^2 + \beta]$

Discussions :

- si $\beta > 0$: alors le polynôme P n'admet de racine évidente car $(x+\alpha)^2 + \beta\ est$ superieur u egal à β; donc strictement supérieur à zéro pour toute valeur de x. P n'est pas factorisable, sinon il sera pour un polynôme de degré 1 et donc admettrait une racine évidente.
- si $\beta < 0$, alors on factorise le polynôme si P en utilisant la différence de deux carrés pour factoriser $(x+\alpha)^2 + \beta$ et on en deduit les racines de P.
- si $\beta = 0$, alors $p(x) = a(x+\alpha)^2$ et P admet racine double (une seule racine : $-\alpha$).

Exemple : Factoriser les polynômes suivants :

$p(x) = x^2 - 7x + 6$

$f(x) = x^2 - 2x + 1$

$p(x) = -2x^2 + x + 5$

Solution :

$p(x) = x^2 - 7x + 6$

Début de carré de $x^2 - 7x$

$$x^2 - 7x = \left(x - \frac{7}{2}\right)^2 - \left(\frac{7}{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow p(x) = \left(\left(x - \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{49}{4} + 6\right) = \left(\left(x - \frac{7}{2}\right)^2 - \left(\frac{49-24}{4}\right)\right)$$

$$= \left(\left(x - \frac{7}{2}\right)^2 - \left(\frac{25}{4}\right)\right) = \left(\left(x - \frac{7}{2}\right)^2 - \left(\frac{25}{4}\right)\right)$$

$$p(x) = \left(\left(x - \frac{7}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2\right) = \left(x - \frac{7}{2} - \frac{5}{2}\right)\left(x - \frac{7}{2} + \frac{5}{2}\right)$$

$$\left(x - \frac{12}{2}\right)\left(x - \frac{2}{2}\right) = (x-6)(x-1)$$

$$\boxed{p(x) = (x-1)(x-6)}$$

6. Etude de signe d'un polynôme du second degré

Pour étudier le signe d'un polynôme, on procède de la manière suivante :

- Donner l'ensemble de définition de la fonction
- Chercher les racines du polynôme
- Etablir un tableau de signe si le polynôme admet des racines. sinon on considère le signe du monôme le plus haut degré.
- Interpréter le tableau de signe.

Exemple : Etudier le signe des polynômes suivants :

$f(x) = x^2 + 2x - 3$

$p(x) = x^2 - 10x + 25$

$h(x) = -x^2 + 3x - 2$

Solution :

Etude de signe des polynômes :

$f(x) = x^2 + 2x - 3$; Df = IR

Les racines de f,

Résolvons dans IR l'equation $f(x) = 0$

$\Rightarrow x^2 + 2x - 3 = 0$

D'après la forme canonique : $x^2 + 2x = \left(x + \frac{2}{2}\right)^2 - 1$

$\Rightarrow ((x+1)^2 - 1 - 3 \Rightarrow (x+1)^2 - 4) = 0 \Rightarrow (x+1)^2 - (2)^2$

$\Rightarrow (x+1-2)(x+1+2) = 0$

$= (x-1)(x+3) = 0$

$\Rightarrow (x-1) = 0 \; ou \; (x+3) = 0$

$x = 1 \; ou \; x = -3$

$\boxed{S = \{1; -3\}}$ $\quad 1 \; et - 3 \; sont \; les \; racines \; de \; f.$

Tableau de signe :

x	$-\infty$	-3		1		$+\infty$
$(x+3)$	$-$	0	$+$		$+$	
$(x-1)$	$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+$		$-$		$+$	

$$\forall x \in]-\infty; -3[\cup]1; +\infty[; f(x) > 0$$

$$\forall x \in]-3; 1[; f(x) < 0$$

$$\forall x \in \{-3; 1\}; f(x) = 0$$

7. Factorisation par changement de variable

Soit f une fonction definit sur R par $f(x) = x^4 - 3x^2 + 2$

a. Factorisation

Posons $X = x^2$

$<=> f(X) = X^4 - 3X^2 + 2$

Le début de carré de $X^2 - 3X$

$X^2 - 3X = \left(X - \frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \left(X - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}$

$\Leftrightarrow f(x) = \left(\left(X - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + 2\right) = \left(X - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9+8}{4}$

$= \left(X - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}) \; = \left(X - \frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2$

$\Rightarrow f(x) = \left(X - \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\right)\left(X - \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\right) = (X-1)(X-2)$

$or \; X = x^2$

$f(x) = (x^2 - 1)(x^2 - 2) = (x^2 - (\,1)^2(x^2 - \left(\sqrt{2}\right)^2\right)$

$\boxed{f(x) = (x-1)(x+1)(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})}$

Etude de signe de f

$\forall x \in$ IR; $f(x) = 0$

$f(x) = (x-1)(x+1)(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2}) = 0$

$\Rightarrow x - 1 = 0 \; ou \; x + 1 = 0 \; ou \; (x-\sqrt{2}) = 0 \; ou \; (x+\sqrt{2}) = 0$

$\Rightarrow x = 1 \;\; ou \; x = -1 \;\; ou \; x = \sqrt{2} \; ou \;\; x = -\sqrt{2}$

Tableau de signe :

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		-1		1		$+\sqrt{2}$		$+\infty$
$(x+\sqrt{2})$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$	
$(x+1)$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$(x-1)$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$(x-\sqrt{2})$		$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$(+)$		$-$		$(+)$		$-$		$(+)$	

$$\forall \, x \in \left]-\infty; -\sqrt{2}\right[\cup \left]-1; 1\right[\cup \left]\sqrt{2}; \; +\infty\right[\, ; f(x) > 0$$

$$\forall \, x \in \left]-\sqrt{2}; -1\right[\cup \left]1; \; \sqrt{2}\,\right[\, ; f(x) < 0$$

$$\forall \, x \in \left\{-\sqrt{2}; \; -1; 1; \; \sqrt{2}\right\} ; f(x) = 0$$

8. Factorisation par $x - \alpha$

Théorème : Soit f un polynome et α un nombre reel, α est la racine de f si et seulement si, il existe un polynôme $Q(x)$ tel que $\forall x \in$ IR, $\frac{f(x)}{Q(x)} = (x - \alpha) \Leftrightarrow f(x) = (x-\alpha)Q(x)$.

On affirme que α est racine evidente de f *et* $Q(x)$ est le quotient de f *par* $(x - \alpha)$.

a. Détermination pratique :

- **Méthode par identification ou méthode des coefficients à déterminer :**

On considère le polynôme f définie par : $f(x) = 2x^3 - x^2 - 4x + 3$

a) Calculer $f(1)$

b) Ecrire $f(x)$ sous la forme de $f(x) = (x-1)Q(x)$, *ou* $Q(x)$ est un plynome du second degré.

c) Factoriser $f(x)$

d) Etudier son signe

Solution :

$f(x) = 2x^3 - x^2 - 4x + 3$

a. Calculons $f(1)$

$f(1) = 2 \times 1^3 - 1^2 - 4 \times 1 + 3 = 2 - 1 - 4 + 3 = 5 - 5 = 0$

$f(1) = 0$; alors 1 est la racine de f.

b. Ecrivons $f(x)$ *sous la forme de* $f(x) = (x-1)Q(x)$

Posons $Q(x) = ax^2 + bx + c \iff$

$f(x) = (x-1)(x^2 + bx + c)$

$= ax^3 + bx^2 + cx - ax^2 - bx - c$

$f(x) = ax^3 + (b-a)x^2 + (c-b)x - c$

Par identification :

$2x^3 - x^2 - 4x + 3 = ax^3 + (b-a)x^2 + (c-b)x - c$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b - a = -1 \\ c - b = 4 \\ -c = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b - 2 = -1 \\ c = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \\ c = -3 \end{cases}$$

D'où $Q(x) = 2x^2 + x - 3$

$$\boxed{f(x) = (x-1)(2x^2 + x - 3)}$$

c. factorisons $f(x)$

On a $f(x) = (x-1)(2x^2 + x - 3)$

Avec $Q(x) = 2x^2 + x - 3$

D'après la forme canonique de $Q(x)$

$$Q(x) = 2\left[x^2 + \frac{x}{2} - \frac{3}{2}\right] = 2\left[\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 - \left(\frac{1}{4}\right)^2 - \frac{3}{2}\right]$$

$$= 2\left[\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{16} - \frac{3}{2}\right] = 2\left[\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{(1+24)}{16}\right]$$

$$= 2\left[\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1-24}{16}\right] = 2\left[\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{25}{16}\right]$$

$$= 2\left[\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 - \left(\frac{5}{4}\right)^2\right] = 2\left[\left(x + \frac{1}{4} - \frac{5}{4}\right)\left(x + \frac{1}{4} + \frac{5}{4}\right)\right]$$

$$= 2(x-1)\left(x + \frac{3}{2}\right)$$

$$Q(x) = 2(x-1)\left(x + \frac{3}{2}\right) = (x-1)(2x+3)$$

$$f(x) = (x-1)Q(x) = (x-1)(x-1)(2x+3)$$

$$\boxed{\boldsymbol{f(x) = (x-1)^2(2x+3)}}$$

d. Etudions le signe de f

$Df = R;\ \forall x \in R, f(x) = 0 = (x-1)^2(2x+3) = 0$

$\Rightarrow (x-1)^2 = 0\ ou\ (2x+3) = 0\ \Rightarrow x = 1\ ou\ x = -\frac{3}{2}$

Tableau de signe :

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		1		$+\infty$
$(2x+3)$		$-$	0	$+$		$+$	
$(x-1)^2$		$+$		$+$	0	$+$	
$f(x)$		$-$		$+$		$+$	

$\forall x \in \left]-\frac{3}{2}; 1\right[\cup \left]1; +\infty\right[; f(x) > 0$

$\forall x \in \left]-\infty; -\frac{3}{2}\right[; f(x) < 0$

$\forall x \in \left\{-\frac{3}{2}; 1\right\}; f(x) = 0$

- **Méthode par division euclidienne :**

Le programme permettant d'effectuer le quotient de deux nombres entiers naturels se généralise au polynôme.

On dispose le calcul de la même façon, et à chaque étape on détermine le quotient par x du terme de plus haut degré du reste.

Exemple : factoriser et étudier le signe du polynôme f définit par $f(x) = x^3 - 7x - 6$

Solution :

Factorisons f

Cherchons la racine évidente de f $pour\ d = 1$.

$f(1) = (1)^3 - 7 \times 1 - 6 = 1 - 7 - 6 = -6 - 6 = -12$

$\Rightarrow$ n'est pas la racine évidente de f pour $\alpha = -1$ on a :

$f(-1) = (-1)^3 - 7 \times (-1) - 6 = -1 + 7 - 6 = 7 - 7 = 0$

$f(-1) = 0$, alors -1 est la racine évidente de f

Donc f peut se mettre sous la forme de : $f(x) = (x-\alpha)Q(x)\ avec\ \alpha = -1$

$\Rightarrow f(x) = (x+1)Q(x)\ \ => Q(x) = \frac{f(x)}{(x+1)}$

D'après la division euclidienne on a :

$Q(x) = \frac{x^3-7x-6}{x+1}$

$$
\begin{array}{l|l}
x^2 - 7x - 6 & \\
x^3 + x^2 & (x+1) \\
\hline
-x^2 - 7x - 6 & x^2 - x - 6 \\
x^2 + x & \\
\hline
-6x - 6 & \\
+6x + 6 & \\
\hline
0 &
\end{array}
$$

$Q(x) = x^2 - x - 6$

Étudions le signe de f :

$f(x) = (x+1)Q(x)$

$Df = \text{IR}; f(x) = 0$ On a $\Leftrightarrow (x+1)Q(x) = 0$

$\Rightarrow (x+1)(x^2 - x - 6) = 0$

D'après la forme canonique de $Q(x)$:

On a : $x^2 - x - 6 = (x - \frac{1}{2})^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 6 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - 6$

$\Rightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1-24}{4} = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2$

$= \left(x - \frac{1}{2} - \frac{5}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2} + \frac{5}{2}\right) = (x-3)(x+2)$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow (x+1)(x-3)(x+2) = 0$

$\Rightarrow x + 1 = 0 \; ou \; (x-3) = 0 \; ou \; (x+2) = 0$

$\Rightarrow x = -1 \; ou \; x = 3 \; ou \; x = -2$

$-1; \; -2 \; et \; 3$ sont les racines évidentes de f.

$$\boxed{f(x) = (x+1)(x-3)(x+2)}$$

est la forme factorisée de f.

Tableau de signe :

x	$-\infty$		-2		-1		3		$+\infty$
$(x+2)$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$(x+1)$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$(x-3)$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$-$		$+$		$-$		$+$	

$\forall x \in]-\infty; -2[\cup]-1; 3[; f(x) < 0$

$\forall x \in]-2; -1[\cup]3; +\infty[; f(x) > 0$

$\forall x \in \{-2; -1; 3\}; f(x) = 0$

- **Méthode de Horner :**

Cette méthode permet à déterminer le polynôme
$Q(x) = ax^2 + bx + c \ \ ou\ a, b\ et\ c$ des nombres réels.

Exemple : On considère la fonction f définie par : $f(x) = -2x^3 - x^2 + 4x - 4$

Factoriser le polynôme f et étudier son signe.
Solution :

- Factorisation :

Cherchons la racine évidente pour $\alpha = -2$

$f(-2) = -2(-2)^3 - (-2)^2 + 4(-2) - 4$

$= +16 - 4 - 8 - 4 = 16 - 16 + 0$

$f(-2) = 0 \Rightarrow -2$ est la racine evidente de f, alors f peut se mettre sous la forme de:

$f(x) = (x + 2)Q(x)\ avec\ Q(x) = ax^2 + bx + c$

Determinons $Q(x)$par la methode d'Horner.

	-2	-1	4	-4
-2		4	-6	4
	-2	3	-2	0
	a	b	c	

$\mathrm{Q}(x) = -2x^2 + 3x - 2$

D'après la forme canonique :

$\mathrm{Q}(x) = -2[x^2 - \frac{3x}{2} + 1] = 2[\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{9}{4} + 1]$

$= 2[\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{9+4}{4}] = 2[\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{5}{4}]$

$Q(x) = -2\left(x - \frac{3}{4} - \frac{\sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right)$

$$\boxed{Q(x) = 2\left(x - \frac{3-2\sqrt{5}}{4}\right)\left(x - \frac{3+2\sqrt{5}}{4}\right)}$$

$f(x) = -2(x + 2)\left(x - \frac{3-2\sqrt{5}}{4}\right)\left(x - \frac{3+2\sqrt{5}}{4}\right)$

Etude de signe de f

$\forall x \in \text{IR}, f(x) = 0 \Leftrightarrow -2(x+2)\left(x - \frac{3-2\sqrt{5}}{4}\right)\left(x - \frac{3+2\sqrt{5}}{4}\right) = 0$

$\Rightarrow -2 \neq 0 \; donc \; (x+2) = 0 \; ou \; \left(x - \frac{3-2\sqrt{5}}{4}\right) = 0 \; ou \; \left(x - \frac{3+2\sqrt{5}}{4}\right) = 0$

$\Rightarrow x = -2 \; ou \quad ou \; x = \frac{3+2\sqrt{5}}{4} \; ou \; x = \frac{3-2\sqrt{5}}{4}$

$-2; \frac{3+2\sqrt{5}}{4} \; et \; \frac{3-2\sqrt{5}}{4}$ sont les racines évidentes de f.

Tableau de signe :

x	$-\infty$		-2		$\frac{3-2\sqrt{5}}{4}$		$\frac{3+2\sqrt{5}}{4}$		$+\infty$
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x - \frac{3+2\sqrt{5}}{4}$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x - \frac{3-2\sqrt{5}}{4}$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$-$		$+$		$-$		$+$	

$\forall x \in \left]-\infty; -2\right[\cup \left]\frac{3-2\sqrt{5}}{4}; \frac{3+2\sqrt{5}}{4}\right[; f(x) < 0$

$\forall x \in \left]-2; \frac{3-2\sqrt{5}}{4}\right[\cup \left]\frac{3+2\sqrt{5}}{4}; +\infty\right[; f(x) > 0$

$\forall x \in \left\{-2; \frac{3-2\sqrt{5}}{4}; \frac{3+2\sqrt{5}}{4}\right\}; f(x) = 0$

9. Fraction rationnelle

a) Définition

Toute fonction numérique de la fonction :$\frac{f}{a}$ où
$f \; et \; q$ sont deux fonctions polynomes, est appelée fraction rationnelle

c'est –à - dire $h(x) = \frac{f(x)}{Q(x)} \; avec \; h(x)$ la fraction rationnelle.

b) Domaine de définition

La fraction rationnelle
$h(x)$ a pour ensemble de définition le complementaire dans IR de l'ensemble des racines de $Q(x)$.

Exemple : Donner le domaine de définition des fonctions rationnelles suivantes :

$h(x) = \frac{x-3}{x-1}$; $\qquad U(x) = \frac{x^2-3x+1}{x^2+2}$; $\qquad f(x) = \frac{x^2-4x+1}{3-x^2}$

Solution :

$h(x) = \frac{x-3}{x-1}; h(x) existe\ si\ et\ seulement\ si\ x-1 \neq 0 \ \Rightarrow x \neq 1$

Dh = IR \ {1} = $]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$

$$U(x) = \frac{x^2-3x+1}{x^2+2}; U(x) existe\ si\ et\ seulement\ si\ x^2+2 \neq 0 \Rightarrow x^2 \neq -2\ (impossible)$$

DU = $]-\infty; +\infty[$ = IP

$f(x) = \frac{x^2-4x+1}{3-x^2}; f(x) existe\ si\ et\ seulement\ si\ 3-x^2 \neq 0 \ \Rightarrow (\sqrt{3})^2 - x^2 \neq 0 \ \Leftrightarrow$ $(\sqrt{3}-x)(\sqrt{3}+x) \neq 0$

$\Rightarrow \sqrt{3} - x \neq ou\ \sqrt{3} + x \neq 0$

$-x \neq -\sqrt{3}\ ou\ x \neq \ -\sqrt{3} \ \Rightarrow x \neq \sqrt{3}\ ou\ x \neq -\sqrt{3}$

$\boxed{\text{Df} =]-\infty; -\sqrt{3}[\cup]-\sqrt{3}; \sqrt{3}[\cup]\sqrt{3}; +\infty[}$

c) Simplification des fractions rationnelles

Pour simplifier une fraction rationnelle, on procède de la manière suivante :

- Donner l'ensemble de définition ;
- Factoriser le numérateur et le dénominateur puis simplifier la fonction.

Exemple : Soit $f(x) = \frac{x^2-4}{x+2}; simplifier\ f(x)$

Solution :

Simplifions f

$f(x) existe\ si\ et\ seleument\ si\ x+2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 2$

$Df =]-\infty; -2[\cup]-2; +\infty[$

$\forall x \in Df; f(x) = \frac{x^2-4}{x+2} = \frac{(x+2)(x-2)}{x+2} = x-2$

$\boxed{f(x) = x-2}$

d) Etude de signe d'une fraction rationnelle

On considère une fonction rationnelle f definie par: $f(x) = \frac{x^2-x-6}{9-x^2}$

1. Donner la condition d'existence de f

2. Etudier le signe de f

Solution :

1. condition d'existence de f

f $existe\ si\ et\ seulement\ si$ $9-x^2 \neq 0 \Leftrightarrow 3^2-x^2 \neq 0$

$\Rightarrow (3-x)(3+x) \neq 0 \Leftrightarrow 3-x \neq 0\ et\ 3+x \neq 0$

$\Rightarrow x \neq -3\ et\ x \neq 3$

$$\boxed{Df =]-\infty;\ -3[\cup]-3;3[\cup]3;\ +\infty[}$$

2. étude de signe f

$\forall x \in Df,\ f(x)=0\ \Leftrightarrow \frac{x^2-x-6}{9-x^2}=0$

$\Leftrightarrow x^2-x-6=0$

$=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2-6=0$

$\Rightarrow \left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}-6=0$

$\Rightarrow \left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1-24}{4}=0$

$\Rightarrow \left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{25}{4}=0 \Leftrightarrow \left(x-\frac{1}{2}-\frac{5}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}+\frac{5}{2}\right)=0$

$\Rightarrow (x-3)(x+2)=0 \Leftrightarrow x=3\ ou\ x=-2$

Tableau de signe :

x	$-\infty$	-3		-2		3	$+\infty$
$(x+3)$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$(x+2)$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$3-x$	$+$		$+$		$+$	0	$-$
$f(x)$	$+$		$-$		$+$		$-$

$\forall x \in]-\infty;\ -3[\cup]-2;3[; f(x) > 0$

$\forall x \in]-3;\ 2[\cup]3;+\infty[; \mathrm{f}(x) < 0$

$\forall x \in \{3;-2\}; f(x)=0$

Remarque : pour une fraction irrationnelle (avec variable sous radical), il est nécessaire que l'expression sous radical soit positive ou nul.

- **Domaine de Définition d'une fonction irrationnelle**

Pour donner le domaine d'une fonction irrationnelle, on prend ce qui est la racine carré supérieur ou égal à zéro.

Exemple : Donner le domaine de définition des fonctions irrationnelles suivantes :

$a)$ f(x) = $2x\sqrt{4-x}$

$$\left\| \begin{array}{l} f(x) \ni si\ et\ seulement\ si\ 4-x \geq 0 \\ \Rightarrow x \leq 4 \\ \Rightarrow x \in \left]-\infty; 4\right[\end{array} \right.$$

$b)$ g(x) = $\sqrt{-x}$

$c)$ h(x) = $\dfrac{\sqrt{x^2-9}}{x}$

Solution :

Domaine de définition :

$f(x) existe\ si\ et\ seulement\ si\ 4-x \geq 0 \ \Rightarrow -x \geq -4$

$\Rightarrow x \leq 4$

$\Rightarrow x \in \left]-\infty; 4\right[$

$\boxed{\mathrm{Df} = \left]-\infty; 4\right[}$

Niveau : 2^{nd} S

Devoir surveillé de Mathématiques

Activité numérique :

Exercice N° 1:

Ecrire en extension les ensembles suivants :

E = les diviseurs de 15

F = les nombres premiers plus petits que 20

G = $\{x \in N \ / \ x = 3k$ avec k=0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5$\}$

H = $E \cap F \cap G$

Exercice N°2 :

On définit dans Q la loi de la composition interne par : $\forall \ (x, y) \in Q^2$; $x \perp y = x + y + 5$

- calculer $2 \perp 6$ et $6 \perp 2$ conclure
- démontrer que Q possède un élement neutre pour la loi $\perp$

Activité géométrique :

Exercice N°1 :

Développer et réduire les expressions suivantes :

$\vec{a} = 7\vec{u} - 4\vec{v} + 3\ (\vec{u} + 3\vec{w}\,) - 5(2\vec{w} - \vec{v})$

$\vec{b} = 4\ (2\vec{u} - \vec{v}) - 4\ (3\vec{u} - \vec{v}\,) + 3\vec{u}$

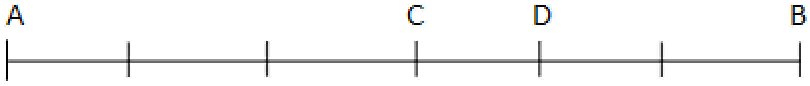
$c = 2\vec{u} - 3(5\vec{v} - \vec{u}) + 4(\vec{w} + 2\vec{v})$

$d = \vec{u} + 2(3\vec{v} + \vec{w}) - 5(2\vec{u} + 3\vec{v})$

Exercice N°2 :

On donne la figure suivante :

Complexe les égalités suivantes.



$\overrightarrow{BD} = ?\ \overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AC} = ?\ \overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{BD} =?\ \overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BC} = ?\, AB$

Chapitre 5 : Equation et Inéquation dans IR et IR × IR

I. Equation et Inéquation dans IR

1. Généralité

a) Définition

Soit $A\ et\ B$ deux ensembles.

(E): $\ll f(x) = g(x) \gg au\ f\ et\ g$ sont deux fonction de $A\ vers\ B$, est appelée équation dans A d'inconnue x.

- tout élément $\propto\ de\ A$ verifiant $f(\propto) = g(\propto)$ est appelée solution de l'équation(E).
- résoudre dans A l'équation (E), c'est chercher des éléments qui sont solutions de (E).
- I: $\ll f(x) \leq g(x) \gg$, où $f\ et\ g$ sont deux fonctions de $A\ vers$ IR est appelée inéquation dans A, d'inconnue x.
- tout élément $\propto\ de\ A$ vérifiant $f(\propto) \leq g(\propto)$ est appelée solution de l'équation (I).
- résoudre dans A l'inéquation (I); c'est chercher l'ensemble de A qui sont solution de (I).

Exemple : on considère l'équation (E):
$\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x-2} = \frac{4}{2x+1}$
Nous dirons que (E) est une équation d'inconnue x. Avant de résoudre une telle équation, il convient de préciser les contraintes sur l'inconnue : $(x-2) \neq 0$; $(x+2) \neq 0\ et\ (2x+1) \neq 0$
$x \neq -2; x \neq 2\ et\ x \neq -\frac{1}{2}$
$-3\ et\ 1$ sont les solutions de (E).

- pour résoudre une équation ou une inéquation, on procède généralement par la transformation d'écriture, utilisant les règles de calcul relatives aux égalités dans IR

En particulier, une équation ou une inéquation aura les mêmes solutions que l'équation obtenue :

- en ajoutant un même nombre réel aux deux membres de cette équation ou inéquation ;
- en multipliant les membres de cette inéquation ou équation par un même nombre réel non nul.

De telles inéquation ou équation sont dites équivalences.

Définition : deux équations ou inéquations sont équivalentes lorsqu'elles ont le même ensemble de solution.

Exemple : Résoudre dans IR l'équation (E): $\frac{x+2}{5x+19} = \frac{x-3}{10x-26}$

- contraintes sur l'inconnue :

(E): $\exists \Leftrightarrow 5x + 19 \neq 0\ et\ 10x - 26 \neq 0$

$\Rightarrow x \neq -\frac{19}{5}\ et\ x \neq \frac{13}{5}$
$x \in$ IR $\setminus \{-\frac{19}{5}; \frac{13}{5}\}$
Pour tout nombre réel $x \in IR \setminus \left\{-\frac{19}{5}; \frac{13}{5}\right\}$ on a :
(E): $(x+2)(10x-26) = (x-3)(5x+19)$
$\Rightarrow 10x^2 - 6x - 52 = 5x^2 + 4x - 57$

$\Rightarrow 5x^2 - 10x + 5 = 0$
$\Rightarrow 5(x^2 - 2x + 1) = 0$
$5 \neq 0$
$\Rightarrow\ x^2 - 2x + 1 = 0$
$\Rightarrow (x-1)(x-1) = 0$
$\Rightarrow x = 1$
Le nombre réel 1 appartient à $IR \setminus \left\{-\frac{19}{5}\ ;\frac{13}{5}\right\}$, il est l'unique solution de (E).

- résoudre dans IR l'inéquation (I): $\frac{x+2}{5x+19} < \frac{x-3}{10x-26}$
- contraintes sur l'inconnue : $x \in IR \setminus \left\{-\frac{19}{5}\ ;\frac{13}{5}\right\}$.
- pour tout nombre réel x appartenant à $IR \setminus \left\{-\frac{19}{5}\ ;\frac{13}{5}\right\}$ on a :

(I): $\frac{x+2}{5x+19} - \frac{x-3}{10x-26}\ < 0$
$\Rightarrow \frac{(x+2)(10x-26)-(x-3)(5x+19)}{(5x+19)(10x-26)} < 0$
$\Rightarrow \frac{5x^2-10x+5}{(5x+19)(10x-26)} < 0$
$\Rightarrow \frac{5(x^2-2x+1)}{(5x+19)(10x-26)} < 0$
$\Rightarrow \frac{5(x-1)^2}{(5x+19)(10x-26)} < 0$
$\Rightarrow (x-1)^2 < 0\ \Rightarrow x < 1$
L'ensemble de solution de $(I) est$: $x \in \left]-\frac{19}{5}; 1\right[\cup \left]1; \frac{13}{5}\right[$

2. Equation et Inéquation reliant deux polynômes

Soit à résoudre dans IR :

(E): $x^3 + x + 6 = 2(8 - x - 3x^2)$
$\Rightarrow x^3 + x + 6 - 2(8 - x - 3x^2) = 0$
$\Rightarrow x^3 + 6x^2 + 3x - 10 = 0$
1 est une racine évidente
$\Rightarrow (x-1)(x^2 + 7x + 10) = 0$
$x - 1 = 0\ ou\ x^2 + 7x + 10 = 0$
$\Delta = 7^2 - 4 \times 1 \times 10 = 49 - 40 = 9$
$\Delta > 0 \Rightarrow x_1 = \frac{-7-\sqrt{9}}{2} = \frac{-7-3}{2} = \frac{-10}{2} = -5$
$x_2 = \frac{-7+\sqrt{9}}{2} = \frac{-7+3}{2} = \frac{-4}{2} = -2$
$\Rightarrow x = 1\ ou\ x = -5\ ou\ x = -2$
$\boxed{\boldsymbol{S} = \{\mathbf{1}; \mathbf{-5}; \mathbf{-2}\}}$

(I): $x^3 + x + 6 \leq 2(8 - x - 3x^2)$

I $\Rightarrow x^3 + x + 6 - 2(8 - x - 3x^2) \leq 0$
$\Rightarrow\ x^3 + 6x^2 + 3x - 10 \leq 0$
$(x-1)(x^2 + 7x + 10) \leq 0+$
$x = 1\ ou\ x \leq -5\ ou\ x \leq -2$
$\boldsymbol{x} \in]-\infty; \mathbf{1}]$

3. Equations et Inéquations liant deux fractions rationnelles

Soit à résoudre dans IR (E): $\frac{x}{x^2-1} = \frac{2}{x-1}$

Les contraintes sur l'inconnue, pour (E)

$x \in \mathrm{IR} \setminus \{-1; 1\}$

$\Rightarrow x(x-1) = 2(x^2-1)$

$\Rightarrow (x-1)[x-2(x+1)] = 0$

$(x-1)(x-2x-2) = 0$

$(x-1)(-x-2) = 0$

$x = 1 \; ou \; x = -2$

La solution 1 est rejetée car x doit appartenir à $x \in \mathrm{IR} \setminus \{-1; 1\}$; l'équation admet une seule solution -2 .

- résoudre l'inéquation $\frac{x}{x^2-1} \leq \frac{2}{x-1}$
- Pour tout x element de $\mathrm{IR} \setminus \{-1; 1\}$

$\frac{x}{x^2-1} - \frac{2}{x-1} \leq 0 \;\Rightarrow\; \frac{x}{x^2-1} - \frac{2(x+1)}{x^2-1}$

$\frac{x-2x-2}{x^2-1} \leq 0 \;\Rightarrow\; \frac{-x-2}{x^2-1} \leq 0$

$\Rightarrow \frac{-x-2}{(x-1)(x+1)} \leq 0$

$\Rightarrow -x-2 \leq 0 \;\Rightarrow x \geq -2$ Réduction au même dénominateur

x	$-\infty$	-2		-1		1	$+\infty$
$-x-2$	$+$	0	$-$	‖	$-$	‖	$-$
$x+1$	$-$		$-$	‖	$+$	‖	$+$
$x-1$	$-$		$-$	‖	$-$	‖	$+$
$\mathrm{T}(x)$	$+$		$-$	‖	$+$	‖	$-$

L'ensemble de solution dans R est : $x \in$ $\boxed{[-2; 1[\, \cup \,]1; +\infty[}$

4. Equation et Inéquation avec valeur absolues

Considérons l'équation dans IR ; (E): $|2x-5| = |x-1|$

On sait que deux nombres réels ont même valeur absolue si et seulement si ils sont égaux ou opposés.

Donc : pour tout nombre réel x

(E): $\Rightarrow 2x-5 = x-1 \;\; ou \;\; 2x-5 = -x+1$

$\Rightarrow 2x-5-x+1 = 0 \;\; ou \;\; 2x-5+x-1 = 0$

$\Rightarrow x-4 = 0 \; ou \; 3x-6 = 0$

$\Rightarrow x = 4 \; ou \; x = \frac{6}{3} = 2$

$\Rightarrow x = 4 \; ou \; x = 2$

(E) : admet donc une paire $\{2; 4\}$ pour ensemble de solution.

- Considérons l'inéquation dans IR,

(I) : $|x^2+x-3| \leq |2x-1|$

Les deux membres de l'inégalité étant positifs, on a, pour tout nombre réel x :

(I): $(x^2 + x - 3)^2 \leq (2x - 1)^2$

$\Rightarrow (x^2 + x - 3)^2 - (2x - 1)^2 \leq 0$

$\Rightarrow x^4 + 2x^3 - 8x^2 - 2x + 8 \leq 0$

$\Rightarrow (x^2 - x - 2)(x^2 + 3x - 4) \leq 0$

-1 *et* 1 sont des racines évidentes des polynômes $x \mapsto x^2 - x - 2$ *et* $x \mapsto x^2 + 3x - 4$

=> Après factorisation :$(I) \iff (x + 1)(x - 2)(x - 1)(x + 4) \leq 0$

Posons :$P(x) = (x + 1)(x - 2)(x - 1)(x + 4)$

$P(x) \leq 0 \iff x + 1 \leq 0$ *ou* $(x - 2) \leq 0$ *ou* $x - 1 \leq 0$ *ou* $(x + 4) \leq 0$

$\Rightarrow x \leq -1;\ x \leq 2;\ x \leq 1$ *ou* $x \leq -4$

Tableau de signe

x	$-\infty$		-4		-1		1		2		$+\infty$
$x+1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x-1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x+4$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$	
$P(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

(I) admet donc pour ensemble de solution$[-4; 1] \cup [1; 2]$.

II. Equation et Inéquation dans IR x IR

1) Généralité

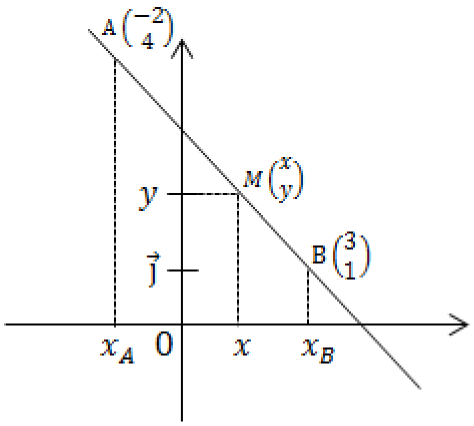
Dans un plan muni du repère (O, I, J), on considere les deux points A $\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}$ et B $\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$. écrivons un système d'équation et d'inéquation qui représente le segment $[AB]$.

Soit $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ un point du plan tel que $M \in (AB)$ *et que* $x_A \leq x \leq x_B$

$$M \in [AB] \iff \begin{cases} M \in (AB) \\ x_A \leq x \leq x_B \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}) = 0 \\ -2 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \begin{vmatrix} x+2 & 5 \\ y-4 & -3 \end{vmatrix} = 0 \\ -2 \leq x \leq 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + 5y - 14 = 0 \\ -2 \leq x \leq 3 \end{cases}$$



a. Définition :

Les systèmes étudiés dans ce chapitre ont deux inconnues et sont constitués d'équation ou d'inéquation ; une solution d'un tel système est couple (x_1, y_1) de nombres réels qui vérifie toutes les équations du système.

- les contraintes du système sont celles de chacune des équations et
- inéquations de ce système.
- résoudre un système c'est trouver dans IR $*$ IR l'ensemble des solutions communes aux équations ou inéquations qui composent ce système.
- deux systèmes sont équivalents lorsqu'ils ont le même ensemble de solution.

Remarque :

L'ensemble des solutions d'un système est l'intersection des ensembles de solution des équations ou inéquations qu'il contient.

b. Utilisation du déterminant

Soit le système (S) :$\begin{cases} ax + by + C = 0 \\ a'x + b'y + c = 0 \end{cases}$

$\begin{vmatrix} \mathrm{a} & \mathrm{b} \\ \mathrm{a'} & \mathrm{b'} \end{vmatrix} = \mathrm{ab'} - \mathrm{a'b}$ est appelé déterminant.

Propriété : un système de deux équations admet un seul couple solution si et seulement si son déterminant est nul ;

- si le déterminant est non nul, le système admet une solution que l'on détermine par substitution ou combinaison linéaire ;
- s'il est nul, vérifie ensemble si une solution particulière de l'une des équations est solution de l'autre :
- si oui, le système admet une infinité de solution représentée par une droite ;
- sinon, le système n'admet pas d solution.

2) Résolution :

Résoudre dans IR × IR les équations et inéquations suivant :

$\begin{cases} 4x - 12y = 4 \ (1) \\ 7x - 21y = 7 \ (2) \end{cases} \quad \Rightarrow \frac{\begin{cases} 4x-12y=4 \\ 7x-21y=7 \end{cases}}{11x-33y=11}$

$\Rightarrow 11x = 11 + 33y$

$\Rightarrow x = \frac{11(1+3y)}{11} \Rightarrow x = 3y + 1 \ (3)$

$(1) \quad 4(3y + 1) - 12y = 4$

$\Rightarrow 12y + 4 - 12y = 4 \Rightarrow y = 0; x = 3y + 1 \ \Rightarrow 3 \times 0 + 1 \ \Rightarrow x = 1$

$\boxed{S = \{(1; 0)\}}$

ACTIVITES GEOMETRIQUES

Chapitre 1 Vecteur et point du plan

I. Vecteur

1. **Définition :** on appelle vecteur, un segment de droite orienté. C'est un élément d'un ensemble appelé vectoriel.

Un vecteur est représenté par une flèche, cette flèche se présente sous la forme d'un segment de droite.

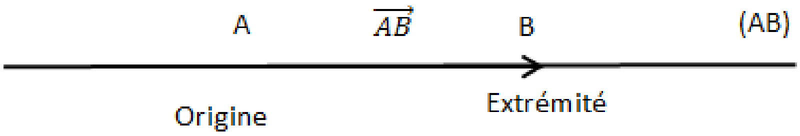
Exemple : le couple de points (AB) est déterminé ou noté par : $\overrightarrow{AB}$ et on dit un « vecteur $\overrightarrow{AB}$ »

2. Caractéristique d'un vecteur

Un vecteur est caractérisé par son origine, sa direction, son sens et sa norme (longueur).

Soit A et B deux points distincts du plan.

- La direction du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est celle de la droite (AB). On affirme aussi que la droite (AB) est le support du vecteur $\overrightarrow{AB}$.
- Le sens du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est celui de A vers B.
- La norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est distance AB.
- L'origine du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est le point A.



3. Egalité de deux vecteurs

Deux vecteurs sont égaux, si et seulement si, ils ont même direction, même sens et même norme.

Autrement dit : les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux si et seulement si ABCD est un parallélogramme.

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Longmapsto$ ABCD est un parallélogramme

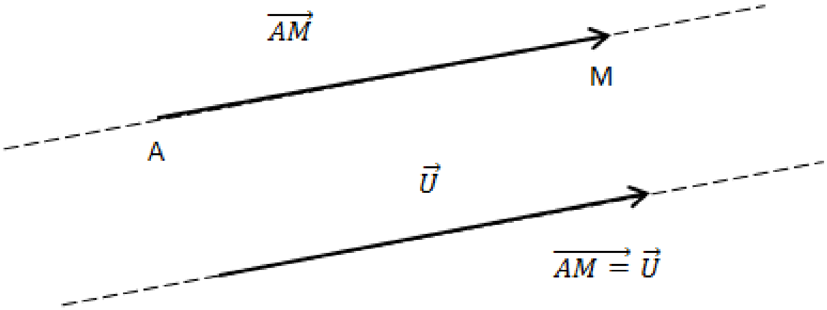
4. **Caractère d'un point**

On considère un point A et un vecteur $\vec{U}$ il existe un unique point M du plan tel que le vecteur $\overrightarrow{AM'} = \vec{U}$.

Un vecteur quelconque d'une famille des vecteurs égaux est aussi désigné par une seule lettre. (à l'exemple de vecteur $\vec{U}$).

La norme du vecteur $\vec{U}$ se note : $\|\vec{U}\|$.

$\|\vec{U}\|$= AM.



Remarque : tout vecteur ayant l'extrémité confondu avec l'origine est le vecteur nul ($\vec{O}$).

Exemple : $\overrightarrow{AA}$= $\overrightarrow{BB}$= $\overrightarrow{pp}$= $\overrightarrow{MM}$= $\vec{O}$

-La norme du vecteur $\|\vec{U}\| = \|\overrightarrow{AM}\|$= d (AM)= AM

- $\|\overrightarrow{-U}\| = \|\vec{U}\|$

II. **Somme, différence de deux vecteurs**

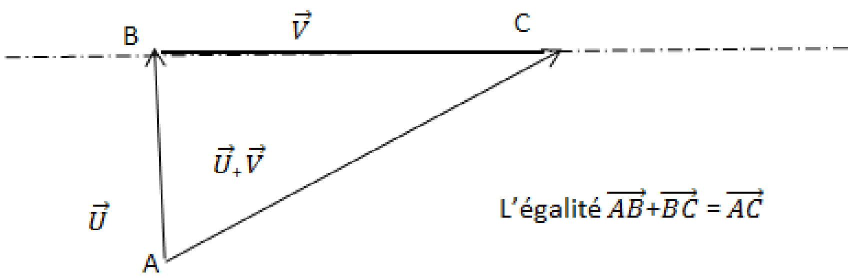
1. **Addition vectorielle**

Etant donné deux vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$, on appelle somme des vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$, la notation $\vec{U} + \vec{V}$.

Si le vecteur $\vec{U}$= $\overrightarrow{AB}$ et le vecteur $\vec{V}$=$\overrightarrow{BC}$ alors $\vec{U} + \vec{V} = \overrightarrow{AC}$ d'après la relation de Charles.

$\vec{U} + \vec{V} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$

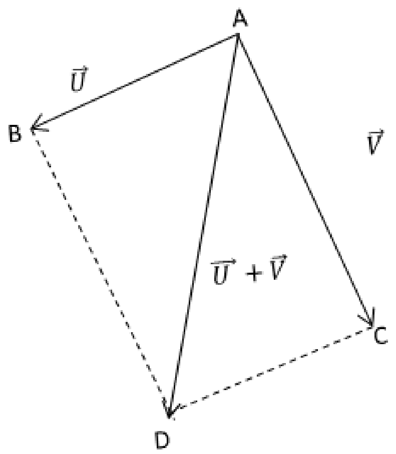
$= \overrightarrow{AC}, \Longmapsto \boxed{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}}$



Exemple : pour construire la somme de deux vecteurs de même origine $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$, on construit le parallélogramme ABCD tel que $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AB}$+$\overrightarrow{AC}$= $\overrightarrow{CD}$+$\overrightarrow{AC}$

=$\overrightarrow{AC}$+ $\overrightarrow{CD}$= $\overrightarrow{AD}$.



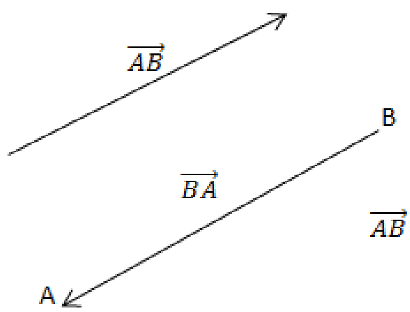
La somme vectorielle $\overrightarrow{AB}$+$\overrightarrow{AC}$ est portée par le diagonale passant par A et D u parallélogramme.

2. Vecteur opposé et différence de deux vecteurs

Comme $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \vec{O}$ (d'après la relation de Chasles, on affirme que $\overrightarrow{BA}$ est le vecteur opposé à $\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \vec{O} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$

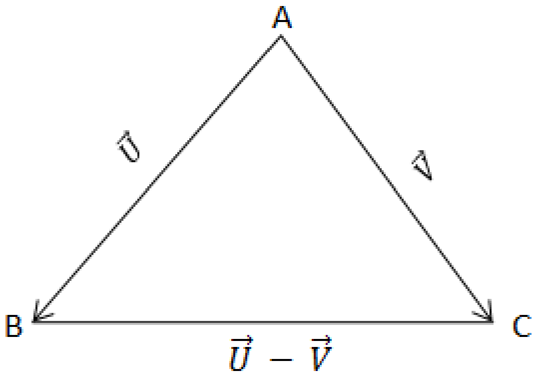
Si $\vec{U} = \overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{BA} = -\vec{U}$



Selon l'exemple précédent, comme le vecteur

$\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AB} = \vec{V}$ et $\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{AC} = -\vec{V}$

alors On a : $\vec{U} - \vec{V} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{CB} \Rightarrow \vec{U}$- $\vec{V}$= $\overrightarrow{CB}$



La différence vectorielle $\overrightarrow{CB}$ est l'autre diagonale du parallélogramme ABCD ci-dessus.

Remarque : deux vecteurs sont opposés lors qu'ils ont même direction, même norme mais de sens contraire. Alors le vecteur $\overrightarrow{AB}$et $\overrightarrow{BA}$ ont même direction, même norme mais de sens contraire.

3. Propriété de l'addition vectorielle

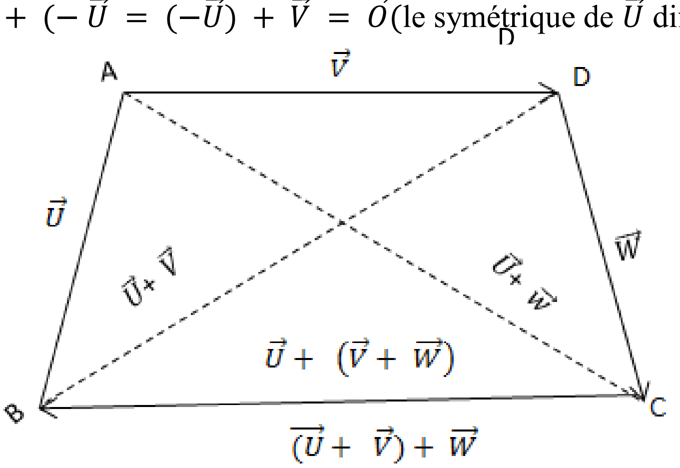
Quel que soit le vecteur $\vec{U}, \vec{V}$ et $\vec{W}$ du plan, on a :

$\vec{U} + \vec{V} = \overrightarrow{V + U}$ (Commutativité)

$\vec{U} + (\vec{U} + \vec{W}) = (\vec{U} + \vec{V}| + \vec{W}$ (Associative)

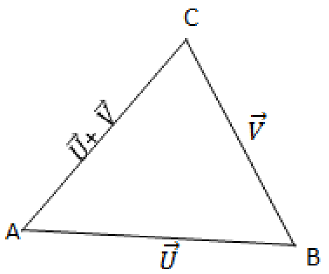
$\vec{U} + \vec{O} = \vec{O} + \vec{U} = \vec{U}$ (Neutralité)

$\vec{U} + (-\vec{U} = (-\vec{U}) + \vec{V} = \vec{O}$(le symétrique de $\vec{U}$ différent de vecteur.



4. Inégalité triangulaire

On considère un triangle ABC, $\vec{U}$ et $\vec{V}$ deux vecteurs du plan tel que $\overrightarrow{AB} = \vec{U}$ et $\overrightarrow{BC} = \vec{V}$ et $\overrightarrow{AC} = \vec{U} + \vec{V}$



D'après la relation de Charles, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

or $||\overrightarrow{AC}|| \leq ||\overrightarrow{AB}|| + ||\overrightarrow{BC}||$

$\Rightarrow ||\vec{U} + \vec{V}|| \leq ||\vec{U}|| + ||\vec{V}||$

Inégalité triangulaire

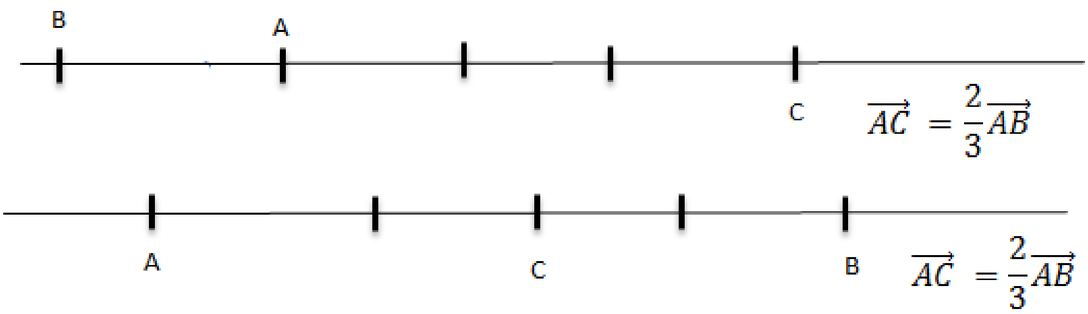
III. Produit d'un vecteur par un nombre réel

Soient A *et* B deux points distincts, K est un nombre réel et C le point de la droite (AB) tel que $AC = |k| \times AB$

- Si $K > 0$, B *et* C sont situés du même côté % à A ;
- Si $K < 0$, B *et* C sont situés de part et d'autre d'A. finalement, $\overrightarrow{AC} = K\overrightarrow{AB}$, ce qui veut dire que $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires.

Exemple : placer es point A, B, C dans un plan sachant que $\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ puis dire si les deux droite sont colinéaire

Solution



$\overrightarrow{AC} = K\overrightarrow{AB}$ alors $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires

1) Définition

Soit $\vec{U}$ un vecteur, K un nombre réel, on appel produit du vecteur $\vec{U}$ par le réel K, le vecteur $\vec{W}$ tel que $\vec{W} = K\vec{U}$.

$\vec{U}$ est non nul, $(\vec{U} \neq O)$

- Si $K = 0 \Rightarrow \vec{W} = 0$
- Si $K > 0 \Rightarrow \vec{W}$ et $\vec{U}$ ont même direction, sens contraire et la longueur de $\vec{W}$ est le produit de la longueur du vecteur $\vec{U}$ par K.
- Si $K < 0 \Rightarrow \vec{W}$ et $\vec{U}$ ont même direction, sens contraire et la longueur du vecteur $\vec{W}$ est le produit de la longueur de $\vec{U}$ par –K.
- Cas particulier
- $1 \times \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}$; $(-1) \times \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{AB}$ et $0 \times \overrightarrow{AB} = \vec{0}$

- $K\overrightarrow{U} = 0 \Rightarrow K = 0$ ou $\overrightarrow{U} = \overrightarrow{0}$

2. propriété

Quel que soit les vecteur $\overrightarrow{U}$ et $\overrightarrow{V}$ et le nombre réel α *et* β, on à :

- $\alpha(\overrightarrow{U} + \overrightarrow{V}) = \alpha\overrightarrow{U} + \alpha\overrightarrow{V}$.
- $(\alpha + \beta)\, \alpha\overrightarrow{U} + \beta\overrightarrow{V}$
- $\alpha(\beta\overrightarrow{U}) = (\alpha\, \beta)\, \overrightarrow{U}$

Exemple :

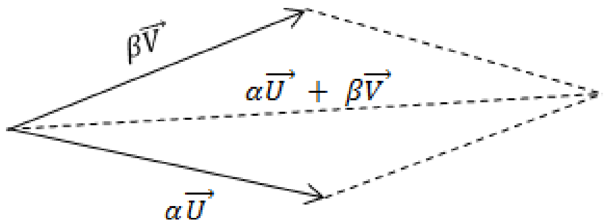
- $\frac{1}{3}(9\ \overrightarrow{U}) = \left(\frac{1}{3} \times 9\right) \overrightarrow{U} = 3\, \overrightarrow{U}$
- $3\overrightarrow{U} - \overrightarrow{U} = (3-1)\overrightarrow{U} = 2\overrightarrow{U}$
- $3(\overrightarrow{U} + \overrightarrow{V}) = 3\overrightarrow{U} + 3\overrightarrow{V}$

IV. Combinaison linéaire, décomposition d'un vecteur

1. Combinaisons linéaire

Soit $\overrightarrow{U}$ et $\overrightarrow{V}$ deux vecteurs donnés.

Tous vecteurs de la forme $\alpha\overrightarrow{U} + \beta\overrightarrow{V}$ ou α et β sont des ombres réel, est appelé combinaison linéaire des vecteur $\overrightarrow{U}$ et $\beta\overrightarrow{V}$. α et β désignent les coefficients respectifs de $\overrightarrow{U}$ et de $\overrightarrow{V}$



2. Vecteurs colinéaires

Deux vecteurs sont colinéaires si l'un est le produit de l'autre par un nombre K

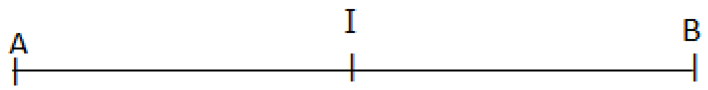
- Comme $\overrightarrow{O} = 0 \times \overrightarrow{U}$, alors $\overrightarrow{O}$ est colinéaire à tous les vecteurs
- Deux vecteurs non nuls de même direction sont colinéaires
- Si quatre point ABC *et* D distincts sont tel que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ colinéaire, alors les droite (AB) *et* (CD) sont parallèles

Alors il existe un nombre K tel que $\overrightarrow{CD} = K\overrightarrow{AB}$

- Autrement dire $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaire signifie que les point AB et C sont alignés.

Exemple : si I est le milieu du segment

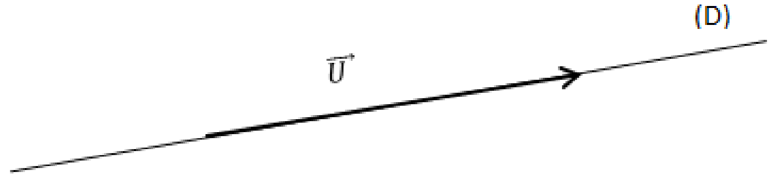
[AB] alors $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ alors $\overrightarrow{AI}$; $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{IB}$ sont colinéaire.



$$\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$$

3. Vecteur directeur

Un vecteur directeur est un vecteur qui dirige ou oriente la droite. Tout vecteur non nul $\vec{U}$ ayant la même direction que la droite (D) est appelé vecteur directeur.



4. Vecteur unitaire

On appelle vecteur unitaire, tout vecteur de norme est égal à un

Exemple $||\vec{i}|| = ||\vec{j}\,|| = 1$

❖ **Propriété :**

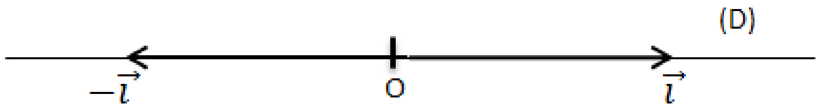
Tous vecteurs colinéaires à $\vec{U}$ est de la forme K$\vec{U}$ ou K ∈ R.

On a : $||K\vec{U}\,|| = 1 \Longmapsto |K|.||\vec{U}|| = 1$

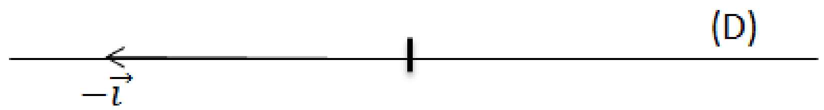
D'après la définition de la valeur absolue, on a :$|K| = \begin{cases} k\,, si\ k > 0 \\ -k, si\ k < 0 \end{cases}$

Alors $|K|.||\vec{U}|| = 1 \Longmapsto \begin{cases} k.\left\|\vec{U}\right\| = 1 \\ -k.\left\|\vec{U}\right\| = 1 \end{cases} \Longmapsto \begin{cases} k = \frac{1}{\left\|\vec{U}\right\|} \\ -k = \frac{1}{|U|} \end{cases} \Longmapsto \begin{cases} k = \frac{1}{\left\|\vec{U}\right\|} \\ k = -\frac{1}{\left\|\vec{U}\right\|} \end{cases} \Longmapsto \begin{matrix} K\vec{U} = \frac{1-\vec{U}}{||\vec{U}||} \\ K\vec{U} = \frac{-1.\vec{U}}{||\vec{U}||} \end{matrix}$

Remarque : une droite admet deux vecteurs directeurs unitaires opposés :

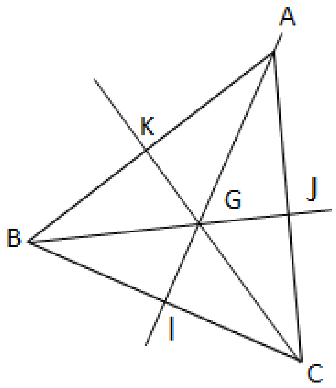


Choisir l'un des deux vecteurs revient à orienter la droite.



5. Centre de gravité d'un triangle

Soit ABC un triangle, $I, J\ et\ K$ les milieux respectifs des segments $[BC], [AC]\ et\ [AB]$.



Le médianes [AI], [BJ] et [CK] sont concourants en un point G appelé le centre de gravité et vérifie :

$\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AI}$; BG $= \frac{2}{3}\overrightarrow{BJ}$ et CG $= \frac{2}{3}\overrightarrow{CK}$.

a. Propriété

Le point G est centre de gravité d'un triangle si et seulement si $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{O}$, si I est le milieu alors $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AI}$.

Démonstration :

Dire que G est centre de gravité du triangle ABC signifie que :$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{O}$

Fixons A comme point d'origine ;

D'après la relation de Charles

A ∈ (GA) $\Leftrightarrow \overrightarrow{GA} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AA}$

A ∈ (GB) $\Leftrightarrow \overrightarrow{GB} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB}$

A ∈ $(\overrightarrow{GC}) \leftrightarrow \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AC}$

On a : $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AA} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AC} = \vec{O}$

$\Rightarrow 3\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \vec{O}$

$\Rightarrow 3\,\overrightarrow{GA} = -(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$.

I est le milieu du segment [BC]si et seulement si $\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \vec{O}$

D'après la relation de Charles

I ∈ (AB) $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB}$

A ∈ $(\overrightarrow{AC}) \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IC}$

Donc $3\overrightarrow{GA} = -(\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IC})$

$= -\left(2\overrightarrow{AI} + \underbrace{\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}}_{0}\right)$

$\Rightarrow \; 3\overrightarrow{GA} = \; -2\overrightarrow{AI}$

$\Rightarrow 3\;\overrightarrow{GA} = \; 2\overrightarrow{AI}$

$$\boxed{\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{GA} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AI}}$$

Le point G algébrique de points $A, B\; et\; C$.

6. Mesure algébrique.

a. Définition

La mesure algébrique $\overrightarrow{AB}$ est le nombre AB tel que

$\overrightarrow{AB}$= $\overrightarrow{AB}$x $\vec{I}$ ou $\vec{I}$ est un vecteur unitaire directeur de la droite (AB).

$\overrightarrow{AB} \; = \overrightarrow{AB}.\vec{\imath}$

$(x_B - x_A)\vec{\imath}$

$\overrightarrow{AB} = x_B\vec{\imath} \; - x_A\vec{\imath}$

b. Propriété

Soit (D) une droite orientée par un vecteur directeur unitaire $\vec{\imath}$

Quel que soit $A, B\; et\; C$ de la droite (D), tout nombre réel α, on a :

- ✓ $|\overrightarrow{AB}| \; = \; AB$ et $\overline{AB} \; = \; -\overline{AB}$
- ✓ Si $A \neq B$, alors :

$\overline{AB} \; = \;$ AB si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{\imath}$ sont de même sens

$\overline{AB} \; = \; -\overrightarrow{AB}$ si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{\imath}$ sont de sens contraire.

$\overline{AB} \; = \; 0 \; \Leftrightarrow \; \mathrm{A} = \mathrm{B}$

$\overrightarrow{AC} \; = \alpha\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overline{AC} \; = \; \alpha\overline{AB}$

$\overrightarrow{AB} \; + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overline{AB} + \overline{BC} \; = \; \overline{AC}$ (Relation de Charles)

V. Configuration de Thales

Soient deux droites $(D) et\; (\Delta)$.

Soient trois points $A, B\; et\; C$ et leur projection $A', B'\;\; et\; C'\; sur\; (D)$ parallèlement à (Δ). Alors le vecteur

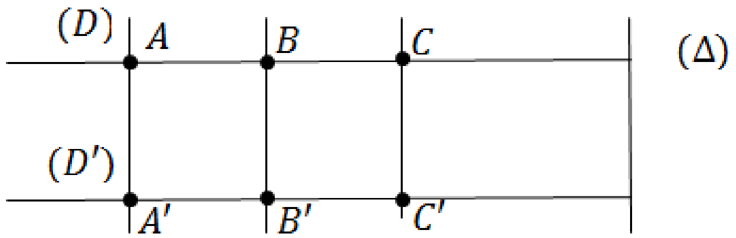
$\overrightarrow{AC} = K\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{A'C'} = K\overrightarrow{A'B'}$

$\Rightarrow \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{AB}} = \frac{\overrightarrow{A'C'}}{\overrightarrow{A'B'}} = K$

$\Leftrightarrow \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{AB}} = \frac{\overrightarrow{A'C'}}{\overrightarrow{A'B'}} = K$

Dans la projection de la droite (D) sur la droite (D') parallèlement à (Δ)

$A \longrightarrow A'$ $\quad$ $B \longrightarrow B'$ $\quad$ $C \longrightarrow C'$



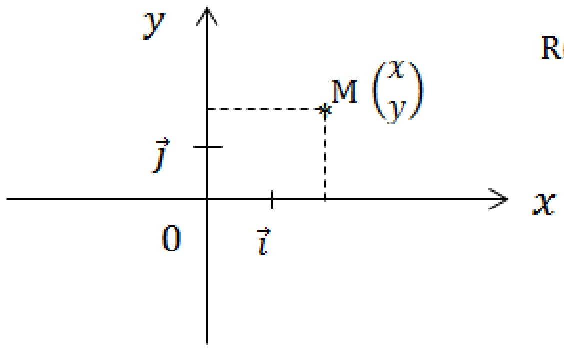
La projection concerne les égalités vectorielles.

VI. Bases, cordonnées dans une base et déterminant de deux vecteurs relativement à une base

1) Base et repère

On appelle repère cartésien du plan p, tous les triplés $(0, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. O est l'origine du repère $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ ont des vecteur ortho normaux du couple $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$

Constitué d'une base.

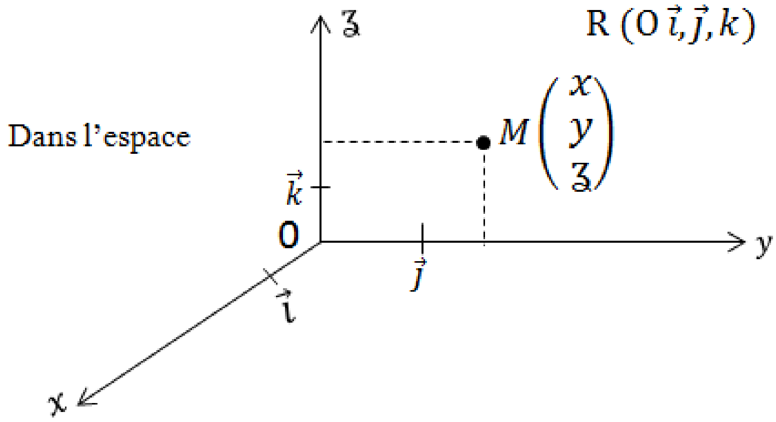


R$(0, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$

Repère dans le plan

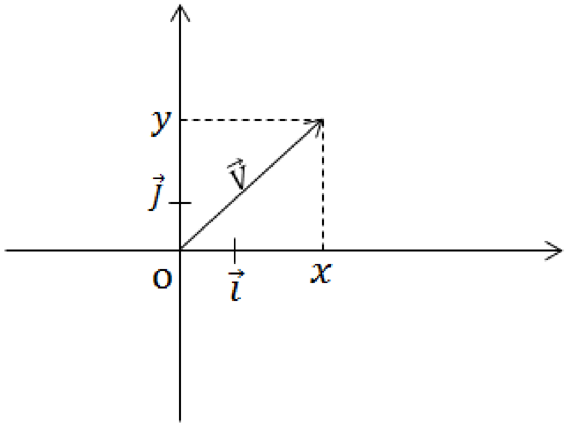
Il existe trois types de repères :

- Le repère orthogonal dans le plan : $OI \neq OJ$
- Le repère orthonormal dans le pan : $OI = OJ$
- Le repère spécial (repère dans l'espace : $(0\, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$



2) Coordonnées d'un vecteur

Dans une base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$, tous vecteurs $\vec{V}$, se décomposent de façons unique sous la forme : $\vec{V} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$, avec $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ les coordonnées du vecteurs $\vec{V}$ et on note : $\vec{V}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ $ou \left| \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \right.$



3) Forme analytique

Si $\vec{V}(x, y) et\ \vec{U}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ $, alors\ \vec{V} + \vec{U}\begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}$ $et\ \forall\ K \in R;\ K\vec{V}\begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$.

Preuve :

$\vec{V}\ (x, y)\ \in (\vec{\imath}, \vec{\jmath})\ \Rightarrow \vec{V} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$

$\vec{U}\ (x', y')\ \in (\vec{\imath}, \vec{\jmath})\ \Rightarrow \vec{U} = x'\vec{\imath} + y'\vec{\jmath}$

$\Rightarrow\ \vec{V} + \vec{U} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + x'\vec{\imath} + y'\vec{\jmath}$

$= x'\vec{\imath} + x'\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + y'\vec{\jmath} \Leftrightarrow \vec{V} + \vec{U} = (x + x')\,\vec{\imath} + (y + y')\vec{\jmath}.$

Remarque :

La droite (OI) est appelé axe des abscisses et la droite (OJ) et appelé axe des ordonnées.

4) Base ortho normés

Soit une base orthonormale $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$

- La norme d'un vecteur $\overrightarrow{U}\ \binom{x}{y}$ et de : $||\vec{U}\,|| \ = \ \sqrt{x^2+y^2}$
- L'égalité $xx' \ + \ yy' = 0$ prouve que les deux vecteurs $\overrightarrow{V}\ \binom{x}{y}$ et $\overrightarrow{U}\ \binom{x\prime}{y\prime}$ sont orthogonaux
- L'égalité $xy' - \ x'y = 0$ prouve que les deux vecteurs $\overrightarrow{V}\ \binom{x}{y}$ et $\overrightarrow{U}\ \binom{x\prime}{y\prime}$ sont colinéaires
- L'égalité $xy' - \ x'y \neq 0$ prouve que les vecteurs $\overrightarrow{V}\ \binom{x}{y}$ et $\overrightarrow{U}\ \binom{x\prime}{y\prime}$ forment une base.

VII. Déterminant de deux vecteurs

a. Définition :

Soit $(\vec{\imath},\vec{\jmath}\,)$ une base de B

$\overrightarrow{V}\ \binom{x}{y}$ et $\overrightarrow{U}\ \binom{x\prime}{y\prime}$ deux vecteurs du plan

On appel déterminant de $\vec{U}$ et $\vec{V}$ relativement à la base $(\vec{\imath},\vec{\jmath}\,)$ le nombre $xy' - \ x'y$ et on note : $det\left(\vec{V}\,,\vec{U}\right)$ | $Det\left(\vec{V}\,,\vec{U}\right) = \ xy' - \ x'y|$

Pour calculer un déterminant, on dispose les cordonnées $\vec{V}$ $et\ de$ $\vec{U}$ de la façon suivantes : $\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}$ ensuite, on effectue les produit des coefficients suivant les diagonales comme l'indique la figure ci-dessous puis la différence des produit.

$$\text{Det}\,(\vec{U}\ \vec{V}) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = \ xy' - x'y$$

Exemple : soit les vecteurs $\vec{U}\ \binom{2}{3}$,$\vec{V}\ \binom{2}{-4}$ et $\vec{w}\ \binom{3}{1}$

Calculons : det $(\vec{V}\ \vec{U})$, det $(\vec{U}\ \vec{V})$, det $(\vec{U}\ \vec{W})$, et det $(\vec{V}\ \vec{W})$,

Solution :

Calculons les déterminants

det $(\vec{V}\ \vec{U})$, $\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} = \ 6+8 = \ 14$

det $(\vec{V}\ \vec{U}) = \ 14$

det $(\vec{U}\ \vec{V})$, $\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = \ -8-6 = \ -14$

det $(\vec{U}\ \vec{V}) = \ -14$

det $(\vec{V}\ \vec{W})$, $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} \ = \ 2-(-12) \ = \ 2+12 = 14$

$\det(\vec{V}\ \vec{W}) = 14$

$\det(\vec{U}\ \vec{W})$, $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 9 = -7$

$\det(\vec{U}\ \vec{W}) = -7$

Théorème :

- Deux vecteurs sont colinéaires si et seulement si leur déterminant est nul : c'est-à -dire $\vec{U}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{V}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ sont colinéaires lors ce que det $(\vec{U}\ \vec{V})$= 0
- Deux vecteurs $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ forment une base déterminant de $\vec{I}$ et $\vec{J}$ est non nul. C'est-à-dire
  Det $(\vec{I}, \vec{J}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 0 = 1$
  Det$(\vec{\imath}, \vec{\jmath}) \neq 0$, alors $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ forment une base.

b. Calcule dans un repère :

- Si A $\begin{pmatrix} x_A \\ x_B \end{pmatrix}$ et B $\begin{pmatrix} x_B \\ x_B \end{pmatrix}$ dans le repère $(O, \vec{\imath}\ \vec{\jmath})$ alors
  $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$
- Si I est le milieu du segment $[BC]$, alors :

  I $\left(\frac{x_C+x_B}{2}; \frac{y_C+y_B}{2};\right)$

- Si A $\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$; B $\begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix}$ $et\ C\begin{pmatrix} x_C \\ y_C \end{pmatrix}$ dans le repère $(O, \vec{\imath}\ \vec{\jmath})$ et si G est le centre de gravité du triangle $ABC\ alors\ G\ \left(\frac{x_A+x_B+x_C}{3}; \frac{y_A+y_B+y_C}{3};\right)$.

  Preuve :

G est un centre de gravité du triangle ABC si et seulement si $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 0$ introduisons le point O à l'aide de la relation de shasles :

$O \in (\overrightarrow{GA}) \Leftrightarrow \overrightarrow{GA} = \overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OA}$

$O \in (\overrightarrow{GB}) \Leftrightarrow \overrightarrow{GB} = \overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OB}$

$O \in (\overrightarrow{GC}) \Leftrightarrow \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OC}$

On a : $\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OC} = \vec{O}$

$3\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{O} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{GO} = -(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$

$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{GO} = (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) \Leftrightarrow \overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$ (2)

Or $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} xa - xo \\ ya - yo \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OB}\begin{pmatrix} xb - xo \\ yb - ya \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OC}\begin{pmatrix} xc - xo \\ yc - yo \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{OG}\begin{pmatrix} xg - xo \\ yg - yo \end{pmatrix}$,

A l'origine du repère $x_0 = y_0 = 0$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{OA}\begin{pmatrix}x_A\\ y_A\end{pmatrix} \\ \overrightarrow{OB}\begin{pmatrix}x_B\\ y_B\end{pmatrix} \\ \overrightarrow{OC}\begin{pmatrix}x_C\\ y_C\end{pmatrix} \\ \overrightarrow{OG}\begin{pmatrix}x_G\\ y_G\end{pmatrix} \end{cases} \Leftrightarrow On\ a : (1)\ \begin{pmatrix}x_G\\ y_G\end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} &=\tfrac{1}{3}\left[\begin{pmatrix}x_A\\ y_A\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x_B\\ y_B\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x_C\\ y_C\end{pmatrix}\right] \\ &=\tfrac{1}{3}\begin{bmatrix}x_A+x_B+x_C\\ y_A+y_B+y_C\end{bmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix}x_G\\ y_G\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{x_A+x_B+x_C}{3}\\ \frac{y_A+y_B+y_C}{3}\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_G = \frac{x_A+x_B+x_C}{3} \\ y_G = \frac{y_A+y_B+y_C}{3}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{G}\begin{pmatrix}x_G\\ y_G\end{pmatrix} \Leftrightarrow \mathrm{G}\begin{pmatrix}\frac{x_A+x_B+x_C}{3}\\ \frac{y_A+y_B+y_C}{3}\end{pmatrix}$$

c. Expression analytique de la caractérisation vectorielle

$\forall$ M $\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} \in$ [AB] $\Leftrightarrow \exists$ t $\in$ [0,1]

A $\begin{pmatrix}x_A\\ y_A\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\ (\alpha_\beta) / \ \overrightarrow{AM} = t_{\overrightarrow{AB}}$

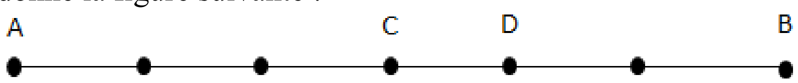
$\begin{pmatrix}x-x_A\\ y-x_y\end{pmatrix}$ = t $\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix}x-x_A\\ y-x_y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha t\\ \beta t\end{pmatrix}$

$\Longrightarrow \begin{cases} x-x_A = \alpha t \\ y-x_y = \alpha t\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha t + x_A \\ y = y_A + \beta t\end{cases} ; t \in [0; 1]$

Exercices

Exercice1 :

On donne la figure suivante :



Compléter les égalités :

$\overrightarrow{BD} = \ ?\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AC} = \ ?\overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{BD} = \ ?\overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{CD} = \ ?\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{BC} = \ ?\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC} = \ ?\overrightarrow{DB}$

Exercice 2 :

Soit ABC un triangle quelconque.

1. Construire les points D et E tels que $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}\ et\ \overrightarrow{CE} = 2\overrightarrow{BA}$

2. Démontrer que D est le milieu du segment $[\overrightarrow{CE}]$

Exercice3 :

Développer et réduire :

$\vec{a} = 7\vec{u} - 4\vec{v} + (\vec{u} + 3\vec{w}) - 5(2\vec{w} - \vec{v})$

$\vec{b} = 4(2\vec{u} - \vec{v}) - 4(3\vec{u} - \vec{v}) + 3\vec{u}$

$\vec{c} = 2\vec{u} - 3(5\vec{v} - \vec{u}) + 4(\vec{w} + 2\vec{v})$

$a = \vec{u} + 2(3\vec{v} + \vec{w}) - 5(2\vec{u} + 3\vec{v})$

Exercice 4 :

Soit ABC un triangle

1) Construire les points M et N tels que : $\overrightarrow{AM} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}\ et\ \overrightarrow{AN} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$
2) Démontrer que (MN) et (BC) sont parallèle
3) Soient S et T les milieux respectifs de $[BC]\ et\ [MN]$. Démontrer que les points A, S et T sont alignés

Exercice5 :

Le plan vectoriel V est muni d'une base $(\vec{i}\,,\vec{j})$

Soient les vecteurs $\vec{u}\binom{2}{3}$; $\vec{v}\binom{2}{-4}$; $\vec{w}\binom{3}{1}$

Calculer $\det(\vec{v},\vec{u})\ et\ \det(\vec{u} - \vec{w})$ puis calculer les normes des vecteurs $\overrightarrow{uv}$; $\vec{w}\ et\ \vec{w} + \vec{u}$.

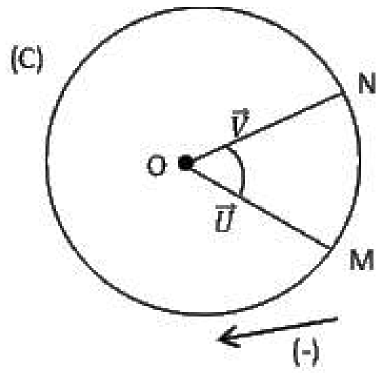
Chapitre 2 : Les angles géométriques et orientés

I. Angles orientés

1. Angles de vecteurs unitaires.

Un vecteur unitaire est un vecteur de norme 1 soit $\vec{U}\ et\ \vec{V}$ deux vecteurs unitaires et (C) le cercle trigonométrique de centre O, alors, il existe deux points M et N du cercle tel que :

$\overrightarrow{OM} = \vec{U}\ \ et\ \overrightarrow{ON} = \vec{V}$



L'angle orienté des vecteurs unitaires $\vec{U}\ et\ \vec{V}$, noté $(\vec{U},\vec{V})$ est l'angle de rotation de centre O qui transforme M en N.

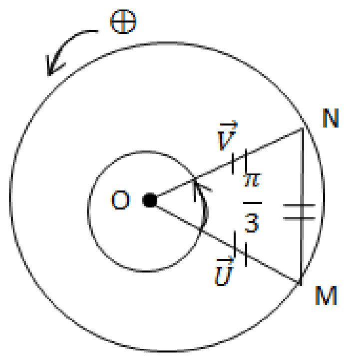
Remarque :

- l'angle orienté de demi- droite ([OM), [ON) est l'angle des vecteurs $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON})$;
- l'angle géométrique $\widehat{MON}$ correspond a deux angle orientés de sens contraire : $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON})$ et $(\overrightarrow{ON}, \overrightarrow{OM})$ tel que $(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{ON}) = -(\overrightarrow{ON},\overrightarrow{OM})$

2. Mesures d'un angle orienté

Toutes les mesures d'un angle $(\vec{U},\vec{V})$ sont de la forme $\alpha + 2k\pi\ ou\ \alpha$ est la mesure principale et K un nombre entier relatif $\forall(K \in Z)$.

Exemple : soit OMN le triangle équilatéral ci- contre



La mesure principale $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON})$ dans le sens de directe. Dans le sens indirect, La mesure principale est $-\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right)$ soit $\frac{\pi}{3} - 2\pi$

Après 3 tours dans le sens directe, la mesure est $\frac{\pi}{3} + 3 * 2\pi$ alors toute les mesures sont $\frac{3}{\pi} + 2k\pi$; $K \in Z$.

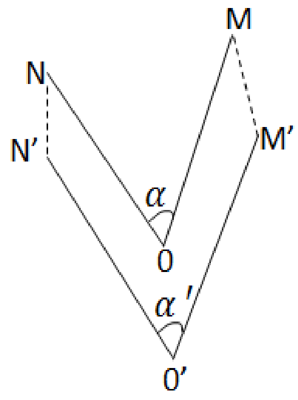
NB : les angles $(\vec{U},\vec{V})$ et $(V,\vec{U})$ sont opposés, leurs mesures principales sont opposés.

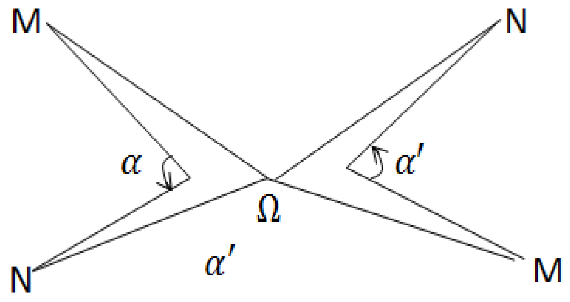
3. Angles et transformations

- Les transformations, les rotations et les mesures et l'orientation des angles.

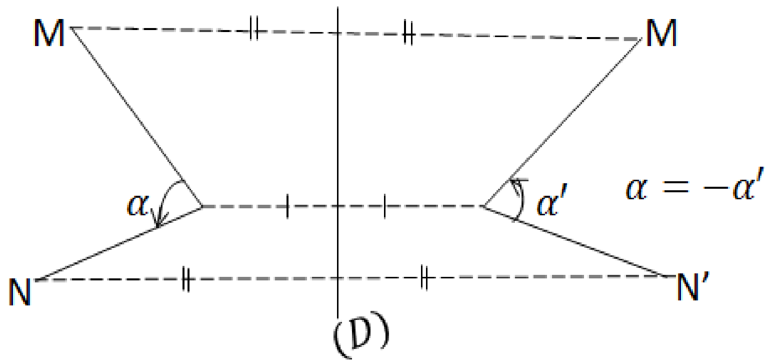
- Les réflexions (ou systématique axiales) ne concerne pas l'orientation : un angle et son image sont des angles opposés.

Exemple :





$\alpha = \alpha'$



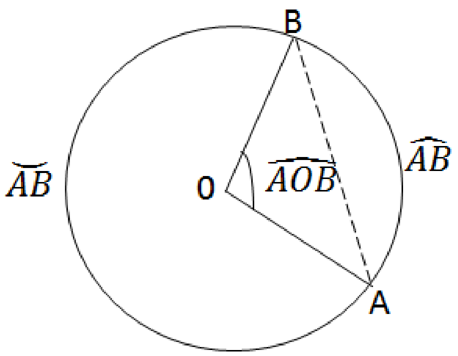
Méthode :

II. Angles inscrits

1. Angle inscrit, définit par une corde et un point.

a. **Angle au centre et arc de cercle intercepté**

Soit(C) , un cercle de centre O et [AB] une corde qui n'est pas un diamètre



- la corde [AB] détermine sur (C) 2 arcs de cercle noté le $\widehat{AB}$ plus petit et $\breve{AB}$ le plus grand.
- L'angle AOB est appelé l'angle au centre, il intercepte l'arc
- Lors ce que [AB] est un diamètre, l'angle $\widehat{AOB}$ est plat.

b. Angle inscrit et angle au centre associé

Soit (C) un cercle de centre 0. A, M et B trois points distincts de (C) .

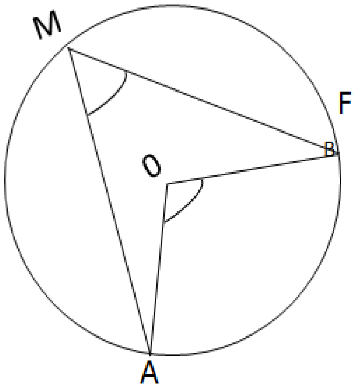


Figure 1

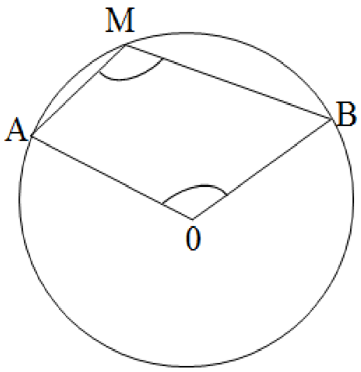


Figure 2

- $\widehat{AMB}$ est Appelé angle inscrit dans 1 cercle de centre O.
- L'arc de cercle (C) ne contenant pas le point M est appelé arc intercepté par l'angle $\widehat{AMB}$.
- l'angle $\widehat{AOB}$ est l'angle au centre associé à $\widehat{AMB}$.

Remarque :

- L'angle inscrit $\widehat{AMB}$ intercepte :
- L'arc $\widehat{AB}$ lors ce qu'il est aigu (fig1)
- L'arc $\widehat{AB}$ lors ce qu'il est obtus
- L'angle au centre $\widehat{AOB}$ intercepté tous les cas de figure l'arc $\widehat{AB}$

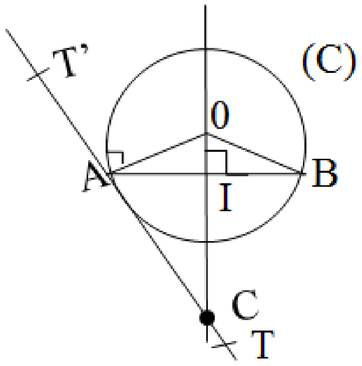
c. Relation entre l'angle inscrit et l'angle au centre associe

Soit $\widehat{AMB}$ un angle inscrit dans un cercle de centre O.

1) Si l'angle $\widehat{AMB}$ intercepte l'arc $\widehat{AB}$ (fig 1), alors la mesure de l'angle $\widehat{AMB} = \frac{1}{2}\, mes\ \widehat{AOB}$
2) Si $\widehat{AMB}$ intercepte l'arc $\widehat{AB}$ (fig2) alors la mesure de l'ange $\widehat{AMB}$ est de mes = $mes\ \widehat{AMB} = 180° - \frac{1}{2}\, mes\widehat{AOB}$

2. Angle inscrit définit par une corde et une mesure demi-triangle

Soit (C), un angle de centre O, [AB], une corde qui n'est pas diamètre de (C) et (TT') sa tangente.



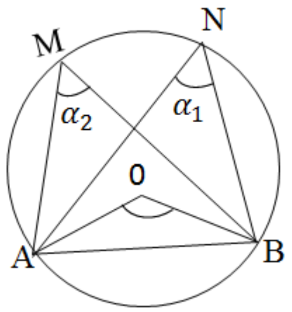
- Les demi-droites $[AT)$et $[[AT')$ sont des demi-tangentes en A à (C).
- Les angles$\widehat{TAB}$ et $\widehat{T'AB}$ sont des angles inscrits défini par la corde [AB] et les demi-tangente respectives $[AT)$et $[AT')$

On a : $\begin{cases} \text{mes}\widehat{TAB} = \frac{1}{2} mes\ \widehat{AOB} & (1) \\ \text{mes}\widehat{TAB} = 180° - \frac{1}{2} mes\ \widehat{AOB} & (2) \end{cases}$

3. Conséquence

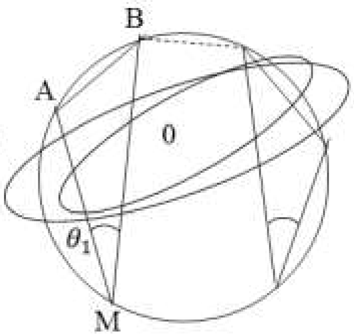
Propriétés.

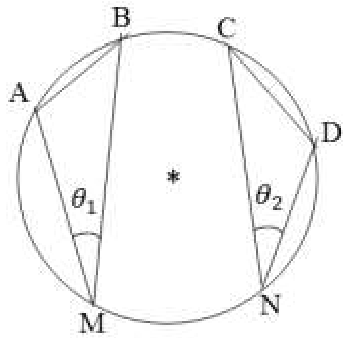
1



Des angles inscrits qui interceptent le même arc ont même mesure :
$mes\ \widehat{AMB} = mes\ \widehat{ANB}\ \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2$

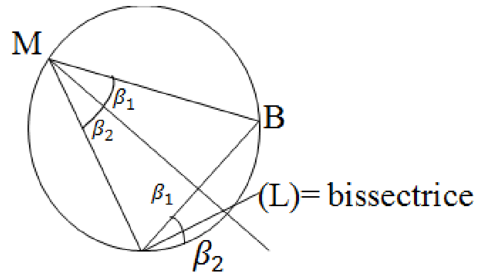
2





Des angles inscrits à intercepter deux arcs de même longueur ont même mesure :
$mes\ \widehat{AMB} = mes\ \widehat{DNC}\ \Leftrightarrow \theta_1 = \theta_2$

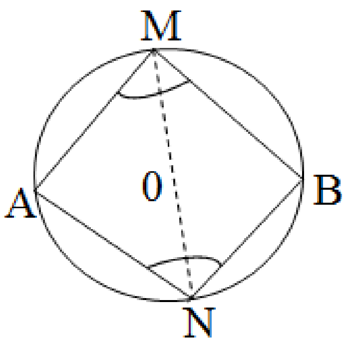
3



La bissectrice d'un angle inscrit partage l'arc intercepté en deux arcs de même longueur

$mes\ \widehat{AMO} = mes\ \widehat{OMB}\ \Leftrightarrow \beta_1 = \beta_2$

$\widehat{AMO}\ et\ \widehat{OMB}$ sont des angles adjancents.



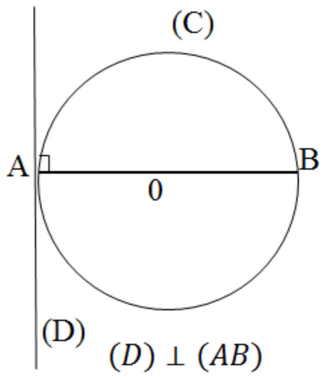
Si M est un point de l'arc $\widehat{AB}$ et N un point de l'arc $\widehat{AB}$ alors les angles $\widehat{AMB}$et $\widehat{ANB}$ sont supplémentaires :

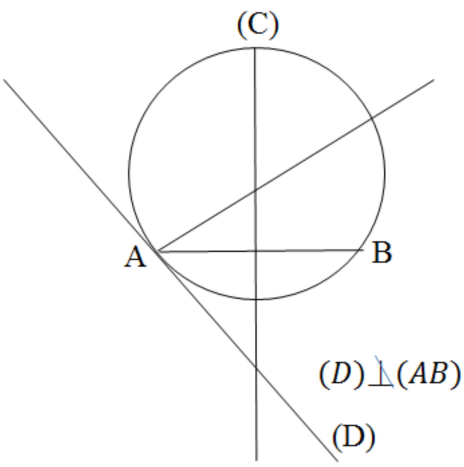
$$mes\widehat{AMB} + mes\widehat{ANB} = 180^{\circ}$$

4. **Lieu géométrique de points m tel que : $\boldsymbol{mes\widehat{AMB} = \alpha}$**

a. **Etude préliminaire :**

Considérons deux point A et B distincts du plan, la droite passant par A distinct de (AB). Nous admettons qu'il existe un et un seul cercle C passant par B admettront la droite (D) pour la tangente en A. en effet il existe deux cas de figure possible.

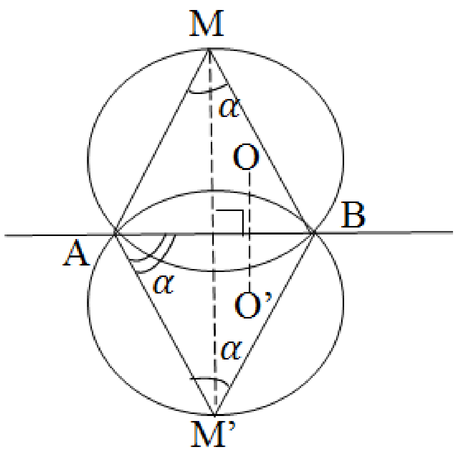




5. **Détermination de lieu géométrique des point M tels que $\boldsymbol{mes\widehat{AMB} = \alpha}$**

Soit A et B deux point distincts $\boldsymbol{\alpha}$ un nombre réel tel que : O $\boldsymbol{\alpha\alpha\alpha}$ 180° le lieu géométrique des point M tels que $mes\widehat{AMB} = \alpha$ est la réunion de deux arcs de cercles symétrique par rapport à la droite (AB) .

Exemple :



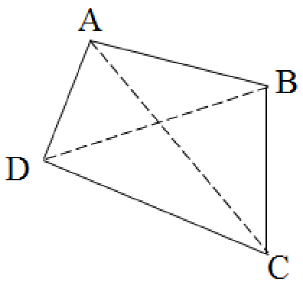
6. Quadrilatère inscriptibles

A. Quadrilatère convexe, croisé

a. **Quadrilatère convexe**

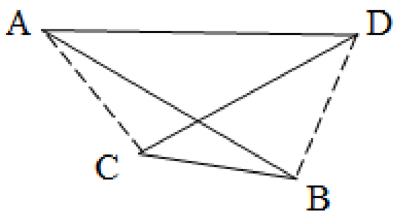
Le quadrilatère ABCD est convexe si et seulement si

- Les sommets opposés A et C n'appartiennent pas à un même demi-plan de frontière, la droite (BD) et les sommets opposés B et D n'appartiennent pas à un même demi-plan de frontière (AC) ; les segments [AC] et [BD] sont à l'intérieur du quadrilatère.



b. Quadrilatère croisé

ABCD, est un quadrilatère croisé car les sommets opposés A et C appartiennent au même demi-plan de frontière (BD) et les sommets opposés B et D appartiennent aussi au même demi-plan de frontière (AC).les segments [AC] et [BD] sont à l'extérieur du quadrilatère.



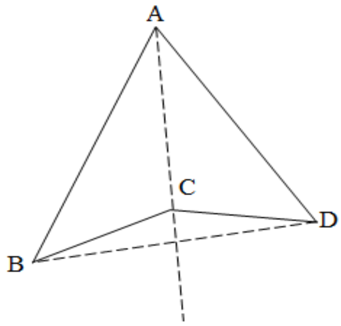
c. Quadrilatère non convexe, non croisé

ABCD est un quadrilatère non convexe non croisés lors ce que les sommets opposés A et C appartient à un demi-plan de frontière (AB) et lors ce que les sommets opposé B et D n'appartiennent pas à un même demi-plan de frontière (AC).

Remarque

- l'ordre dans lequel on doit écrire le sommet d'un quadrilatère est essentiel.
- Un quadrilatère est soit convexe, soit croisé, soit non convexe, non croisé.

La somme de mesure des angles d'un quadrilatère convexe est de 360°.



B. Quadrilatère croisé inscriptible

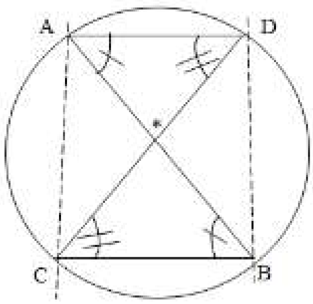
Un quadrilatère croisé est dit inscriptible s'il existe un cercle passant par les quatre sommets.

Exemple : le quadrilatère ABCD croisé ci-dessous est inscriptible cas ses quatre sommets appartiennent à un même cercle.

Théorème

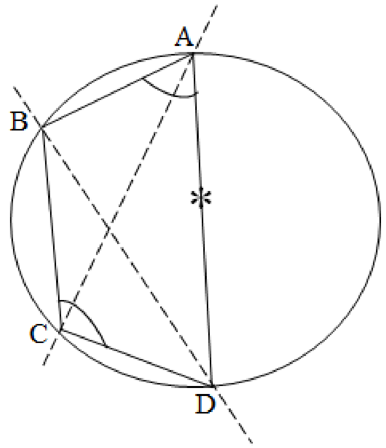
Un quadrilatère croisé est dit inscriptible si deux de ses angles opposé ont même mesure on a :

$$\begin{cases} mes\ \hat{A} = mes\ \hat{B} \\ mes\ \hat{D} = mes\ \hat{C} \end{cases}$$



C. Quadrilatère convexe inscriptible

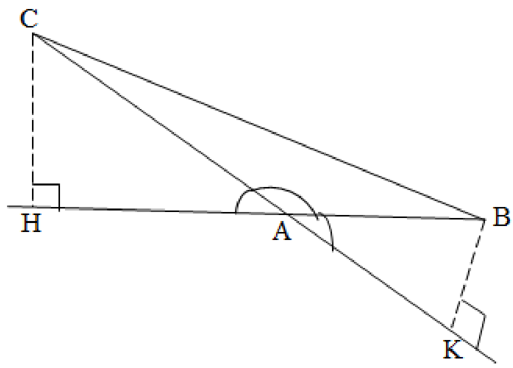
Un quadrilatère convexe est inscriptible si et seulement si deux de ses angles opposés sont supplémentaires.



D. Relation métrique dans un triangle

a. Sinus d'un triangle

Soit $\widehat{BAC}$un angle; H est le projeté orthogonal de C sur (AB) et K le projeté orthogonal de B sur (AC).



$\sin(\widehat{BAC}) = \frac{HC}{AC} = \frac{KB}{AB}$

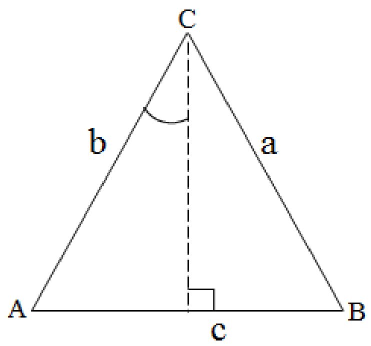
Remarque : le sinus d'un angle obtus est égal au sinus de son supplémentaire.

Exemple : sin (120°)= sin (180° - 120°)

$= \sin(60°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

b. Aire d'un triangle.

Soit ABC un triangle, A est l'aire de ce triangle. On pose : Bc = a, AC=b et AB= c



Démontrons que : A= $\frac{1}{2}bcsin\hat{A} = \frac{1}{2}ac\ sin\hat{B} = \frac{1}{2}ab\ sin\hat{C}$

$A = \frac{AB \times CH}{2}$

$\sin \hat{A} = \frac{CH}{AC} \Rightarrow CH = AC\sin\hat{A}$

$A = \frac{AB \times CA\sin\hat{A}}{2} = \frac{1}{2} cb\sin\hat{A}$

$A = \frac{1}{2} cb\sin\hat{A}$

c. Théorème de sinus

Soit ABC un triangle, A est l'aire de ce triangle, (C) est son cercle circonscrit, et R le rayon du cercle. On pose BC=a ; AC=b et AB=c

Démontrons que : $\frac{\mathrm{a}}{\sin\hat{A}} = \frac{\mathrm{b}}{\sin\hat{B}} = \frac{\mathrm{c}}{\sin\hat{C}} = \frac{\mathrm{abc}}{2A} = R$

- Montrons que : $\frac{\mathrm{a}}{\sin\hat{A}} = \frac{\mathrm{b}}{\sin\hat{B}} = \frac{\mathrm{c}}{\sin\hat{C}} = \frac{\mathrm{abc}}{2A} = R$

A= $\frac{1}{2} bc\sin\hat{A} = \frac{1}{2} ac \sin\hat{B} = \frac{1}{2} ab \sin\hat{C}$

Multiplions chaque membre par 2

$2A = bc\sin\hat{A} = ac\sin\hat{B} = ab\sin\hat{C}$

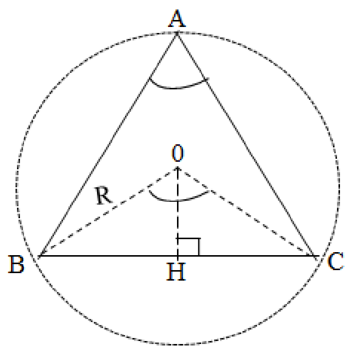
Division chaque membre par abc.

$\frac{2A}{abc} = \frac{bc\sin\hat{A}}{abc} = \frac{ac\sin\hat{B}}{abc} = \frac{ab\sin\hat{C}}{abc}$

Après simplification et en prenant l'inverse de toute l'égalité, on a :

$\frac{abc}{2A} = \frac{a}{\sin\hat{A}} = \frac{b}{\sin\hat{B}} = \frac{c}{\sin\hat{C}}$

- Montrons que $\frac{a}{\sin\hat{A}} = 2R$



On considère le triangle BOC ; $mes\ \widehat{BAC} = \frac{1}{2} mes\widehat{BOC}$.

Soit H le projeté orthonormal de O sur (BC). Le triangle OBH est rectangle en H ;

Alors $\sin\widehat{BOH} = \frac{BH}{BO}\ or\ \begin{cases} BH = \frac{1}{2}BC = \frac{a}{2} \\ BO = R \end{cases}$

$\sin\widehat{BOH} = \frac{\frac{a}{2}}{R} = \frac{a}{2R}$ or $mes\ \widehat{BOH} = mes\widehat{BAC}$.

$\sin\widehat{BOH} = \sin\widehat{BAC}$

$\sin\widehat{BAC} = \frac{a}{2R} \Rightarrow 2Rsin\widehat{BAC} = a$

$2R = \frac{a}{sin\widehat{BAC}}\ or \sin\widehat{BAC} = sin\hat{A}$

$\frac{a}{sin\hat{A}} = 2R$

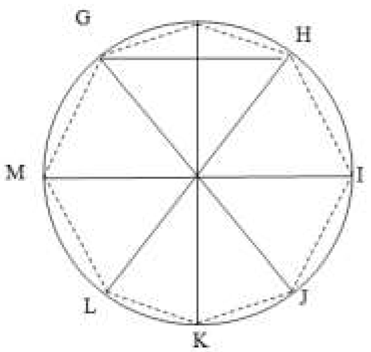
III. Polygone régulier

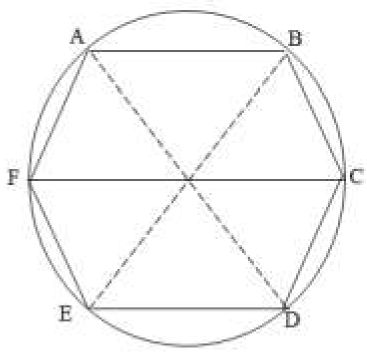
1. Définition :

On appelle polygone régulier tout polygone inscriptible dans un cercle et dont les côtés ont mêmes mesures.

Exemple : ABCDEF est un hexagone

GHIJKLM est un octogone



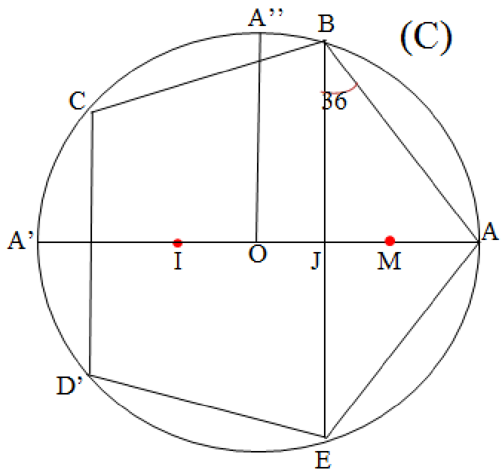


2. Construction du pentagone régulier

Programme de construction :

- Construire un cercle (C) de diamètre $[AA']$;
- Construire un point A''appartenant à (C) et à la médiane de $[AA']$.
- Construire le point d'intersection M de $[OA]$et du cercle ayant pour centre le milieu I de $[OA']$ et passant par A''

- Construire les point d'intersection B et E de (C) avec la perpendiculaire à $[OA]$passant par le milieu J de $[OM]$.
- Marquer C et D sur le cercle en reportant la longueur du segment $[AB]$à partir des points D et C. ABCDE est un pentagone régulier.



$$Sin36^0 = \frac{JA}{BA}$$
$$Cos36^0 = \frac{BJ}{BA}$$

Exercice : 1

Soit (C) un cercle de diamètre [AB]. C un autre point de (C) et I le milieu de l'arc $\widehat{BC}$. la tangente en I au cercle coupe (AC) en D. comparer les angles des triangles AIB et AID.

Exercice 2 :

Soit ABCD un rectangle tel que BD=2AB et (C) le cercle circonscrit à ABCD. Les tangente en A et D au cercle (C) ont pour point d'intersection M et coupent la droite (BC) respectivement en N et P. démontrez que le triangle MNP est équilatéral.

Exercice 3 :

Soit 2 cercle (C) et (C') de même centre O et de rayon r et r', A et 1 de cercle (C) une droite (D) tangente à (C) coupe le cercle (C') en M et N. on fait varier (D) de façon à ce qu'elle tangente au cercle (C) et de façon à ce que A et O appartiennent à un même demi-plan de frontière(MN).

Démontrez que $\widehat{MAN}$ garde une mesure constante.

Exercice 4 :

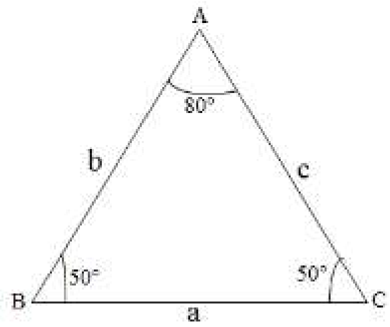
soit un demi-cercle de diamètre [CA] ;O le milieu de [CA], B le milieu de l'arc $\widehat{AC}$, P un point de l'arc $\widehat{AB}$ et I le milieu de l'arc $\widehat{PB}$. Les droites (CP)et (OI) se coupent en un point M.

1. Déterminer les mesures des angles $\widehat{BPC}$ et $\widehat{BMC}$

2. En déduire que le quadrilatère OCBM est inscriptible dans un cercle dont on précisera un diamètre.
3. Quel est le milieu du point M lorsque P parcourt l'arc $\widehat{AB}$?

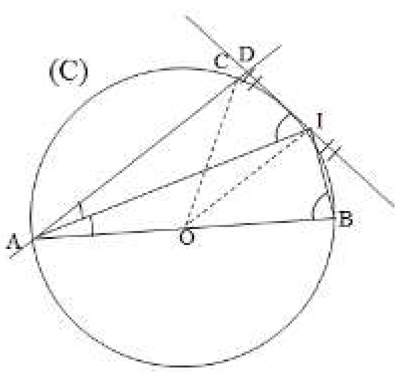
Exercice 5.

Déterminer la longueur de chacun des côtés du triangle ABC sachant que son aire est égale à 2



Travaux dirigés

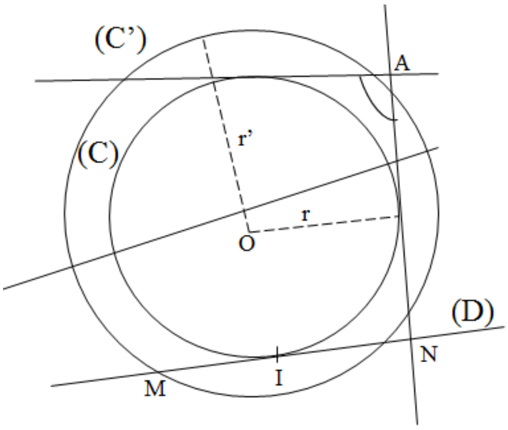
Exercice 1



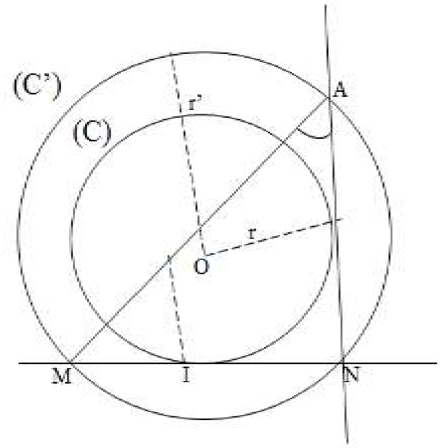
$mes\widehat{ABI} = mes\widehat{AID}$ (angle inscrit et angle définit par une corde et une tangente

$mes\widehat{DAI} = mes\widehat{BAI}$ (angle inscrit interceptant des arcs de même longueur. Donc les triangles ABI et AID ont leurs angles deux à deux égaux.

Exercice 2

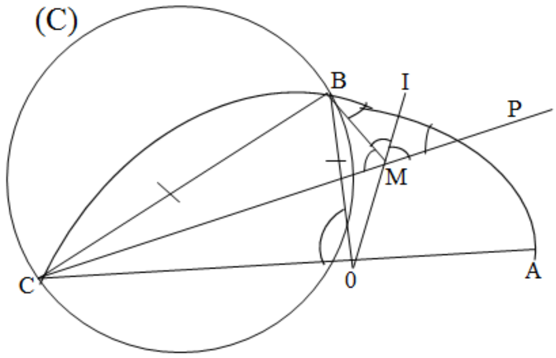


Exercice 3.



$\text{MN} = 2\text{IN} = 2\sqrt{r'^2 - r^2}$ .L'angle $\widehat{MAN}$ qui intercepte dans le cercle, dans le (C'), une corde de longueur constante, garde une mesure constante.

Exercice 4.



Déterminons $mes\widehat{BPC}$ et $mes\widehat{BMC}$

1. $mes\widehat{BPC} = \frac{1}{2}\, mes\widehat{BOC}$ or $mes\widehat{BOC} = 90^o \Leftrightarrow mes\widehat{BPC} = 45^o$
   $M \in$ à la médiatrice de [BP] ; dont ,BMP est un angle isocèle, dont les angles à la base ont pour mesure 45° alors, on déduit que : $mes\widehat{BMC} = 90^o$

2. Déduisons que le quadrilatère OCBM est inscriptible dans un cercle dont on précisera un diamètre.
   OCBM est inscriptible dans un cercle (C), de diamètre [BC].
3. Lorsque P parcours l'arc $\widehat{AB}$ le lieu du point M est l'arc $\widehat{BO}$ du cercle (C), inclus Ob le demi-cercle initial

Chapitre 3 : Trigonométrie

I – Complément sur les angles

1 – Mesure d'un angle géométrique

Il existe trois unités d'angle :

- Le degré (0)
- Le radian (rad)
- Le gradian (grad)

Soientα, β et λ les mesures respectives d'angle en radian, en degré et en gradian.
La formule de conversion suivante permet de passer de radian en degré et puis en gradian.

$\frac{\alpha}{\pi} = \frac{\beta}{180°} = \frac{\lambda}{200°}$; ou

α Désigne la mesure en radian ;

β Désigne la mesure en degré ;

λ Désigne la mesure en gradian.

<u>Exemple</u> : Soit α= $\frac{5\pi}{12}$ rad ; déterminer β et λ.

On a : $\frac{\alpha}{\pi} = \frac{\beta}{180°} \Leftrightarrow \alpha \times 180^0 = \beta \times \pi \Rightarrow \beta = \frac{\alpha \times 180°}{\pi} = \frac{\frac{5\pi}{12} \times 180°}{\pi} = \frac{5\pi \times 180°}{12\pi}$

$\Rightarrow \beta = \frac{5 \times 180°}{12} = 75°$ $\boxed{\beta = 75°}$

$\frac{\alpha}{\pi} = \frac{\lambda}{200} \Rightarrow \alpha \times 200 = \lambda \times \pi \Rightarrow \lambda = \frac{\alpha \times 200}{\pi} = \frac{\frac{5\pi}{12} \times 200}{\pi} = \frac{5 \times 200}{12}$

$\boxed{\lambda = 83{,}33\text{grad}}$

2 – Détermination d'une mesure principale

On peut définir plusieurs mesures par un même angle orienté dont une seule appartient à $]-\pi; \pi[$. C'est-à-dire cette mesure appartient au cercle trigonométrique.

Soit α la mesure principale de l'angle orienté tel que
$\alpha = x + 2k\pi$; $k \in Z$ avec $\alpha \in]-\pi; \pi[$ et x une mesure quelconque.

On a : $\forall \alpha \in]-\pi; \pi[\Leftrightarrow -\pi < \alpha < \pi \Leftrightarrow -\pi < x + 2k\pi < \pi$

$\Leftrightarrow -\pi - x < 2k\pi < \pi - x$

$\Leftrightarrow \frac{-\pi - x}{2\pi} < k < \frac{\pi - x}{2\pi}$

$\Leftrightarrow K \in]\frac{-\pi - x}{2\pi}; \frac{\pi - x}{2\pi}[$

Pour déterminer une mesure, on procède à l'encadrement de K.

$\forall\ \alpha \in\ ]-\pi;\ \pi[\ \Rightarrow\ (x\ +\ 2k\,\pi) \in\ ]-\pi;\ \pi[$

Exemple : Déterminons la mesure principale des angles suivants : $x = \frac{31\pi}{4}$ et $x = \frac{-27\pi}{6}$

On a: $\alpha = x + 2k\,\pi$; $\alpha \in\ ]-\pi;\ \pi[$

$\Rightarrow\ -\pi < \alpha < \pi$; $\alpha = \frac{31\pi}{4} + 2k\pi$; $k \in Z$

$\Rightarrow\ -\pi < \frac{31\pi}{4} + 2k\,\pi < \pi$

$\Rightarrow -\pi - \frac{31\pi}{4} < 2k\pi < \pi - \frac{31\pi}{4}$

$\Rightarrow \frac{-4\pi - 31\pi}{4} < 2k\pi < \frac{4\pi - 31\pi}{4}$

$\Rightarrow \frac{-35\pi}{4} < 2k\pi < \frac{-27\pi}{4}$

$\Rightarrow \frac{-35\pi}{8\pi} < K < \frac{-27\pi}{8\pi} \Leftrightarrow \frac{-35}{8} < K < \frac{-27}{8}$

$\Rightarrow\ -4{,}37 < k < -3{,}37$

$\Rightarrow\ -4 < k < -3$

Pour $k \simeq -4$

Or $\alpha = \frac{31\pi}{4} + 2k\pi \Leftrightarrow \alpha = \frac{31\pi}{4} - 8\pi = \frac{31\pi - 32\pi}{4}$

$\Rightarrow \alpha = -\frac{\pi}{4}$; $-\frac{\pi}{4} \in\ ]-\pi;\ \pi[$

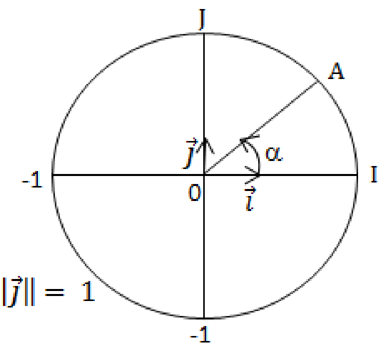
$\Rightarrow \alpha = -\frac{\pi}{4} rad$

II – Trigonométrie

1 – Cercle trigonométrique

Définition : Un cercle trigonométrique est un cercle de centre 0 et de rayon est égal à 1

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(o\vec{\imath}, \vec{\jmath})$, le cercle est souvent orienté de centre 0 et de rayon 1.



$\|\vec{\imath}\| = \|\vec{\jmath}\| = 1$

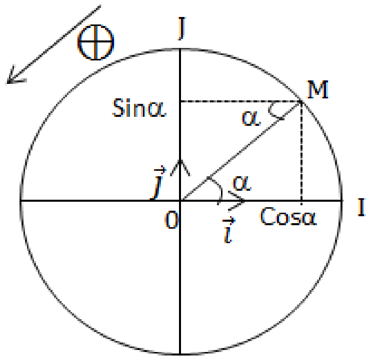
$\alpha = \left(\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OA}}\right)$ et $\alpha \in\ ]\pi;\ \pi[$

2 – **Utilisation du cercle trigonométrique**

a) Sinus et Cosinus d'un angle orienté

Soit α un nombre réel et M le point du cercle trigonométrique tel que $\alpha = \left(\widehat{\overrightarrow{OI}\,,\overrightarrow{OA}}\right)$ .On appelle cosinus et sinus de α les coordonnées du point M et on note : Cosα $et\ Sin\alpha$
on a : $M\binom{Cos\ \alpha}{Sin\ \alpha}$.

b) Détermination de Sinα, Cosα et de Tanα



Considérons le triangle OMI :

$$\begin{cases} \text{Cos}\alpha = \dfrac{OI}{OM} \\ \text{Sin}\alpha = \dfrac{OJ}{OM} \end{cases}$$

$$\tan\alpha = \frac{\text{Sin}\alpha}{\text{Cos}\alpha} = \frac{\frac{OJ}{OM}}{\frac{OI}{OM}} = \frac{OJ}{OI}$$

$$\boxed{\tan\alpha = \frac{OJ}{OI}}$$

Dans le plan muni du repère$(o\vec{\imath}, , \vec{\jmath})$,

$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{OJ}\ \ or\ OI = OM\ Cos\alpha\ et\ OJ = OMsin\alpha$

$\Rightarrow \overrightarrow{OM} = OM\ Cos\alpha + OMsin\alpha\ or$

$\begin{cases} OM\ Cos\alpha = \vec{\imath}Cos\alpha \\ OMsin\alpha = \vec{\jmath}sin\alpha \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{OM} = \vec{\imath}Cos\alpha + \vec{\jmath}sin\alpha$

$M\binom{Cos\ \alpha}{Sin\ \alpha}$

c) Proprieties

- On sait que $Cos^2 +\ Sin^2\alpha$ sont positifs de la relation:

$$Cos^2 +\ Sin^2\alpha = 1$$

- Soit α appartenant à $]-\pi;\ \pi[$; on a : $\begin{cases} -1 \leq cos\alpha\ \leq 1 \\ \quad et \\ -1\ \leq sin\alpha\ \leq\ 1 \end{cases}$

En prenant les deux égalités en valeur absolue :

$$\begin{cases} |cos\alpha| \leq 1 \\ |sin\alpha| \leq 1 \end{cases}$$

- De plus $\alpha \neq k\pi$; $k \in Z$, on a : $\cos(-\alpha) = cos\alpha$

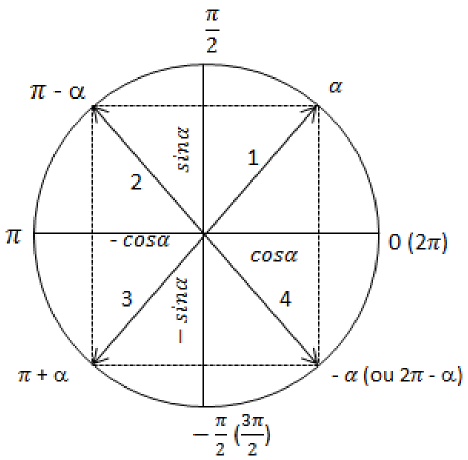
$\sin(-\alpha) = -sin\alpha$

- Soit $\alpha \in IR, \alpha \neq \frac{\pi}{2}[\pi]$ (avec réserve π).

Cette notation se lit : « α ne congru pas $\frac{\pi}{2}$ modulo π ».

On appelleα, le réel : $\tan\alpha = \frac{sin\alpha}{cos\alpha}$ et la cotangente α, le réel : $\text{cotan}\alpha = \frac{cos\alpha}{sin\alpha}$.

3 – Signes du cosinus et sinus dans les cadrans



Propriétés :

- $\forall \alpha \in]0; \frac{\pi}{2}[\Rightarrow \cos\alpha > 0$ et $\sin\alpha > 0$;
- $\forall \alpha \in]\frac{\pi}{2}; \pi[\Rightarrow \cos\alpha < 0$ et $\sin\alpha > 0$;
- $\forall \alpha \in]-\frac{\pi}{2}; 0[\Rightarrow \cos\alpha > 0$ et $\sin\alpha < 0$;
- $\forall \alpha \in]\pi; -\frac{\pi}{2}[\Rightarrow \cos\alpha < 0$ et $\sin\alpha < 0$;

N.B:

- $\forall \alpha \in IR$, on a:
- $\text{Sin}(\pi - \alpha) = \sin\alpha$
- $\text{Sin}(\pi + \alpha) = -\sin\alpha$
- $\text{Cos}(\pi + \alpha) = \cos\alpha$
- $\text{Cos}(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$
- $\text{Sin}(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \sin(\frac{\pi}{2} + \alpha) = \cos\alpha$
- $\text{Sin}(\alpha - \frac{\pi}{2}) = \sin(-\frac{\pi}{2} - \alpha) = -\cos\alpha$
- $\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \sin\alpha$

a) Formule addition

Soit α et β deux nombres réels tels que:

- $\cos(\alpha + \beta) = \sin\alpha . \sin\beta - \cos\alpha . \cos\beta$
- $\cos(\alpha - \beta) = \sin\alpha . \sin\beta + \cos\alpha . \cos\beta$
- $\text{Sin}\ (\alpha + \beta) = \sin\alpha . \cos\beta + \sin\beta . \cos\alpha$
- $\text{Sin}\ (\alpha - \beta) = \sin\alpha . \cos\beta - \sin\beta . \cos\alpha$

Exemple: $\text{Cos}\ (\pi + \alpha) = \sin\pi . \sin\alpha - \cos\pi . \cos\alpha$
$= -(-\cos\alpha) = \cos\alpha$
avec $\text{Cos}\pi = -1$

$$\boxed{\text{Cos}\ (\pi + \alpha) = \cos\alpha}$$

Deplus, si $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ / $k \in Z$; $\tan(\pi - \alpha) = -\tan\alpha$

Avec $\tan(\pi - \alpha) = \frac{\sin(\pi - \alpha)}{\cos(\pi - \alpha)} = -\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\tan\alpha$
$\Leftrightarrow$ $\boxed{\tan(\pi - \alpha) = -\tan\alpha}$

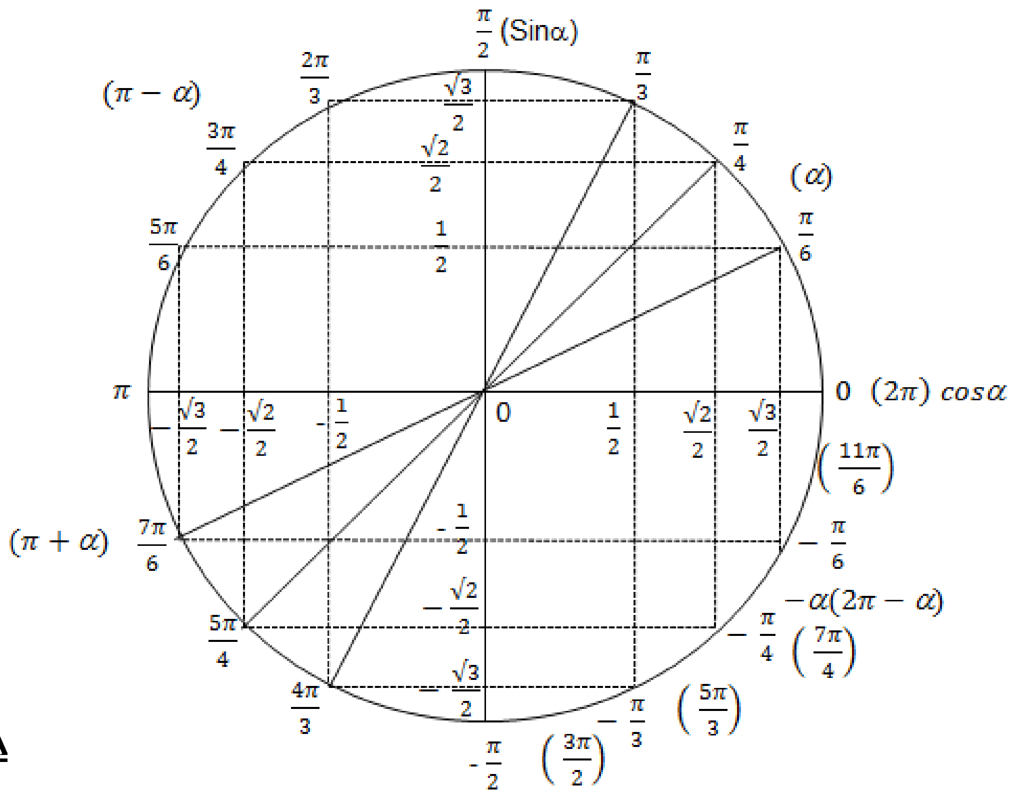
b) Cercle Trigonométrique

- Les angles remarquables sont $0(2\pi)$; π ; $\frac{\pi}{2}$; $-\frac{\pi}{2}\left(\frac{3\pi}{2}\right)$; $\frac{\pi}{4}$; $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{6}$.

Ces angles, nous permettent de remplir le cercle trigonométrique ou α prend la valeur de : $\frac{\pi}{3}$; $\frac{\pi}{4}$ ou $\frac{\pi}{6}$. et constitue le premier cadran du cercle trigonométrique.

- Le 2$^{\text{ème}}$ cadran est rempli ou déterminé par la formule de $\pi - \alpha$;
- Le 3$^{\text{ème}}$ cadran est déterminé par $\pi + \alpha$
- Le 4$^{\text{ème}}$ cadran est déterminé par $-\alpha$ ou $2\pi - \alpha$.

Dans le cercle trigonométrique, le repère est gradué par : $\frac{1}{6}$; $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\frac{\sqrt{3}}{2}$ dont le rayon est égal à 1.



* **A**

Mesure principale	$0(2\pi)$	π	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2}(\frac{3\pi}{2})$
sinα	0	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	½	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	- ½	1	-1
cosα	1	-1	½	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	- ½	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	0
tanα	0	0	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	?	?
Cotan α	?	?	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	0	0

4) Relation tangentielle d'un angle orienté

Soit un angle orienté $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$non droit de même principale α tel que $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$ et $\alpha \neq -\frac{\pi}{2}$.

La tangente de cet angle orienté ou de sa mesure principale est définie par :
$\tan(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) = \tan\alpha = \frac{\mathrm{Sin}\alpha}{\mathrm{Cos}\alpha}$ et $\mathrm{cotan} = \mathrm{cotan}\alpha = \frac{\mathrm{Cos}\alpha}{\mathrm{Sin}\alpha}$.

Propriétés : $\forall\alpha \in]-\pi;\ \pi[\ /\ \alpha \neq \frac{\pi}{2}\ et\ \alpha \neq -\frac{\pi}{2}$

On a : $1 + tan^2\alpha = \frac{1}{cos^2\alpha}\quad et - 1 + tan^2\alpha = \frac{1}{sin^2\alpha}$

Exemple : Calculons $1 + tan^2\alpha\ en\ fonction\ cosa$

On sait que $\tan\alpha = \frac{\mathrm{Sin}\alpha}{\mathrm{Cos}\alpha} \Rightarrow 1 + tan^2\alpha = 1 + \frac{Sin^2\alpha}{Cos^2\alpha}$

$\frac{Cos^2\alpha+Sin^2\alpha}{Cos^2\alpha}$ $or\ Cos^2\alpha + Sin^2\alpha = 1$

$1 + tan^2\alpha = \frac{1}{Cos^2\alpha}$

5. **Résolution d'équation simple sur $]-\pi;\ \pi[$**

D'une manière générale, pour résoudre les équations trigonométrique, on fait souvent l'usage du cercle trigonométrique.

a) **Equation du type $Cos\alpha = a$**

- Si $a \in]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$; l'ensemble de solution est vide ($S = \emptyset$)
- Si $a \in \left]-1\,;1\right[\,;\nexists\alpha_0 \in\ ]-\pi\,;\,\pi[$ / a = $\cos\alpha_0\ \Rightarrow Cos\alpha = \cos\alpha_0$

  $\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \alpha_0 + 2k\pi \\ \quad ou \\ \alpha = -\alpha_0 + 2k\pi \end{cases}$

  $S = \{\alpha_0 + 2k\pi; -\alpha_0 + 2k\pi\}$

  Exemple : Résoudre dans $]-\pi\,;\,\pi[$, les équation suivantes :

  a) $cosx = 3$

  b) $cosx = \frac{1}{2}$

Solution :

a) $cosx = 3$

$3 \in]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$

$S = \emptyset$

b) $cosx = \frac{1}{2}$

$\frac{1}{2} \in \left]-1\,;1\right[\,;\,;\nexists\alpha_0 \in\ ]-\pi\,;\,\pi[\ /\ \frac{1}{2} = cos\frac{\pi}{3} \Rightarrow cosx = cos\frac{\pi}{3}$

$\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi\ ou \\ x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}$

$S = \left\{\frac{\pi}{3} + 2k\pi; -\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right\}$

b. **Equation du Type Sinα = a**

- si $a \in]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[\,; S = \emptyset$
- si $a \in]-1; 1[\,; Z\alpha_0 \in]-\pi\,;\,\pi[$ / a = $sin\alpha_0$

  $\Leftrightarrow sin\alpha = sin\alpha_0$

  $\Rightarrow \begin{cases} \alpha = \alpha_0 + 2k\pi\ \ ou \\ \alpha = -\alpha_0 + 2k\pi \end{cases}; k \in Z$

  $\Rightarrow S = \{\alpha_0 + 2k\pi\ + -\alpha_0 + 2k\pi\}$

Exemple : Résoudre dans $]-\pi\,;\,\pi[$ l'équation $sinx = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$sinx = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\frac{\sqrt{2}}{2} \in\ ]-1;1[\ ; Z\alpha_0 \in\ ]-\pi\ ;\ \pi[\ /\ \frac{\sqrt{2}}{2} = sin\frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow sinx = sin\frac{\pi}{4}$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ \quad ou \qquad\qquad k \in Z \\ x = \pi - \frac{\pi}{4} + 2k\pi \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ \quad ou \qquad\qquad k \in Z \\ x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \end{cases}$$

$S = \left\{\frac{\pi}{4} + 2k\pi\ ; \frac{3\pi}{4} + 2k\pi\ ; k \in Z\right\}$

Exercices

Exercice 1 :

Soit ABC un triangle isocèle de sommet A tel que $BC = a\ et\ mes(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = \frac{2\pi}{5}$.

la bissectrice de l'angle $\widehat{ABC}$ coupe le côte $[AC]$ en D. Faire la figure.

1) Démontre que $AD = BD = a$
2) Démontrer que $= 2acos\frac{\pi}{5}\ et\ CD = 2acos\frac{2\pi}{5}$. En déduire que $cos\frac{\pi}{5} - cos\frac{2\pi}{5} = \frac{1}{2}$
3) On appelle H le projeté orthogonal de A sur (BC). Calculer BH en fonction de a de deux manière différentes et en déduire que $cos\frac{\pi}{5}cos\frac{2\pi}{5} = \frac{1}{4}$
4) En remarquant que $(x+y)^2 = (x-y)^2 + 4xy$. Calculer $cos\frac{\pi}{5}\ et\ cos\frac{2\pi}{5}$
5) Calculer $sin\frac{\pi}{5}$

Exercice2 :

a) Calculer $cosx$ sachant que : $sinx = \frac{\sqrt{3}}{2}\ et \frac{\pi}{2} < x < \pi$
b) Calculer $sin\frac{\pi}{5}\ \ et\ tang\frac{\pi}{5}\ sachant\ que\ cos\frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$
c) Résoudre dans $]-\pi\ ;\ \pi[$ l'équation : $cosx = \frac{1}{2}$; $sinx = \frac{\sqrt{3}}{2}\ \ et\ cosx = 5$

Solution

Exercice 2

a) Calculons $cosx$ sachant que $sinx = \frac{\sqrt{3}}{2}\ et \frac{\pi}{2} < x < \pi$

$cosx = -\frac{1}{2}$

b) Calculons $sin\frac{\pi}{5}$ et $tang\frac{\pi}{5}$

Pour $cos\frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$

$sin\frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$

$tang\frac{\pi}{5} = \frac{\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}}{\frac{\sqrt{5}+1}{4}} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}+1}$

$tang\frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}+1}$

c) Résoudre dans $]-\pi\,;\,\pi[$ l'équation : $cosx = \frac{1}{2}$

: $cosx = \frac{1}{2}$; $\frac{1}{2} \in]-1;1[$; $\exists\, x \in\ ]-\pi\,;\,\pi[$

$\frac{1}{2} = cosx\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow cosx = cos\frac{\pi}{3}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi; k \epsilon Z \;\; ou \\ \quad x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}$

$S = \left\{\frac{\pi}{3} + 2k\pi \;\; ; -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \;\;\; ; \;\; k \epsilon Z\right\}$

$sinx = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\frac{\sqrt{3}}{2} \epsilon\,]-1;1[$; $\exists\, x \in\ ]-\pi\,;\,\pi[$

$\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin x_0$

$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = sin\frac{2\pi}{3}$

$\Rightarrow \sin x = sin\frac{2\pi}{3}$

$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \;\; ; \;\; k \epsilon Z \\ \qquad ou \\ \;\; x = \pi - \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}$

$S = \left\{\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \;\; ; \pi - \frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right\}$

Chapitre 4 Produit Scalaire

I. Définition et Propriétés

1- Produit scalaire de deux vecteurs

a- Définition :

On considère deux vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$, on appelle produit scalaire de $\vec{U}$ et $\vec{V}$, le nombre réel $\vec{U}.\vec{V}$, définit par :

- $\vec{U} \times \vec{V} = \vec{0}$ si l'un de deux vecteurs est nul.
- $\vec{U} \times \vec{V} = ||\vec{U}||.||\vec{V}|| \cos(\vec{U} \times \vec{V})$, si les deux vecteurs sont non nuls.

$\vec{U} \times \vec{V}$ se lit « $\vec{U}$ scalaire $\vec{V}$ »

Exemple : soit $\vec{U}$ et $\vec{V}$ deux vecteurs tels que $||\vec{U}||=2$ et $||\vec{V}||=3$ et mes $(\vec{U} \times \vec{V})=\frac{\pi}{3}$

Calculer le produit scalaire de $\vec{U}$ et $\vec{V}$

Solution :

Calculons le produit scalaire de $\vec{U}$ et $\vec{V}$

AN : $\vec{U} \times \vec{V} = 2 \times 3\text{xCos}\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$

$2 \times 3 \times \frac{1}{2} = 3 \times 1 = 3$

$\boxed{\vec{U} \times \vec{V}=3}$

b. propriétés.

Soit $\vec{U}$ et $\vec{V}$ deux vecteurs non nuls

- $\vec{U} \times \vec{V} = \vec{V} \times \vec{U}$ (commutativité de la loi)
- $|\vec{U} \times \vec{V}| \ll ||\vec{U}|| \times ||\vec{V}||$
- $\vec{U} \times \vec{V} = ||\vec{U}|| \times ||\vec{V}||$, lors ce que $\vec{U}$ et $\vec{V}$ sont colinéaires et de même sens
- $\vec{U} \times \vec{V} = -\ ||\vec{U}|| \times ||\vec{V}||$ lors ce que $\vec{U}$ et $\vec{V}$ sont colinéaires et de sens contraire

2. carré scalaire

a. définition

Soit $\vec{U}$ et $\vec{V}$ deux vecteurs non nuls ; $\vec{U} \times \vec{V}$ est dit carré scalaire lorsque $\vec{U} = \vec{V}$

On a : $\vec{U} \times \vec{V} = \vec{U}\vec{U} = \vec{U}^2$ ou $\vec{U} \times \vec{U} = \vec{V}\vec{V} = \vec{V}^2$

b. propriété

$\forall\ \vec{V} : \vec{V}^2 = ||\vec{V}||^2$

Preuve :

- si $\vec{V} = \vec{O}$, la propriété est évidente.
- si $\vec{V} \neq \vec{O}$; alors $\vec{V}^2 = \vec{V} \times \vec{V} = ||\vec{U}|| \times ||\vec{V}|| \cos(\vec{V}, \vec{V})$

Or mes $(\vec{U} \times \vec{V}) = 0$ et $\cos(\vec{V} \times \vec{V}) = 1$

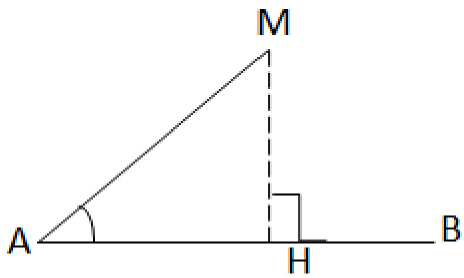
D'où $\vec{V}^2 = -\ ||\vec{U}|| \times ||\vec{V}|| \text{x} 1 = ||\vec{V}||^2$

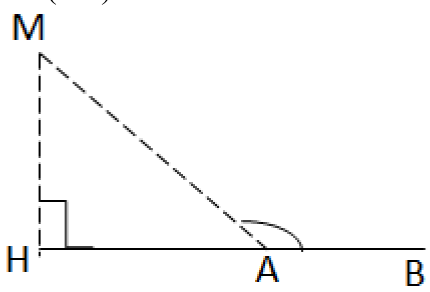
$\boxed{\vec{V}^2 = ||\vec{V}||^2}$

3. **Interprétation géométrique**

∀ les points A, B, et M/A ≠ B, on a : $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AM}$

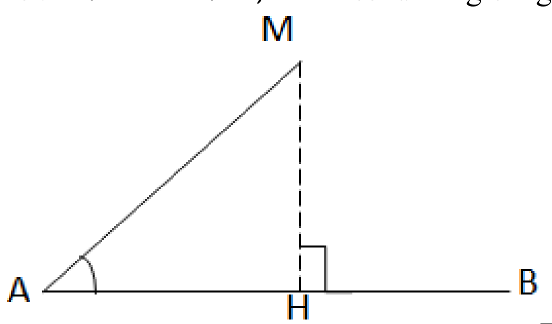
Ou H est le projeté orthogonal de M sud la droite (AB)





Remarque : si A = m = h, la propriété est verifiée car : $\overrightarrow{AM} = \vec{O}\ et\ \overrightarrow{AH} = \vec{O}$.

Supposons : A ≠ 0 et A ≠ B, BAM est un angle aigu (non nul, H ∈ [AB]).



Par définition du produit scalaire ; $\overrightarrow{AB} . \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AM}.\text{Cos}\left(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AM}\right) =$

$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AM}.\cos\overline{BAM}$. or H est le projeté orthogonal de M sud (AB), d'où

$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AH}.\text{Cos}\ (\overrightarrow{AB} \times \text{AH}).$ or

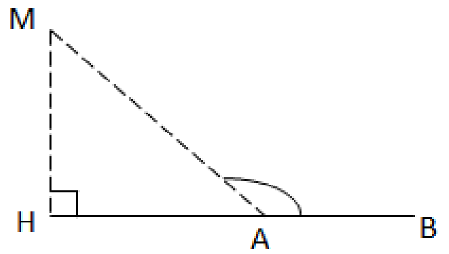
mes $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AH}) = 0 \Leftrightarrow \cos(\text{AB}, \text{AH}) = 1$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AH} \times 1$ on dit que

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AH}$; $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont colinéaire de même sens

$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AM}$

- BAM est un angle obtus plat



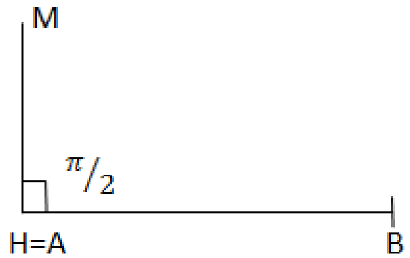
$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AM}$= $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AM} \times$ Cos ($\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AM}$) $\times$ cos $\overrightarrow{BAM}$ or

cos$\overrightarrow{BAM}$ $= \pi$ et cos ($\overrightarrow{BAM}$)= $-$ 1

$\Rightarrow \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AM}$=$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AH} \times (-1) \Rightarrow \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AM}$= $-\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AH}$

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont collinaires et de sens contraire alors : $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AM}$= $-\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AH}$

- $\overrightarrow{BAM}$ est un angle droit



$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AM} = \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AM}\|$ cos $\widehat{BAM}$ or $\widehat{BAM} = \frac{\pi}{2}$ donc $cos\widehat{BAM} = 0$

H étant le projeté orthogonal de M sur (AB), on peut écrire

$\Rightarrow \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AH}$ xcos $\widehat{BAM} = \vec{0}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AM} = \vec{0}$

Remarque :

- B$\overrightarrow{AM}$ est un angle aigu si et seulement si $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AM} >0$
- B$\overrightarrow{AM}$ est un angle obtus si et seulement si $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AM} < 0$
- B$\overrightarrow{AM}$ est un angle droit si et seulement si $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AM}$= 0
- Si $\vec{U}$ et $\vec{V}$sont deux vecteurs qui forment eux un angle, la détermination de la mesure de α est vérifié par la relation ci-dessous :

Cos α= $\frac{\vec{U}\times\vec{V}}{||\vec{U}||\times||\vec{V}||} \Rightarrow \alpha = cos^{-1}\left(\frac{\vec{U}\times\vec{V}}{||\vec{U}||\times||\vec{V}||}\right)$

Exemple : α mes ($\vec{U} \times \vec{V}$), sachant que $\vec{U} \times \vec{V}$=3, $||\vec{U}||$ = 2 et $||\vec{V}||$ = $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

Solution :

Déterminons $\alpha = \text{mes } (\vec{U} \times \vec{V})$,

$\vec{U} \times \vec{V} = ||\vec{U}|| \times ||\vec{V}|| \times \text{Cos } (\vec{U} \times \vec{V}), = ||\vec{U}|| \times ||\vec{V}|| \times \text{Cos } \alpha$

$$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{\vec{U} \times \vec{V}}{||\vec{U}|| \times ||\vec{V}||}$$

AN : $\cos\alpha = \frac{3}{2x\frac{3\sqrt{2}}{2}} = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \cos\alpha \ \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \alpha = \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$\boxed{\Rightarrow \alpha = 45° = \frac{\pi}{4}}$

II. Propriété du produit scalaire

1. Vecteurs ortho normaux

Soit $\vec{U}$ *et* $\vec{V}$ deux vecteurs non nul. Deux vecteurs sont orthogonaux lorsque leur produit scalaire est nul ; c'est-à-dire :

$\vec{U} \perp \vec{V} \Leftrightarrow \vec{U}.\vec{V} = \vec{O}.$

Conséquence

- Soit (D) et (D') deux droite dirigés par deux vecteurs directeurs respectifs $\vec{U}$ *et* $\vec{V}$: la droite (D) est orthogonale à la droite (D'), lorsque le produit scalaire de leur vecteurs directeurs est nul.
- Soit A, B, C D des points distincts avec A ≠ B et C ≠ D : la droite (AB) $\perp$(CD) $\Rightarrow$ $\overrightarrow{AB}$. *et* $\overrightarrow{CD} = \vec{O}$
- Soit les point A, B et M avec A#B : M€(C) de diamètre [AB], lorsque. $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = \vec{O} \Leftrightarrow$ (MA)$\perp$ (MB)

NB : dans une base ortho normée, on en déduit :

$\vec{U} \times \vec{V} = xx' + yy'$ avec $\vec{U}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{V}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

2. règle de calcule

Pour tout vecteurs.$\vec{U}, \vec{V}; \vec{R}, \vec{S}$ et tout nombre $\beta \in$ R on a :

- $\vec{U} \times \vec{V} = \vec{V}\vec{U}$ (commutativité)
- $\vec{U}(\vec{V} + \vec{R}) = \vec{U} \times \vec{V} + \vec{U} \times \vec{R}$ (distributivité)
- $(\beta\vec{U})\,\vec{V} = \vec{U}(\beta\vec{V}) = \beta(\vec{U}.\vec{V})$
- $(\vec{U} - \vec{S})\,\vec{V} = \vec{U} \times \vec{V} - \vec{S} \times \vec{V}$
- $(\vec{U} + \vec{V})^2 = \vec{U}^2 + 2\vec{U} \times \vec{V} + \vec{V}^2$

- $(\vec{U}-\vec{V})^2 = \vec{U}^2 - 2\vec{U} \times \vec{V} + \vec{V}^2$
- $(\vec{U}+\overrightarrow{V})(\vec{U}-\vec{V}) = \vec{U}^2 - \vec{V}^2$
- $(\vec{U}+\overrightarrow{V})(\vec{S}+\overrightarrow{R}) = \vec{U} \times \vec{S} + \vec{U} \times \vec{R} + \vec{V} \times \vec{S} + \vec{V} \times \vec{R}$

a. Autre expression du produit scalaire

Pour tous vecteurs on a : $\vec{U} \times \vec{V} = \frac{1}{2}\left(\vec{U}+\vec{V}\right)^2 - ||U||^2 - ||V||^2$

Preuve : d'après la somme de carré :

$(\vec{U}+\vec{V})^2 = \vec{U}^2 + 2\vec{U} \times \vec{V} + \vec{V}^2$

$||\vec{U}+\vec{V}||^2 = ||\vec{U}||^2 + 2\vec{U} \times \vec{V}\ ||\vec{V}||^2$

$\Rightarrow 2\vec{U} \times \vec{V} = ||\vec{U}+\vec{V}||^2 - ||\vec{U}||^2 - ||\vec{V}||^2$

$\Rightarrow \boxed{\vec{U} \times \vec{V} = \frac{1}{2}(||\vec{U}+\vec{V}||^2 - ||\vec{U}||^2 - ||\vec{V}||^2)}$

Exemple :

On donne : $\left|\left|\vec{U}\right|\right| = \sqrt{2}$, $||\vec{V}|| = 2$ et mes $(\vec{U},\vec{V}) = \frac{\pi}{4}$

a. calculer $\vec{U}.\vec{V}$
b. déduire les valeurs de $(\vec{U}+\vec{V})^2$, $(\vec{U}-\vec{V})^2$

Solution

a. Calculons $\vec{U} \times \vec{V}$

Par définition : $\vec{U} \times \vec{V} = ||\vec{U}|| \times ||\vec{V}|| \operatorname{Cos}(\vec{U},\vec{V})$

Avec Mes $(\vec{U},\vec{V}) = \frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow \vec{U} \times \vec{V} = \left|\left|\vec{U}\right|\right| \times \left|\left|\vec{V}\right|\right| \operatorname{Cos}\frac{\pi}{4}$ or $\operatorname{Cos}\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

AN : $\vec{U} \times \vec{V} = \sqrt{2} \times 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \left(\sqrt{2}\right)^2 = 2$

$\vec{U} \times \vec{V} = 2$

b. déduisons les valeurs de

❖ $(\vec{U}-\vec{V})^2 = \vec{U}^2 + 2\vec{U}.\vec{V} + \vec{V}^2$

$= ||\vec{U}||^2 + 2\vec{U} \times \vec{V} + ||\vec{V}||^2$

$= \left(\sqrt{2}\right)^2 + 2\vec{U} \times \vec{V} + 2^2$

$2 + 2\vec{U} \times \vec{V} + 4$, avec $\vec{U} \times \vec{V} = 2$

$on\ a: (\vec{U}+\vec{V})^2 = 2\vec{U}\times\vec{V}+6$

$= 2\times 2+6$

$\boxed{(\vec{U}+\vec{V})^2 = 10}$

- $(\vec{U}-\vec{V})^2 = U^2 - 2\vec{U}\times\vec{V} + V^2$

$= ||\vec{U}||^2 - 2\vec{U}\times\vec{V} + ||\vec{V}||^2$

$= (\sqrt{2})^2 - 2\times 2 + 2^2$

$= 2-4+4 = 2$

$\boxed{(\vec{U}-\vec{V})^2 = 2}$

- $(2\vec{U} - 3\vec{V})^2 = (2\vec{U} - 3\vec{V})(2\vec{U} - 3\vec{V})$

$= 4\vec{U}^2 - 6\vec{V}\times\vec{U} - 6\vec{U}\vec{V} + 9\vec{V}^2$

$= 4||\vec{U}||^2 - 12\,\vec{U}\times\vec{V} + 9||\vec{V}||^2$

$= 4\times(\sqrt{2})^2 - 12\times 2 + 9\times(2)^2$

$= 8-24+36 = 20$

$\boxed{(2\vec{U} - 3\vec{V})^2 = 20}$

- $(2\vec{U}-\vec{V})(\vec{U}+2\vec{V}) = 2\vec{U}^2 + 4\,\vec{U}\times\vec{V} - \vec{U}\times\vec{V} - 2\vec{V}^2$

$= 2||\vec{U}||^2 + 3\vec{U}\times\vec{V} - 2\,||\vec{V}||^2$

$= 2\times(\sqrt{2})^2 + 3\times 2 - 2\times 2^2$

$= 4+6-8 = 2$

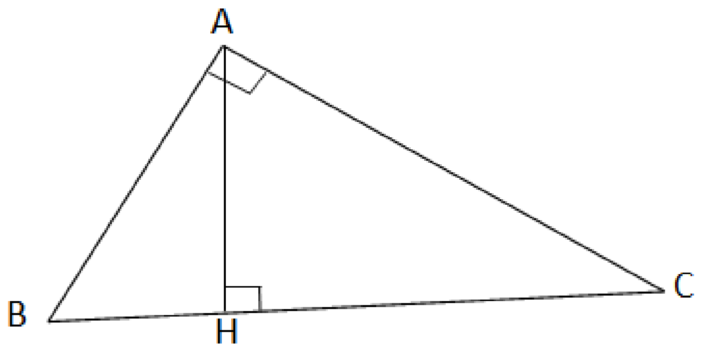
$(2\vec{U}-\vec{V})(\vec{U}+2\vec{V}) = 2$

III. Relation métriques dans un angle

1. Relation métrique caractérisant un triangle rectangle

Nous savons que $BC^2 = AB^2 + AC^2$ est une caractéristique d'un triangle rectangle en A d'après le théorème de Pythagore.

Soit ABC un triangle rectangle en A. H est le projeté orthogonal de A sur la droite (BA)

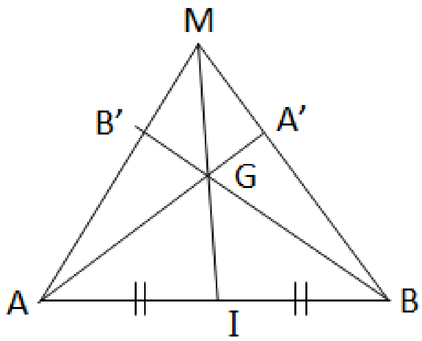


Les énoncés suivant sont

- ABC est un triangle rectangle
- $BC^2 = AB^2 + AC^2$
- $BA^2 = \overline{BH}\text{x}\overline{BC}$

2. Théorème de la médiane

Soit AMB un triangle quelconque et [MI] la médiane relative à [AB]



On a :

- $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = MI^2 + \frac{AB^2}{4}$
- $MA^2 + MB^2 = 2\,MI^2 + \frac{AB^2}{2}$
- $MA^2 - MB^2 = 2\,MI^2.\overrightarrow{AB}$

Démonstration

D'après la relation de Chasles

I ∈ [MA] $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}$

I ∈ [MB] $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}$

On a : $\overrightarrow{MA} \times \overrightarrow{MB} = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})$

$= \overrightarrow{MI}^2 + \overrightarrow{MI} \times \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IA} \times \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} \times \overrightarrow{IB}$

$= \overrightarrow{MI}^2 = \overrightarrow{MI}(\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IA}) + \overrightarrow{IA} \times \overrightarrow{IB}$

Or *I* est le milieu de [AB] $\Rightarrow \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IA} = \vec{O}$

Et IA = IB = $\frac{AB}{2}$

$\Rightarrow \overrightarrow{MA} \times \overrightarrow{MB} = MI^2 + \overrightarrow{MI} \times \vec{O} + \frac{AB}{2} \times \frac{AB}{2}$

$= MI^2 + \frac{AB^2}{4}$

$$\boxed{\Rightarrow \overrightarrow{MA} \times \overrightarrow{MB} = MI^2 + \frac{AB^2}{4}}$$

- $MA^2 + MB^2 = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2$

  $= (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})$

  $= \overrightarrow{MI}^2 + \overrightarrow{MI} \times \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IA} \times \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}^2 + \overrightarrow{MI}^2 + \overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IB} \times \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}^2$

  $= 2MI^2 + 2\overrightarrow{MI}(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}) + IA^2 + IB^2$

  $or \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{O}$

  $= 2MI^2 + 2\overrightarrow{MI} \times \vec{O} + IA^2 + IB^2$

  Or IA = IB $= \frac{AB}{2}$

  $2\overrightarrow{MI}^2 + \frac{AB^2}{4} + \frac{AB^2}{4}$

  $= 2\overrightarrow{MI}^2 + \frac{2AB^2}{4} = 2\overrightarrow{MI}^2 + \frac{AB^2}{2}$

$$\boxed{MA^2 + MB^2 = 2\overrightarrow{MI}^2 + \frac{AB^2}{2}}$$

De même

$MA^2 - MB^2 = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 - (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2$

$(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) - (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})$

$= \overrightarrow{MI}^2 + 2\overrightarrow{MI} \times \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IA}^2 - \overrightarrow{MI}^2 - 2\overrightarrow{MI} \times \overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IB}^2$

$= 2\overrightarrow{MI}(\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IB}) + IA^2 + IB^2$

$or\ \overrightarrow{IA} = \overrightarrow{IB} = \frac{AB}{2}$

$\Longmapsto MA^2 - MB^2 = 2\overrightarrow{MI}(\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IB})^2 + \frac{AB^2}{4} - \frac{AB^2}{4}$

$= 2\overrightarrow{MI}(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB})^2$ or $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{BA}$

$$\boxed{MA^2 - MB^2 = 2\overrightarrow{MI} \times \overrightarrow{BA}}$$

Ces relations permettent de calculer les longueurs de médiane d'un triangle dont on connait les longueurs des côtés.

IV. Forme analytique d'un produit scalaire

1. Expression dans la base ortho normé

Soit $\vec{U}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $\vec{V}\begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix}$ dans la base (i,$\vec{j}$) ; on a :

$$\boxed{\vec{U} \times \vec{V} = aa' + bb'}$$

Preuve : $\vec{U}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in (\vec{\imath}, \vec{\jmath}) \Leftrightarrow \vec{U} = a\vec{\imath} + b\vec{\jmath}$

$\vec{V}\begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} \in (\vec{\imath}, \vec{\jmath}) \Leftrightarrow \vec{V} = a'\vec{\imath} + b'\vec{\jmath}$

$\Rightarrow \vec{U}.\vec{V} = (a\vec{\imath} + b\vec{\jmath})(a'\vec{\imath} + b'\vec{\jmath})$

$= aa'\vec{\imath}^2 + ab'\vec{\imath}.\vec{\jmath} + a'b\vec{\imath}.\vec{\jmath} + bb'\vec{\jmath}^2$

Dans la base orthonormé $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$

$\vec{\imath}^2 = ||\vec{\imath}||^2 = 1 ; \ \vec{\imath} \times \vec{\jmath} = 0$

$\vec{\jmath}^2 = ||\vec{\jmath}||^2 = 1 ; \ \vec{\jmath} \times \vec{\imath} = 0$

$\Rightarrow \vec{U} \times \vec{V} = aa' \times 1 + ab' \times 0 + a'b \times 0 + bb' \times 1 = aa' + bb'$

$\boxed{\vec{U} \times \vec{V} = aa' + bb'}$

Conséquence

Soit : $\vec{U}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ dans une base orthonormé(i, $\vec{\jmath}$) ,

On a : $\begin{cases} a = U_{\vec{I}} \\ b = U_{\vec{\jmath}} \end{cases}$

Démonstration : $\vec{U}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in (\text{i}, \vec{\jmath}) \Leftrightarrow \vec{U} = a\vec{\imath} + b\vec{\jmath}$

On a : $\vec{U} \times \vec{\imath} = (a\vec{\imath} + b\vec{\jmath})\vec{\imath}$

$= a\vec{\imath}^2 + b\vec{\jmath} \times \vec{\imath}$ or $\vec{\jmath} \times \vec{\imath} = 0$ et $\vec{\imath}^2 = 1$

$= a \times 1 + b \times 0 = a$

$\Rightarrow \boxed{\vec{U} \times \vec{\imath} =}$

$\vec{U} \times \vec{\jmath} = (a\vec{\imath} + b\vec{\jmath})\vec{\jmath} = a\vec{\imath} \times \vec{\jmath} + b\vec{\jmath} \times \vec{\jmath}$

$= a \times 0 + b + 1 = b$

$\boxed{\vec{U} \times \vec{\jmath} = b}$

Remarque :

La forme $\vec{U}.\vec{V} = aa' + bb'$ permet facilement, l'expression de la norme d'un vecteur dans une base orthonormé et l'expression de la distance dans un repère orthonormé

- Soit $\vec{U}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ dans la base orthonormé $||\vec{U}|| = \sqrt{a^2 + b^2}$

- Soit A$\begin{pmatrix} xA \\ yA \end{pmatrix}$ et B $\begin{pmatrix} xB \\ xB \end{pmatrix}$ dans une base orthonormé,

$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(xB - xA)^2 + (yB - yA)^2}$

- Soit $\vec{U}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$das une base orthonormé et le vecteur $\vec{V}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ est orthogonal à $\vec{U}$
- En effet : $\vec{U} . \times \vec{V} = \mathrm{a} \times (-\mathrm{b}) + \mathrm{ba} = -\mathrm{ab} + \mathrm{ba} = 0$

2. **Equation cartésienne d'une droite**

Pour déterminer l'équation cartésienne d'une droite (D), on peut chercher à se ramener à l'un des deux cas suivants :

- (D) est définit par un point A et vecteur directeur $\vec{U}$.

$\forall$ M $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in$ (D), $\exists$ A $\in$ (D)/ $\det(\overrightarrow{AM}, \vec{U}) = 0$

- (D') est définit par un point A et un de ses vecteurs normaux,

$\forall$ M $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in$ (D), $\exists$ A $\in$ (D)/ $\overrightarrow{AM} \times \vec{N} = 0$

Exemple : déterminons l'équation cartésienne d'une droite passant par A et un vecteur directeur $\vec{U}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\forall$ M $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in$ (D), $\exists$ A $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \in$ (D)/$\det(\overrightarrow{AM}, \vec{U}) = 0$

$\vec{U}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ or $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x-3 \\ y-2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ det $(\overrightarrow{AM}, \vec{U}) = \begin{vmatrix} x-3 & 3 \\ y-2 & 1 \end{vmatrix} = 1(x-3) - 3(y-2)$

$$= x - 3 - 3y + 6 = x - 3y + 3$$
$$det(\overrightarrow{AM}, \vec{U}) = 0 \Leftrightarrow x - 3y + 3 = 0$$

$$\boxed{(D): x - 3y + 3 = 0}$$

Exemple : déterminons l'équation cartésienne d'une droite (D') passant par B$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et un vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} -6 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\forall$ M $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in$ (D'), $\exists$ B $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in$ (D') /B$\vec{M} \times \vec{n} = 0$

B$\vec{M}\begin{pmatrix} x_M - x_B \\ y_M - y_B \end{pmatrix} \Longmapsto$ B$\vec{M}\begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix}$

$B\vec{M}.\vec{n} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -6 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$

$\Rightarrow -6(x-1) - 1(y-1) = 0$

$\Rightarrow -6x + 6 - y + 1 = 0$

$\Rightarrow -6x - y + 7 = 0$

$\boxed{(D') : -6x - y + 7 = 0}$

Remarque : la deuxième méthode est utilisée si le repère (O, $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$) est orthonormé puisque c'est uniquement dans ce cas que l'on connait l'expression analytique du produit scalaire.

3. Cas général

Le plan est muni d'un repère (O, $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$)

Soit (D) une droite, il existe des nombre réels
a , b, c/ $\forall$ M $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in$ (D) $\Rightarrow ax + by + c = 0$ et $(a, b) \neq (0,0)$

$\vec{U}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur et $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est un vecteur normal.

On peut également écrire l'équation cartésienne d'une droite sous forme réduite

$y = mx + p$ avec m le coefficient directeur de l'équation et p l'ordonné à l'origine

On $m = \tan\alpha = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$

Soit (D) et (D') deux droites de coefficients directeurs respectifs m et m'

- $(D)//(D') \Leftrightarrow m = m'$
  $(D)\perp(D') \Leftrightarrow m.m' = 1$

4. Equation paramétrique d'une droite
a. définition

le plan est mini d'un repère (O, $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$). Soit (D) la droite passant par A$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ et dirigée par le vecteur $\vec{U}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. On dit que le système :

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + at \end{cases}$$

Avec $t \in R$ est une représentation paramétrique de la droite (D) dans le repère (O, $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$).

Preuve :

Soit A$\binom{x_0}{y_0}$; $\vec{U}\binom{a}{b}$ et (D) une droite de rpère (A, $\vec{U}$).

$\forall$ M$\binom{x}{y} \in$ (D), $\exists$ A $\in$ (D)/ $\overrightarrow{AM}$, et $\vec{U}$ sont clinéaire

si $\exists$ t $\in$ R/$\overrightarrow{AM} = t\vec{U}$

$\Rightarrow \binom{x_M - x_A}{y_M - y_A} = t\binom{a}{b}$.

$\Rightarrow \binom{x - x_0}{y - y_0} = \binom{at}{bt}$ Avec t $\in$ R

$\begin{cases} x - x_0 = at \\ y - y_0 = bt \end{cases}$ Avec t $\in$ R

$\boxed{\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases} \quad t \in R}$

Exemple : on considère (D) d'équation cartésienne $(D) : 6x - 5y + 5 = 0$

Déterminons la représentation paramétrique de (D).

Solution

Soit A$\binom{0}{1} \in (D) \Leftrightarrow -6 \times 0 - 5 \times 1 + 5 = 0$

$\Rightarrow 0 - 5 + 5 = 0$

$\vec{U}\binom{-b}{a} \Leftrightarrow \binom{+5}{6}$

$\forall$ M$\binom{x}{y} \in$ (D), $\exists$ t $\in$ R/ $\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$

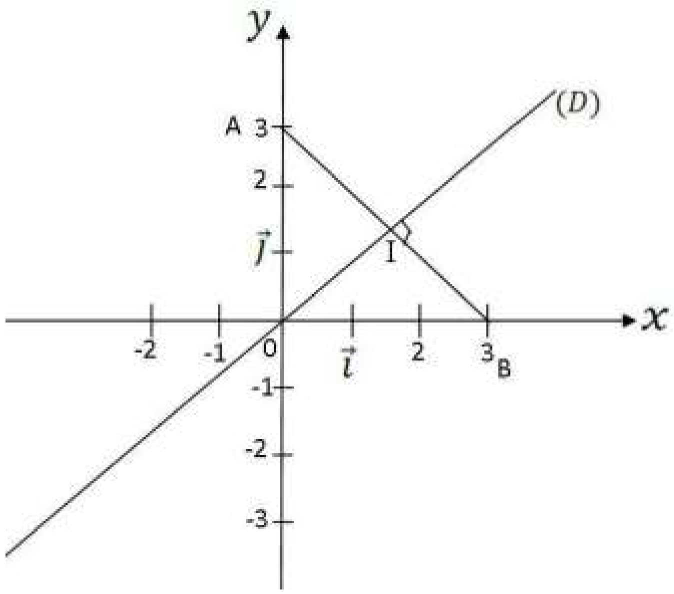
$\Rightarrow \binom{x_M - x_A}{y_M - y_A} = t\binom{+5}{6}$

$\binom{x - 0}{y - 1} = \binom{5t}{6t}$.

$\boxed{\begin{cases} x = 5t \\ y = 6t + 1;\ t \in R \end{cases}}$

5. **Equation de la médiane d'un segment.**

La médiane (D) du segment [AB] est l'ensemble des points M$\binom{x}{y} \in$ (D)/ $\overrightarrow{IM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont orthogonaux ; I étant le milieu du [AB].



La médiane du segment [AB] est l'ensemble des points

$M\binom{x}{y} \in (D) / MA = MB \Leftrightarrow MA^2 = MB^2$ car MA et MB sont des réels positifs.

On a : $MA = \sqrt{(x - x_a)^2 + (y - y_a)^2}$

$MB = \sqrt{(x - x_b)^2 + (y - y_b)^2}$

$MA^2 = MB^2 \Leftrightarrow (x - x_a)^2 + (y - y_a)^2 = (x - x_b)^2 + (y - y_b)^2$

Développons et réduisons

$x^2 - 2xx_A + {x_A}^2 + y^2 - 2yy_A + {y_A}^2 = x^2 - 2xx_B + {x_B}^2 + y^2 - 2yy_B + {y_B}^2$

$= -2x(x_A - x_B) - 2y(y_A - y_B) + {y_A}^2 + {x_A}^2 - {x_B}^2 - {y_B}^2 = 0$

$$\boxed{\Rightarrow 2x(x_B - x_A) + 2y(y_B - y_A) + {x_A}^2 + {y_A}^2 - {x_B}^2 - {y_B}^2 = 0}$$

Equation de la médiane du segment AB.

Exemple soit $A\binom{1}{-5}$ et $B\binom{3}{5}$ deux point du plan.

Déterminons une équation de la médiatrice du segment [AB].

Bibliographie

1. CIAM, Mathématiques Seconde S, Edicef, 2000
2. CIAM, Guide pédagogique Mathématiques Seconde S, Edicef, 2000

Partenariat
Lycée Saint François Xavier
Label 109

Livret à ne pas vendre

Contact
info@label109.org