# MATHS

## 2nd L

Ensemble,Construisons Demain

# MATHS
# Seconde L

INNOVATING
EDUCATION
IN AFRICA

## CHAPITRE 1 : CALCUL NUMERIQUE

### I. Les Nombres réels

#### 1. Nombres rationnels

##### a. Nombres entiers naturels

Les nombres entiers naturels, sont des nombres que nous utilisons pour compter.

- L'ensemble des nombres entiers naturels se note :N. on a :
  $N = \{0,1,2,3, \dots \dots \dots \dots .2000 ; \dots \dots ..\}$
- L'ensemble des nombres entiers naturels non nuls se note : $N^*$

##### b. Nombres entiers relatifs

L'ensemble des nombres entiers relatifs est formé des nombres entiers naturels et leurs opposés 0 est le seul nombre entier relatif à la fois positif et négatif.

- L'ensemble des nombres entiers relatifs se note : Z On a:
  $Z = \{\dots .3 ; -2 ; -1 ; 0 ; +1 ; +2 ; +3 ; \dots .\}$
- L'ensemble des nombres entiers relatifs non nuls se note : $Z^*$

##### c. Nombre rationnels

Un nombre rationnel est un nombre qui peut s'écrire sous la forme $\frac{a}{b}$ ; où $a \in Z$ et $b \in N^*$ .

- L'ensemble des nombres rationnels se note : Q
- L'ensemble des nombres entiers relatifs non nuls se note : $Q^*$

Exemple : $\frac{-4}{1} = -4$; $-4 \in Q$ ; $\frac{9}{4} = 2{,}25$ donc $2{,}25 \in Q$

**Remarque** : un nombre décimal est un nombre rationnel qui peut s'écrire sous la forme : $\frac{a}{10^P}$ où $a \in Z$ et $p \in N$ . L'ensemble des nombres décimaux se note : D

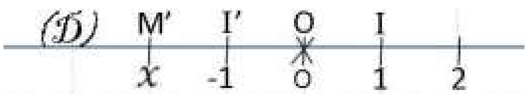
#### 2. Nombres irrationnels

Un nombre irrationnel est un nombre qui ne peut pas s'écrire sous la forme $\frac{a}{b}$ ou $a \in Z$ et $b \in N^*$

a. **Représentation des nombres réels**

Les nombres rationnels et les nombres irrationnels forment l'ensemble des nombres réels. L'ensemble des nombres réels se note :IR. L'ensemble des nombres réels est représenté par une droite graduée(D).

A tout nombre réelx, on associe un point M de(D). A tout point M de (D), on associe un nombre réel $x$ .




Le nombre x est appelé abscisse deM. Les abscisses des points de la demi-droite $[\![OI]\!]$ sont les nombres réels positifs. Les abscisses des points de la demi-droite $[\![OI']\!]$ sont les nombres négatifs.

L'ensemble des nombres réels positifs se note : $R_+$ et l'ensemble des nombres réels négatifs se note : $R_-$. 0 est le seul nombre réel à la fois positif et négatif. On a :
$R_+ \cup R_- = R$ ; $R_+ \cap R_- = \{0\}$

b. **Inclusion des ensembles de nombres**

- Tout nombre entier naturel est un nombre entier relatif : N$\subset$ Z
- Tout nombre entier relatif est un nombre décimal : Z $\subset$ D
- Tout nombre décimal est un nombre rationnel : D $\subset$ Q
- Tout nombre rationnel est nu nombre réel : Q $\subset$ R

On a donc : N$\subset$ Z$\subset$ D $\subset$ Q $\subset$ R.

NB : plus généralement un ensemble A est inclus dans un ensemble B si tout élément de A est élément de B. On note : A $\subset$ B

**II. Calculs dans R**

**1. Sommes et produits**

Propriétés : a, b et c sont des nombres réels.

- $a + b = b + a$
- $(a + b) + c = a + (b + c)$
- $a + 0 = 0 + a = a$
- $a + (-a) = (-a) + a = 0$
  $(-a)$ est l'opposé de a.
- $a \times b = b \times a$
- $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$

- $a \times 1 = 1 \times a = a$
- Si $a \neq 0$ ; $a * \frac{1}{a} = \frac{1}{a} * a = 1$;

  $\frac{1}{a}$ est l'inverse de a
- $a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$
- $(a + b) \times a = (b \times a) + (c \times a)$

## 2. Quotients

Définition: a est un nombre réel et b un nombre réel non nul.

On appelle quotient de $a$ par $b$, le nombre réel q tel que : $b \times q = a$

On note : $\frac{a}{b} = q$ ou $a \div b = q$

Exemple : le quotient de -8 par 5 s'écrit : $\frac{-8}{5}$ ou $-8 : 5$

- **Propriétés :**

Pour tous nombres réels $a; b; c$ et $d$ ne soient pas nuls. On a :

- $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$
- $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$
- $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$
- $\frac{\frac{1}{c}}{d} = \frac{1}{c} \times \frac{1}{d} = \frac{1}{cd}$
- $\frac{1}{\frac{c}{d}} = 1 \times \frac{d}{c} = \frac{d}{c}$

Exemple : calculons

$\frac{7}{8} + \frac{5}{3}$ ; $\frac{11}{20} \times \frac{17}{5}$ ; $\frac{\frac{21}{2}}{\frac{7}{4}}$

- Egalité de deux quotients :

$a, b, c$ et $d$ sont des nombres réels tels que $b$ et $d$ ne soient pas nuls.

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ équivaut à : $ad = bc$

Le produit des extrêmes est égal au produit des moyens.

Exemple : les quotients : $\frac{27}{40}$ et $\frac{18}{32}$ sont égaux si et seulement si :

$27 \times 32 = 48 \times 18 \Rightarrow 864 = 864$

- Simplification d'un quotient

Pour tous nombres réels a, b et c tels que $b \neq 0$ et$d \neq 0$ ; $\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}$

Exemple : simplifions : $\frac{245}{360}$

On a : $\frac{245}{360} = \frac{5 \times 49}{5 \times 72} = \frac{49}{72}$

### 3. Puissances

Définition : $a$ est un nombre réel et $n$ un nombre entier naturel plus grand que 1.

On appelle puissance $n -$ ième de a, le nombre réel noté :$a^n$ tel que :

$$a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \ldots . \times a}_{n \text{ facteurs}}$$

Exemple : $2^5 = \underbrace{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2}_{5 \text{ facteurs égaux de } 2} = 32$

- **Propriétés**

$a$ et $b$ sont des nombres réels ; $n$ et $p$ sont des nombres entiers relatifs.

On a :

- $a^n \times b^n = (a \times b)^n$
- $a^n \times a^p = a^{n+p}$
- $\frac{a^n}{b^n} = (\frac{a}{b})^n$
- $\frac{a^n}{a^p} = a^{n-p}$
- $(a^n)^p = a^{n*p}$

Exemple : calculons

- $3^{-2} \times 3^7 = 3^5$
- $(2^5)^3 = 2^{5\times3} = 2^{15}$
- $(3 \times 7)^5 = 3^5 \times 7^5$
- $(\frac{-4}{5})^3 = \frac{(-4)^3}{5^3}$

- Notation scientifique

Un nombre décimal $x$ est écrit en notation scientifique (ou écriture normalisée), lorsqu'il est sous la forme $x = a \times 10^p$ ou $a$ est un nombre décimal ayant un seul chiffre non nul avant la virgule et $l$ , un nombre entier relatif.

Exemple : écrire les nombres suivants en notation scientifique :

- $0{,}027.10^8 = 2{,}7.10^6$
- $0{,}0006 * 0{,}02 = 6.10^{-4} * 2.10^{-2} = 12.10^{-6} = 1{,}2.10^{-5}$
- $4.108{,}65.10^{-5}$

4. **Racines carrées**

**Définition** : $a$ est un nombre réel positif.

On appelle racine carrée de $a$, le nombre réel positif, noté :$\sqrt{\mathrm{a}}$ , dont le carrée est a :

Exemple : $\sqrt{0} = 0$ ; $\sqrt{1} = 1$ ; $\sqrt{9} = 3$ ; $\sqrt{64} = 8$

- Propriété : pour tous nombres réels positifs a et b et pour tout nombre entier naturel $n$,
  On a :

- $\sqrt{\mathrm{a}} \times \sqrt{\mathrm{b}} = \sqrt{\mathrm{a} \times \mathrm{b}}$
- $\frac{\sqrt{\mathrm{a}}}{\sqrt{\mathrm{b}}} = \sqrt{\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}}}$ avec $\mathrm{b} \neq 0$
- $(\sqrt{\mathrm{a}})^{\mathrm{n}} = \sqrt{\mathrm{a}^{\mathrm{n}}}$

Remarque :

- Seuls les nombres positifs admettent une racine carrée
- $a$ étant un nombre réel positif

$(\sqrt{\mathrm{a}})^2 = \mathrm{a}$ et $(-\sqrt{\mathrm{a}})^{\mathrm{n}} = \mathrm{a}$

Exemple : calculons

- $\sqrt{2} \times \sqrt{6} = \sqrt{2 \times 6} = \sqrt{2 \times 2 \times 3} = \sqrt{2^2 \times 3} = 2\sqrt{3}$
- $(\sqrt{2})^5 = \sqrt{2^5} = \sqrt{2^2 \times 2^2 \times 2} = 4\sqrt{2}$

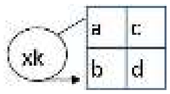
5. **Proportionnalité**

**Définition** : a, b, c et d sont des nombres rées non nuls

| | |
|---|---|
| a | c |
| b | d |

Est un tableau de proportionnalité ; signifie que : $ad = bc$

Le coefficient de proportionnalité permettant de passer de la première ligne à la seconde ligne est le nombre réel k tel que $k = \frac{b}{a} = \frac{d}{c}$




Pour déterminer l'élément manquant du tableau de proportionnalité ci-dessous, on peut calculer le produit $bc$, puis le diviser par d.

| | |
|---|---|
| x | c |
| b | d |

Alors $x = \frac{bc}{a}$

**a. Echelle**

L'échelle est le coefficient de proportionnalité permettant de passer de la distance réelle à la distance sur la carte.

On a: $\text{Echelle} = \frac{\text{distance sur la carte}}{\text{distance réelle}}$

La distance sur la carte et la distance réelle sont proportionnelles.

**b. Pourcentages**

- Pour déterminer K% d'une quantité, on multiplie cette quantité par $\frac{k}{100}$
- Pour traduire une fraction $\frac{a}{b}$ en pourcentage, on peut déterminer l'élément manquant du tableau de proportionnalité suivant :

| | |
|---|---|
| y | a |
| 100 | b |

Alors $y = \frac{a \times 100}{b}$

**Exercice :**

1. Les trois cinquièmes des 80 élèves d'une classe de seconde sont des filles, combien y-a-t-il de filles dans cette classe ?
2. Calculer les $\frac{p}{3}$ de la moitié d'une somme de 120 000f
3. Ecrire les nombres suivants sous la forme de fraction irréductibles

a) $15 \times \frac{3}{4}$ ; b) $\frac{10}{3} \times \frac{28}{45}$ ; c) $\left(\frac{5}{7} - \frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{4} + \frac{3}{2}\right)$ ; d) $\frac{5}{\frac{10}{3}}$ ; $\frac{\frac{5}{10}}{3}$ ; e) $\frac{1+\frac{3}{4}}{1-\frac{3}{4}}$ ; f) $\frac{\frac{3}{5}-\frac{5}{6}}{\frac{1}{4}+\frac{1}{3}}$

4. Vérifier que :

$$\sqrt{1 + 2\sqrt{1 + 3\sqrt{1 + 4\sqrt{1 + 5\sqrt{(1+6)^2}}}}} = 3$$

5. Effectuer les opérations suivantes et donner le résultat en écriture scientifique.

a. $2{,}5 \times 0{,}04 \times 10^6$

b. $(1{,}2 \times 10^5) \times (2{,}2 \times 10^{-5})$

c. $0{,}04 \times 25000 \times 0{,}007$

d. $(2{,}5 \times 10^{-3}) \times (6 \times 10^{-5})$

## CHAPITRE 2 : EQUATION ET INEQUATION DANS R

### I. Equation dans R

### 1. Equation du type $\mathbf{ax + b = 0}$

#### a. Définition :

Une équation est une égalité dans laquelle figure une inconnue généralement noté $x$.

Toute valeur de $x$ qui rend l'égalité vraie est appelée solution de l'équation.

Résoudre une équation, c'est trouver toutes les solutions de l'équation.

#### b. Propriétés :

Lorsqu'on ajoute un même nombre réel ou on multiplie par un même nombre réel non nul chaque même d'une équation, on obtient une nouvelle équation qui a les mêmes solutions que l'équation de départ.

#### c. Résolution d'une équation du type $\mathbf{ax + b = 0}$

Pour résoudre une équation, on doit la transformer en vue d'isoler l'inconnue.

L'équation du type $\mathrm{ax} + \mathrm{b} = 0$ est appelée équation du première degré à une inconnue.

Exemple : résoudre l'équation : $3\mathrm{x} - 1 = 5$

$3\mathrm{x} - 1 = 5 \Rightarrow 3\mathrm{x} = 5 + 1$

$3\mathrm{x} = 6 \Rightarrow \mathrm{x} = \frac{6}{3} = 2$

$\mathrm{x} = 2$

Donc l'ensemble de solution de l'équation $3\mathrm{x} - 1 = 5$ est $\{2\}$

$\mathrm{S} = \{2\}$

Remarque : pour résoudre une équation du type $\mathrm{ax} + \mathrm{b} = 0$ on a :

- Si $\mathrm{a} \neq 0 \Rightarrow \mathrm{S} = \left\{\frac{-\mathrm{b}}{\mathrm{a}}\right\}$ ;
- Si $\mathrm{a} = 0$ et $\mathrm{b} \neq 0 \Rightarrow \mathrm{S} = \emptyset$ ou $\mathrm{S} = \{\,\}$ ;
- Si $\mathrm{a} = 0$ et $\mathrm{b} = 0 \Rightarrow \mathrm{S} = \mathrm{R}$

### 2. Equation du type $(\mathbf{a}x + \mathbf{b})(\mathbf{c}x + \mathbf{d}) = \mathbf{0}$

Pour résoudre une équation du type : $(\mathrm{a}x + \mathrm{b})(\mathrm{c}x + \mathrm{d}) = 0$, On peut résoudre chacune des équations : $\mathrm{a}x + \mathrm{b} = 0$ ou $\mathrm{c}x + \mathrm{d} = 0$

L'ensemble des solutions obtenues est l'ensemble des solutions de l'équation

$(\mathrm{a}x + \mathrm{b})(\mathrm{c}x + \mathrm{d}) = 0$

Exemple : résoudre l'équation

- $(2x - 4)(x - 1) = 0$

$2x - 4 = 0$ ou $x - 1 = 0$

$2x = 4$ ou $x = 1 \Rightarrow x = \frac{4}{2}$ ou $x = 1$

$x = 2$ ou $x = 1$

L'ensemble de solution de l'équation $(2x - 4)(x - 1) = 0$ est $\{1,2\}$

$\mathrm{S} = \{1,2\}$

- $2x(3x + 5) = 0$

$-2x = 0 \; ou \; (3x + 5) = 0$

$x = 0 \; ou \; x = -\frac{5}{3}$

$\mathrm{S} = \left\{0; \frac{-5}{3}\right\}$

- $3x(x - 2) = (x - 2)(x + 6) = 0$

$3x(x - 2) = (x - 2)(x + 6) = 0$

$(x - 2)(3x(x + 6) = 0$

$(x - 2)(3x - x - 6) = 0$

$(x - 2)(2x - 6) = 0$

$x - 2 = 0$ ou $2x - 6 = 0$

$x = 2$ ou $2x = 6 \Rightarrow x = 2$ ou $x = \frac{6}{2}$

$x = 2$ ou $x = 3$

$\mathrm{S} = \{2; 3\}$

### 3. Equation du type $\frac{ax+b}{cx+d} = 0$

Pour résoudre une équation du type $\frac{ax+b}{cx+d} = 0$, on peut procéder comme suite :

- Déterminer la contrainte sur l'inconnue ;
- Résoudre l'équation $ax + b = 0$ ;
- Conclure

Propriété : un quotient est nul si et seulement si, son numérotation est nulle.

Exemple : résoudre l'équation $\frac{4x-6}{x-5} = 0$

$x - 5 \neq 0 \ \rightarrow x \neq 5$

5 ne peut pas être solution de cette équation  alors :

$4x - 6 = 0 \ \rightarrow 4x = 6$

$x = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

$S = \left\{\frac{3}{2}\right\}$ ; $\frac{3}{2} \neq 5$

- Résoudre l'équation $\frac{x}{x+2} + \frac{2x}{x+1} = 0$

$\frac{x(x+1)+2x(x-2)}{(x-2)(x+1)} = 0$

$\frac{x^2+x+2x^2-4x}{(x-2)(x+1)} = 0 \ \Rightarrow \frac{3x^2-3x}{(x-2)(x+1)} = 0$

$(x-2)(x+1) \neq 0 \ \Rightarrow x - 2 \neq 0$ et $x + 1 \neq 0$

$x \neq 2$ et $x \neq -1$

2 et -1 ne doivent pas être solutions de l'équation $\frac{x}{x+2} + \frac{2x}{x+1} = 0$

$3x^2 - 3x = 0 \ \Rightarrow 3x(x-1) = 0$

$3x = 0$ ou $x - 1 = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $x = 1$

$S = \{0; 1\}$ 0 et 1 sont distinctes de 2 et -1.

## II. Inéquation dans R

**Définition** : une inéquation est une inégalité dans laquelle figure une inconnue, généralement noté $x$. Toute valeur de $x$ qui rend l'inégalité vraie est appelée solution de l'inéquation.

Résoudre l'inéquation dans un ensemble (E), c'est trouver toute les solutions qui sont éléments de E.

### 1. Inéquations du type $\mathbf{ax + b \leq 0}$

#### a. Propriétés

- Lorsqu'on ajoute un même nombre réel à chaque membre d'une inéquation, on obtient une nouvelle inéquation qui a les mêmes solutions que l'inéquation de départ.
- Lorsqu'on multiplie par un même nombre réel strictement positifs chaque membre d'une inéquation, on obtient une nouvelle inéquation qui est de même sens et qui a les mêmes solutions que l'inéquation de départ.
- Lorsqu'on multiplie par un même nombre réel strictement négatif chaque membre d'une inéquation, on obtient une nouvelle inéquation qui est de sens contraire et qui a les mêmes solutions que l'inéquation de départ.

Les inéquations ainsi obtenues sont dites équivalentes à l'inéquation initiale.

#### b. Intervalle

- Pour $x < a; \rightarrow x \in ]-\infty; a[$
- Pour $x \leq a; \rightarrow x \in ]-\infty; a]$
- Pour $x > a; \rightarrow x \in ]a; +\infty[$
- Pour $x \geq a; \rightarrow x \in [a; +\infty[$

Exemple **:** résoudre l'inéquation $5x - 3 \leq 0$

- $5x - 3 \leq 0$

$5x \leq 3 \Rightarrow x \leq \frac{3}{5}$

$x \in \left]-\infty; \frac{3}{5}\right]$

- $-2x + 7 < 4x - 1$

$-2x - 4x < -1 - 8 \Rightarrow -6x < -8$

$x > \frac{8}{6} \Rightarrow x > \frac{4}{3}$

$x \in \left]\frac{4}{3}; +\infty\right[$

### 2. Inéquation du type $(\mathbf{ax + b})(\mathbf{cx + d}) \leq \mathbf{0}$

Exemple **:** résoudre l'inéquation :$(4x - 3)(3 - x) \leq 0$

:$(4x - 3)(3 - x) \leq 0$

$4x - 3 \leq 0$ ou $3 - x \leq 0 \ \Rightarrow 4x \leq 3$ ou $-x \leq -3$

$x \leq \frac{3}{4}$ ou $x \geq 3$

Tableau de signe

| $x$ | $-\infty$ | | $3/4$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $4x - 3$ | | - | 0 | + | | + | |
| $3 - x$ | | + | | + | 0 | - | |
| $(4x-3)(3-x)$ | | - | 0 | + | 0 | - | |

$x \in \left]-\infty; \frac{3}{4}\right]$ u$[3; +\infty[$

Remarque : pour résoudre une inéquation du type $p(x) \leq 0$ ou $p(x)$ est un produit de facteur du premier degré, on peut procéder comme suit :

- Etudier le signe de $p(x)$ à l'aide d'un tableau ;
- Lire l'ensemble des solutions de l'inéquation dans ce tableau

### 3. Inéquation du type :$\frac{\mathbf{ax+b}}{\mathbf{cx+d}} \leq \mathbf{0}$

Exemple : résoudre l'inéquation :$\frac{2x-10}{x+2} < 0$

La condition d'existence de la fraction rationnelle $\frac{2x-10}{x+2}$

$x + 2 \neq 0 \ \Rightarrow x \neq -2$

$2x - 10 < 0 \ \Rightarrow 2x < 10 \ \Rightarrow x < \frac{10}{2} \ \Rightarrow x < 5$

Tableau de signe

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $5$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $2x-10$ | | - | ‖ | - | 0 | + | |
| $x+2$ | | - | 0 | + | \| | + | |
| $2x-10$ | | - | ‖ | - | 0 | + | |
| $x+2$ | | - | ‖ | - | \| | + | |

$x \in ]2; 5[$

**4. Système d'inéquation dans R**

Le système d'équation ou d'inéquation est un couple ou triple d'équation ou d'inéquation qui sont lien.

Exemple **:** 1) $\begin{cases} 2x - 5 > x - 3 \\ 7 - x \geq 3 \end{cases}$ 2)$\begin{cases} 2x - 3 \leq -x - 5 \\ 7x + 2 \geq 3x - 1 \end{cases}$

Résolution : $\begin{cases} 2x - 5 > x - 3 \\ 7 - x \geq 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - x > 5 - 3 \\ -x \geq 3 - 7 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x \leq 4 \end{cases}$

L'inéquation de solution du système est de :

$x \in ]2; +\infty[ \cup ]-\infty; 4]$

$x \in ]2; 4]$

**III. Résolution de problème dans R**

Pour résoudre un problème conduisant à une équation ou une inéquation, on peut utiliser les étapes suivantes :

- Analyse de l'énoncé : identification des connues et des inconnues ;
- Traduire en langage mathématique : faire choix des inconnues et faire la mise en équation ou inéquation ;
- Résolution des équations, inéquations ou systèmes ;
- Interprétation des résultats : solutions du problème.

**Exemple:** un fonctionnaire dépense le quart de son salaire pour se loger et le tiers pour se nourrir. Il lui reste alors 50000f

Quel est son salaire ?

**Solution**

1. Soit $x$ le salaire du fonctionnaire.
2. Mise en équation

$$\frac{1}{4}\mathrm{x}+\frac{1}{3}\mathrm{x}+50000=\mathrm{x}$$

3. Résolution

$$\frac{1}{4}\mathrm{x}+\frac{1}{3}\mathrm{x}+50000=\mathrm{x}$$

$$\frac{1}{4}\mathrm{x}+\frac{1}{3}\mathrm{x}-\mathrm{x}=-50000$$

$$\frac{3\mathrm{x}+4\mathrm{x}-12\mathrm{x}}{12}=-50000$$

$$\frac{7\mathrm{x}-12\mathrm{x}}{12}=-50000$$

$$\frac{-5\mathrm{x}}{12}=-50000$$

$$-5\mathrm{x}=-50000\times 12$$

$$-5\mathrm{x}=-600000$$

$$\mathrm{x}=\frac{-600000}{-5}=120000$$

$$\mathrm{x}=120.000\mathrm{f}$$

120.000 est le salaire du fonctionnaire.

**Exemple** : un père dispose de 1600f pour ses trois enfants, il veut que l'ainé ait 200f de plus que le second et que le second ait 100f de plus que le dernier.

Quel est la somme de chacun ?

## CHAPITRE 3 : POLYNOMES ET FONCTIONS RATIONNELLES

### 1. Généralité sur les polynômes

Considérons la fonction numérique définit par :

$f(x) = (1 - 2x)(x^3 + 3) + 2x(x^3 - 4) + x^2 + 1$

Développons et réduisons f(x)

$f(x) = x^3 + 3 - 2x^4 - 6x + 2x^4 - 8x + x^2 + 1$

$f(x) = x^3 + x^2 - 14x + 4$

Le coefficient du monôme le plus haut degré est 1

f est un polynôme de degré 3.

#### a. Définition

Toute fonction numérique f de variation réel x définit par :

$f(x) = a_n x^n + a_{n+1} x^{n-1} + \cdots a_0 x^0$ est appelée polynôme de degré n

Ou $a_n; a_{n-1;} a_{n-2} \dots a_0$ désignent les coefficients de f

Et $n; n-1; n-2; \dots..0$ sont des degrés du polynôme f

$a_n x^n$ est appelé monôme ou terme du plus haut degré de coefficient $a_n$ et de degré n.

On appelle polynôme, toute somme algébrique des monômes et d'une constante.

Exemple : $f(x) = x^3 + x^2 - 14x + 4$ , est un polynôme de degré $n = 3$ et f est noté généralement :

$"d^0 f" = n \Rightarrow d^o f = 3$

### 2. Racine d'un polynôme

On appelle racine d'un polynôme f, tout nombre réel α tel que $f(\alpha) = 0$. Autrement dit, pour déterminer la racine évidente d'une fonction f ceci consiste à résoudre tout simplement l'équation $f(x) = 0$

Exemple **1** : on considère une fonction f définit par :

$f(x) = 2x^2 + x - 3$ .

Montrons que le réel 1 est la racine évidente de f

Solution : montrons que 1 est la racine évidente de f

1 est la racine de f, si et seulement si $f(1) = 0$

$f(x) = 2x^2 + x - 3 \Leftrightarrow f(1) = 2(1)^2 + 1 - 3$

$2 + 1 - 3 = 3 - 3 = 0$

$f(1) = 0 \Rightarrow$ 1 est la racine évidente de f

Exemple **2** : déterminer les racines de f définie par :

$f(x) = x^2 + x - 2$

**Solution**

Résolvons l'équation $f(x) = 0$ pour déterminer les racines évidentes de f

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0$

$x^2 - x + 2x - 2 = 0$

$x(x - 1) + 2(x - 1) = 0$

$(x - 1)(x + 2) = 0$

$(x - 1) = 0$ ou $(x + 2) = 0 \Rightarrow x = 1$ ou $x = -2$

=>1et -2 sont les racines évidentes de

### 3. Produit des polynômes

Soient f et g deux fonctions distinctes définies par :

$$\begin{cases} f(x) = \quad x^3 + 3x + 2 \\ g(x) = 3x^3 - 2x^2 + x - 1 \end{cases}$$

Posons $V(x) = f(x) \times g(x)$

Le produit de deux polynômes f et g est un polynôme V tel que : $V = f \times g$ et le degré

De $\frac{V}{d^0V} = d^0(f \times g)$

$d^0V = d^0f + d^0g$ C'est-à-dire $d^0V = 3 + 3 = 6$

Déterminons le polynôme V.

$V(x) = f(x) \times g(x) = (x^3 + 3x + 2)(3x^3 - 2x^2 + x - 1)$

$= 3x^6 - 2x^5 + x^4 - x^3 + 9x^4 - 6x^3 + 3x^2 - 3x - 4x^2 + 2x - 2$

$V(x) = 3x^6 - 2x^5 + 10x^4 - x^3 - x^2 - x - 2$

**4. Somme de polynômes**

La somme de deux polynômes f et g est un polynôme noté $(f + g)$. Le degré de $(f + g)$ est inférieur ou égal au plus grand degré des nombres de degré de f et de g. (égal lorsque le $d^0 f = d^0 g$).

Exemple : $d^0(f + g) = 3$

**5. Polynôme du second degré de type : $ax^2 + bx + c$**

**a. Forme canonique**

La forme canonique nous sert à factoriser les polynômes du second degré :

Soit $p(x) = ax^2 + bx + c$ ; $(a, b, c) \in R^3$

- On met premièrement a en facteur

$$p(x) = \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{d}\right)$$

- On cherche le début du carré de $x^2 + \frac{b}{a}x$ :

$$x^2 + \frac{b}{a}x = x\left(x + \frac{b}{a}\right)$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

- Remplaçons $x^2 + \frac{b}{a}x$ dans $p(x)$ par son début de carré :

$$p(x) = a\left[\!\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{d}\right]\!\right]$$

$$= a\left[\!\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{4a * c}{4a^2}\right]\!\right]$$

$$p(x) = a\left[\!\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right)\right]\!\right]$$

Cette forme finale de $p(x)$ est appelée la forme canonique

Exemple: mettre sous la forme canonique les polynômes suivants :

$f_1(x) = 4x^2 - 12x + 10$

$f_2(x) = x^2 - 7x + 6$

$f_3(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + 1$

**Solution**

Forme canonique :

$f_1(x) = 4x^2 - 12x + 10$

$= 4\left(x^2 - \frac{12x}{4} + \frac{10}{4}\right)$

$= 4\left(x^2 - 3x + \frac{5}{2}\right)$

Le début de carré de $(x^2 - 3x)$ :

$x^2 - 3x = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2$

$\Rightarrow f(x) = 4\left[\!\left[\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{5}{2}\right]\!\right]$

$4\left[\!\left[\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + \frac{5}{2}\right]\!\right]$

$= 4\left[\!\left[\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{9-10}{4}\right)\right]\!\right] \Rightarrow 4\left[\!\left[\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9+10}{4}\right]\!\right]$

$f_1(x) = 4\left[\!\left[\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\right]\!\right]$

$\Rightarrow f_1(x) = 4\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + 1$

$f_2(x) = x^2 - 7x + 6$

Début de carré : $x^2 - 7x = \left(x - \frac{7}{2}\right)^2 - \left(\frac{7}{2}\right)^2$

$a = 1$

$f_2(x) = \left[\!\left[\left(x - \frac{7}{2}\right)^2 - \left(\frac{7}{2}\right)^2 + 6\right]\!\right]$

$= \left[\!\left[\left(x - \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{49}{4} + 6\right]\!\right]$

$= \left[\!\left[\left(x - \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{49+24}{4}\right]\!\right]$

$f_2(x) = \left[\!\left[\left(x - \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{25}{4}\right]\!\right]$

$f_3(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + 1 = \frac{1}{2}(x^2 - 2x + 2)$

Début de carré: $x^2 - 2x = (x-1)^2 - 1$

$f_3(x) = \frac{1}{2}[\![(x-1)^2 - 1 + 2]\!] = \frac{1}{2}[\![(x-1)^2 + 1]\!]$

$f_3(x) = \left(\frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{2}\right)$

**b. Factorisation d'un polynôme du second degré**

- **Produits remarquables :**

Pour tous nombres réels a ; on a :

1) $(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + 2ab + b^2$
2) $(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a^2 - 2ab + b^2$
3) $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$ : différence de deux carrés

Exemple : factoriser

$p(x) = x^4 - 4x^2 + 4 = (x)^2 + 2 * 2 * x + 2^2$

$(x+2)(x+2)$

$R(x) = 16x^4 - 81 = (4x^2 - 9)(4x^2 + 9)$

$(2x-3)(2x+3)(4x^2+9)$

$f(x) = 9x^2 - 12x + 4$

$= (3x)^2 - 2 \times 3x \times 2 + 2^2$

$= (3x-2)(3x-2)$

Pour la forme canonique :

$p(x) = a\left[\!\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right)\right]\!\right]$

Posons $d = \frac{b}{2a}$ et $\beta = -\left(\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)$

On obtient : $p(x) = a[\![(x+\beta)^2 + \beta]\!]$

- Si $\beta > 0$ ; alors le polynôme p n'admet pas de racine évidente car $(x+d)^2+\beta$ est supérieur ou à $\beta$ ; donc strictement supérieur à zéro pour toutes les valeurs x. P n'est pas factorisable, sinon il le serait pour un polynôme de degré 1 et donc admettrait une racine évidente ;
- Si $\beta < 0$ alors on factorise le polynôme P en utilisant la différence de deux carrés pour factoriser $(x+d)^2+\beta$ et on déduit les racines de P.
- Si $\beta = 0$ alors $p(x) = a(x+d)^2$ et P admet une racine double (une seule racine :$-\alpha$).

Exemple: factoriser les polynômes suivants:

$p(x) = x^2 - 7x + 6$

$f(x) = x^2 - 2x + 1$

$g(x) = 2x^2 + x + 5$

Solution **:**

$p(x) = x^2 - 7x + 6$

$\Rightarrow p(x) = \left[\!\left[\left(x-\frac{7}{2}\right)^2 - \left(\frac{7}{2}\right)^2 + 6\right]\!\right]$

$\left[\!\left[\left(x-\frac{7}{2}\right)^2 - \frac{49}{4} + 6\right]\!\right] = \left[\!\left[\left(x-\frac{7}{2}\right)^2 - \frac{49+24}{4}\right]\!\right]$

$\left[\!\left[\left(x-\frac{7}{2}\right)^2 - \frac{25}{4}\right]\!\right]$ ; $\beta = -\frac{25}{4} < 0$

$\Rightarrow p(x) = \left[\!\left[\left(x-\frac{7}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2\right]\!\right]$

$= \left[\!\left[\left(x-\frac{7}{2}\right) - \frac{5}{2}\right]\!\right]\left[\!\left[\left(x-\frac{7}{2}\right) + \frac{5}{2}\right]\!\right]$ d'après la différence du carré

$= \left(x-\frac{12}{2}\right)\left(x-\frac{2}{2}\right)$

$p(x) = (x-6)(x-1)$

### 6. Etude de signe d'un polynôme du second degré

Pour étudier le signe d'un polynôme, on procède de la manière suivante :

- Donner l'ensemble de définition de la fonction ;
- Chercher les racines du polynôme ;
- Etablir un tableau de signe si le polynôme admet des racines. Sinon, on considère le signe du monôme du plus haut degré ;

- On interprète le tableau de signe.

Exemple : étudions le signe des polynômes suivants :

1) $f(x) = x^2 + 2x - 3$  2) $p(x) = x^2 - 10x + 25$  3) $f(x) = x^2 + 3x - 2$

Solution

*1)* $f(x) = x^2 + 2x - 3$

$Df = R$ (domaine de définition de $f$)

Déterminons les racines

$f(x) = 0 \; alors \; x^2 + 2x - 3 = 0$

D'après la forme canonique

$f(x) = [\![(x+1)^2 - 1 - 3]\!] \Rightarrow (x+1)^2 - 4$

Donc $f(x) = (x+1)^2 - 4 = 0 \Rightarrow (x+1)^2 - (2)^2 = 0$

$\Rightarrow (x + 1 + 2)(x + 1 - 2) = 0 \Rightarrow x + 3 = 0 \; ou \; x - 1 = 0$

$\Rightarrow x = -3 \; ou \; x = 1$

-3 et 1 sont les racines de $f$

Tableau de signe

| $x$ | $-\infty$ | -3 | | 1 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x+3$ | - | 0 | + | | + |
| $x-1$ | - | | - | 0 | + |
| $f(x)$ | + | | - | | + |

Interprétation du tableau de signe

$\forall x \in ]-\infty; -3[ \cup ]1; +\infty[; f(x) > 0$

$\forall x \in ]-3; 1[; f(x) < 0$

$\forall x \in \{-3; 1\}; f(x) = 0$

## 7. Fraction rationnelle

### a. Définition

Toute fonction numérique de la forme $\frac{f}{\mathrm{q}}$ ou $f$ et q est deux polynômes, est appelée fraction rationnelle. C'est-à-dire $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ ; avec $h(x)$ est la fonction rationnelle.

### b. Domaine de définition

La fraction rationnelle $h(x)$ a pour ensemble de définition le complémentaire dans $R$ de l'ensemble des racines de $Q(x)$

Exemple: déterminons le domaine de définition des fonctions rationnelles suivantes :

$h(x) = \frac{x-3}{x-1}$; $U(x) = \frac{x^2-3x+1}{x^2+2}$; $h(x) = \frac{x^2-4x+1}{x-3^2}$

Solution

- $h(x) = \frac{x-3}{x-1}$ si et seulement si $x - 1 \neq 0\ alors\ x \neq 1$

$Dh = R'^{\{1\}} ou\ Dh = ]-\infty; 1[ \cup ]1; +\infty[$

- $U(x) \ni ssi\ x^2 + 2 \neq 0 \Rightarrow x^2 \neq -2$ impossible

$Du = R]-\infty; +\infty[$

- $f(x) \ \ni ssi\ 3 - x^2 \neq 0 \ \Rightarrow \left(\sqrt{3}\right)^2 - x^2 \neq 0$

$= \left(\sqrt{3} - x\right)\left(\sqrt{3} + x\right) \neq 0 \ \Rightarrow \sqrt{3} - x \neq 0\ ou \sqrt{3} + x \neq 0$

$x \neq \sqrt{3}\ ou\ x \neq -\sqrt{3}$

$Df = \left]-\infty; -\sqrt{3}\right[ \cup \left]-\sqrt{3}; \sqrt{3}\right[ \cup \left]\sqrt{3}; +\infty\right[$

### c. Simplification des fractions rationnelles

Pour simplifier une fraction rationnelle, on procède de la manière suivante :

- Donner l'ensemble de définition ;
- Factoriser le numérateur et le dénominateur puis simplifier la fonction.

Exemple : soit $f(x) = \frac{x^2-4}{x+2}$ ; simplifions $f(x)$

$f(x) \ni ssi\ x + 2 \neq 0 \Rightarrow x \neq -2$

$Df = ]-\infty; -2[ \cup ]-2; +\infty[$

$\forall x \in Df; f(x) = \frac{x^2-4}{x+2} = \frac{(x-2)(x+2)}{x+2} = x - 2$

$f(x) = x - 2$

**d. Etude de signe d'une fonction rationnelle**

On considère une fonction rationnelle $f$ définit par $f(x) = \frac{x^2-x-6}{9-x^2}$

- Donner la condition d'existence de $f$
- Etudier le signe de $f$

Solution

- Condition d'existence de $f$.

$f(x) \ni ssi\ 9 - x^2 \neq 0 \ \Rightarrow (3 - x)(3 + x) \neq 0$

$3 - x \neq 0\ ou\ 3 + x \neq 0 \Rightarrow x \neq 3\ ou\ x \neq -3$

$Df => ]-\infty; -3[ \cup ]-3; 3[ \cup ]3; +\infty[$

- Etude de signe de $f$

$\forall x \in Df, f(x) = 0 \ \Rightarrow \frac{x^2-x-6}{9-x^2} = 0$

$x^2 - x - 6 = 0$

$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 6 = 0$

$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - 6 = 0$

$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1-6*4}{4} = 0$

$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} = 0 \ \Rightarrow \ \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 = 0$

$\left(x - \frac{1}{2} - \frac{5}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2} + \frac{5}{2}\right) = 0 \Rightarrow \left(x - \frac{6}{2}\right)\left(x + \frac{4}{2}\right) = 0$

$(x - 3)(x - 2) = 0 \ \Rightarrow x - 3\ ou\ x + 2 = 0$

$x = 3\ ou\ x = -2$

Tableau de signe

| $x$ | $-\infty$ | | $-3$ | | $-2$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x+3$ | | - | 0 | + | \| | + | \|\| | + | |
| $x+2$ | | - | \|\| | - | 0 | + | \|\| | + | |
| $x-3$ | | - | \|\| | - | \| | - | 0 | + | |
| $f(x)$ | | - | \|\| | + | \| | - | \|\| | + | |

$\forall x \in ]-\infty; -3[ \cup ]-2; 3[; f(x) > 0$

$\forall x \in ]-3; -2[ \cup ]3; +\infty[; f(x) < 0$

$\forall x \in \{-3; -2; 3\}; f(x) = 0$

Remarque : pour une fraction irrationnelle (avec variable sous radical), il est nécessaire que l'expression sous le radical soit positif ou nulle

### e. Domaine de définition d'une fonction irrationnelle

Pour donner le domaine de définition d'une fonction irrationnelle, on prend ce qui est sous le radical ≥ 0.

Exemple: donner le domaine de définition des fonctions irrationnelles suivantes :

a) $f(x) = 2x\sqrt{4-x}$
b) $h(x) = \sqrt{\frac{x^2-9}{x}}$
c) $g(x) = \sqrt{-x}$
d) $S(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{2x-1}$

Solution

Domaine de définition

$f(x) \ni ssi\ 4 - x \geq 0\ alors - x \geq -4\ alors\ x \leq 4$

$x \in ]-\infty; 4]$

$Df = ]-\infty; 4]$

## CHAPITRE 4 : EQUATION DE DROITES

### 1. Définition

Dans un plan muni d'un repère $(o, i, j)$ :

- Toute droite $(D)$ a une équation de la forme $ax + by + c = 0$, avec $(a, b\ et\ c)$ des nombres réels et $(a, b) \neq (0{,}0)$ .
- Réciproquement, toute équation de la forme $ax + by + c = 0$ ou $(a, b\ et\ c)$ des nombres réels et $(a, b) \neq (0{,}0)$, est une équation d'une droite.

Exemple: soient $A(2; -3) et\ B(-4; 3)$;

$M\binom{x}{y}$ est un point du plan tel que $M \in (AB) \Rightarrow \overrightarrow{AM}\ et\ \overrightarrow{AB}\ sont\ colinéaire$:

Or $\overrightarrow{AM}\binom{x-2}{y+3}\ et\ \overrightarrow{AB}\binom{-4-2}{3+3} \Rightarrow \overrightarrow{AB}\binom{-6}{6}$

$M \in (AB) \Rightarrow -6(x-2) - 6(y+3) = 0$

$\Rightarrow\ -6x + 12 - 6y - 18 = 0$

$\Rightarrow 6x - 6y - 6 = 0\ ou\ 6x + 6y - 6 = 0$

### 2. Propriétés

Lorsqu'on ajoute un même nombre ou on multiplie par un même nombre différent de zéro, chaque membre de l'équation, on obtient une équation qui a les mêmes solutions que l'équation de départ.

### 3. Recherche de solution d'une équation de droite

Soit $(E)$ une équation de droite de la forme : $2x + 3y - 20 = 0$

$2x + 3y = 20$ on donne a $x\ et$ à $y$ une valeur arbitraire :

$x = 0$ par exemple

Si $x = 0 \Rightarrow 2 \times 0 + 3y = 20 \Rightarrow 3y = 20 \Rightarrow y = \frac{20}{3}$

Si $y = 0 \Rightarrow 2x + 3 \times 0 = 20 \Rightarrow 2x = 20 \Rightarrow x = \frac{20}{2} \Rightarrow x = 10$

$\left(10; \frac{20}{3}\right)$ est une solution de l'équation $(E)$

## 4. Equation d'une droite

### a. Recherche d'une équation de droite

<u>Activité</u> : le plan est muni du repère$(o, i, j)$, on donne les points :$A$: $\binom{-1}{4}$ $et\ B\binom{3}{-2}$

Recherchons une équation de la droite$(AB)$.

$M\binom{x}{y}$ est un point du plan tel que $M \in (AB)$

$\overrightarrow{AM}\ et\ \overrightarrow{AB}$ sont colinéaires

Or $\overrightarrow{AM}\binom{x+1}{y-1}$ $et\ \overrightarrow{AB}\binom{3+1}{-2-4} \Rightarrow \overrightarrow{AB}\binom{4}{-6}$

$D'$ où $\overrightarrow{AM}\ \in (AB) \Rightarrow -6(x+1) - 4(y-4) = 0$

$-6x - 6 - 4y + 16 = 0$

$-6x - 4y + 10 = 0$

On obtient une équation de droite du premier degré dans $R \times R$: $(E)$

$-6x - 4y + 10 = 0$

$(E)$: est une équation de la droite $(AB)$.

- Propriétés

Dans le plan muni d'un repère

- Toute droite à une équation de la forme :$Px + qy + r = 0$ ( $p$ et $q$ n'étant pas tous nuls) ;
- Toute équation de la forme $px + qy + r = 0$ ($p$ et $q$ n'étant pas tous nuls) est l'équation d'une droite.

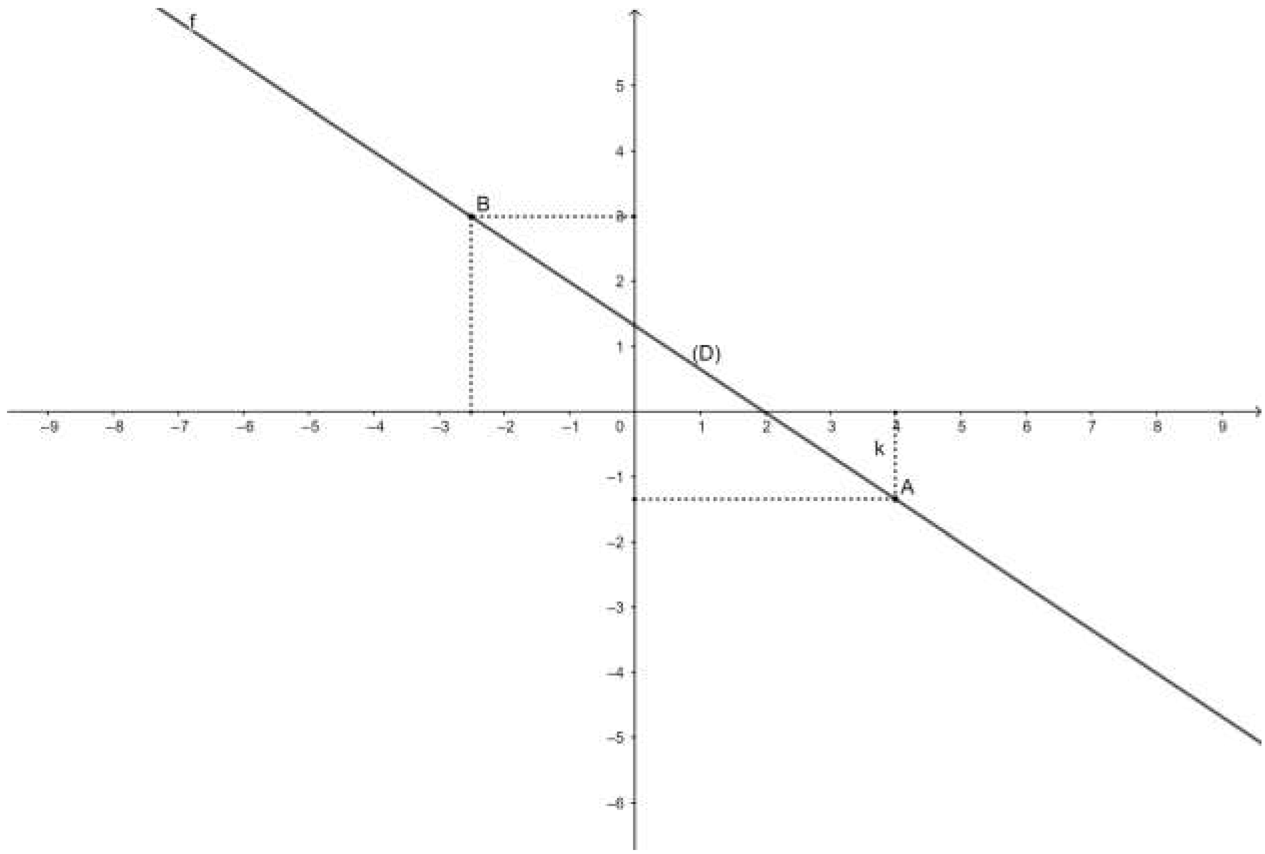
## 5. Construction d'une droite

### a. Recherche des couples de coordonnées de points d'une droite

Le plan est muni du repère $(o, i, j)$ ;

$(D)$ est la droite d'équation : $2x + 3y - 4 = 0$

- Trouver l'ordonnée du point $A$ d'abscisse 4 ;
- Trouver l'abscisse du point $B$ d'ordonnée 3
- A l'aide de cette équation on exprime $y$ en fonction de $x$ ou $x$ en fonction $y$ et on trouve les couples de coordonnées de plusieurs points de la droite $(D)$.




**b. Construction d'une droite dont on connait une équation**

Le plan est muni du repère$(o, i, j)$. On veut construire la droite $(D)$ d'équation :

$x - 2y + 3 = 0$ pour cela, il suffit de trouver deux solutions de l'équation donnée, ce sont les couples de coordonnées de deux points $A$ et $B$ de la droite.

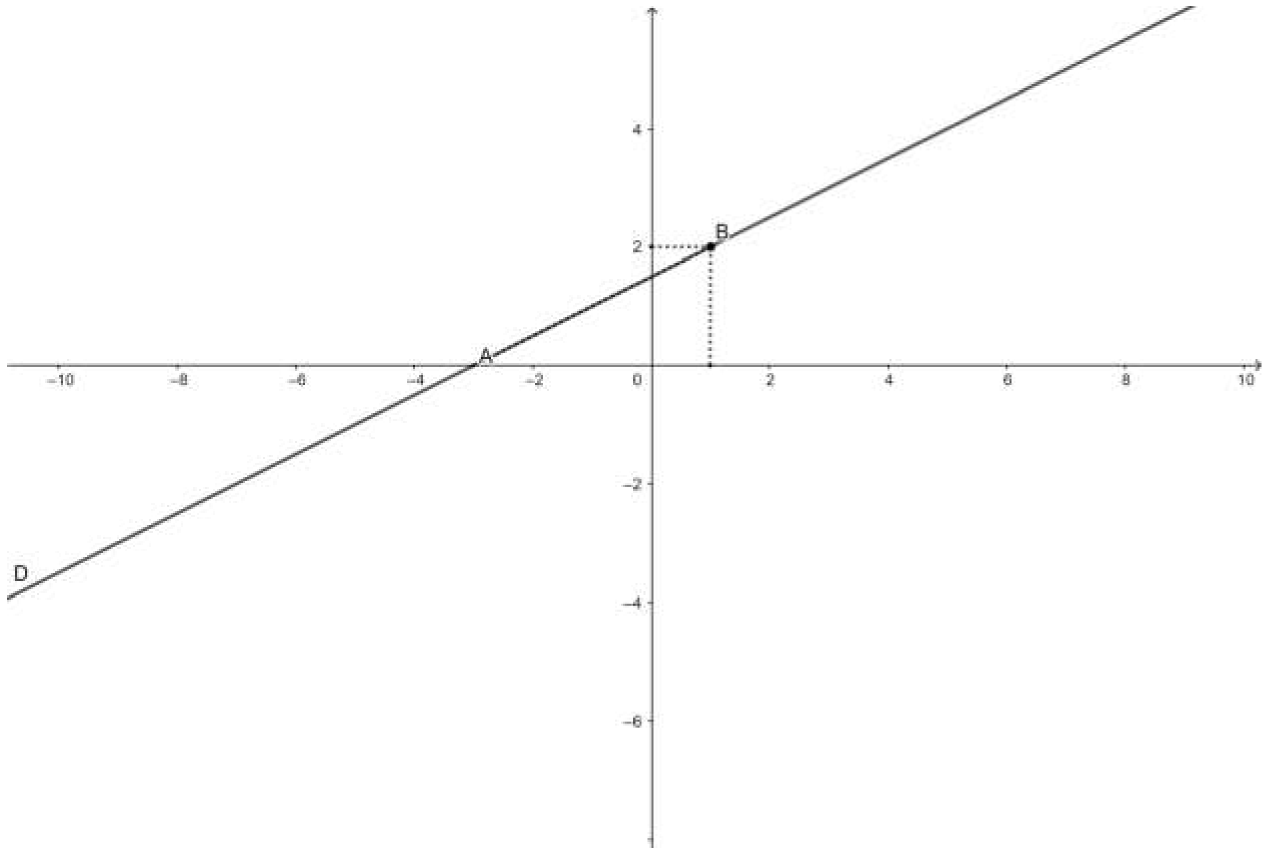
$(D)$: on a $x - 2y + 3 \Rightarrow x - 2y = -3$

Pour $x = -3 \Rightarrow y = 0$

Pour $x = 1 \Rightarrow y = 2$

| | A | B |
|---|---|---|
| $x$ | -3 | 1 |
| $y$ | 0 | 2 |

On obtient les points $A(-3; 0)\ et\ B(1; 2)$



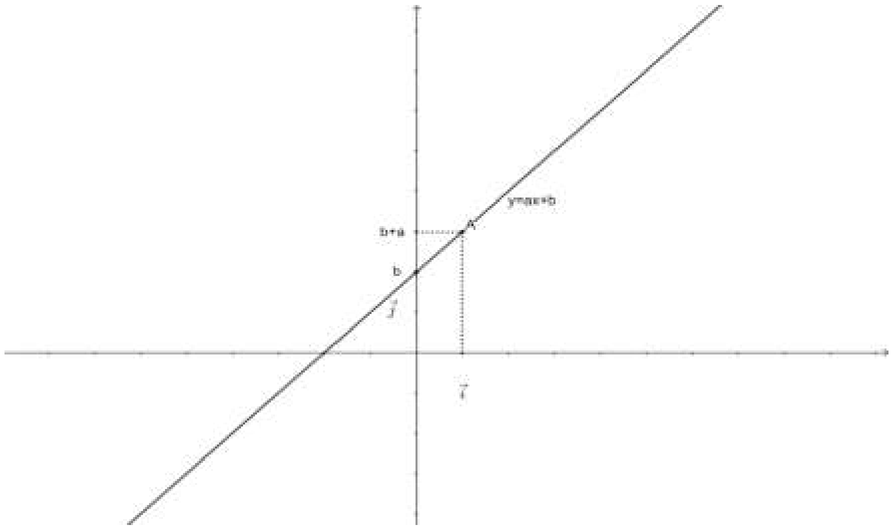

<u>Remarque</u> : on pourra choisir judicieusement $x$ et $y$ afin d'obtenir des points faciles à placer dans le plan muni du repère $(o, i, j)$ (nombres entiers relatifs de préférence).

On peut aussi choisir l'une des coordonnées égale à zéro $(0)$. On obtient ainsi le couple de coordonnées du point d'intersection de la droite $(D)$ avec l'un des axes.

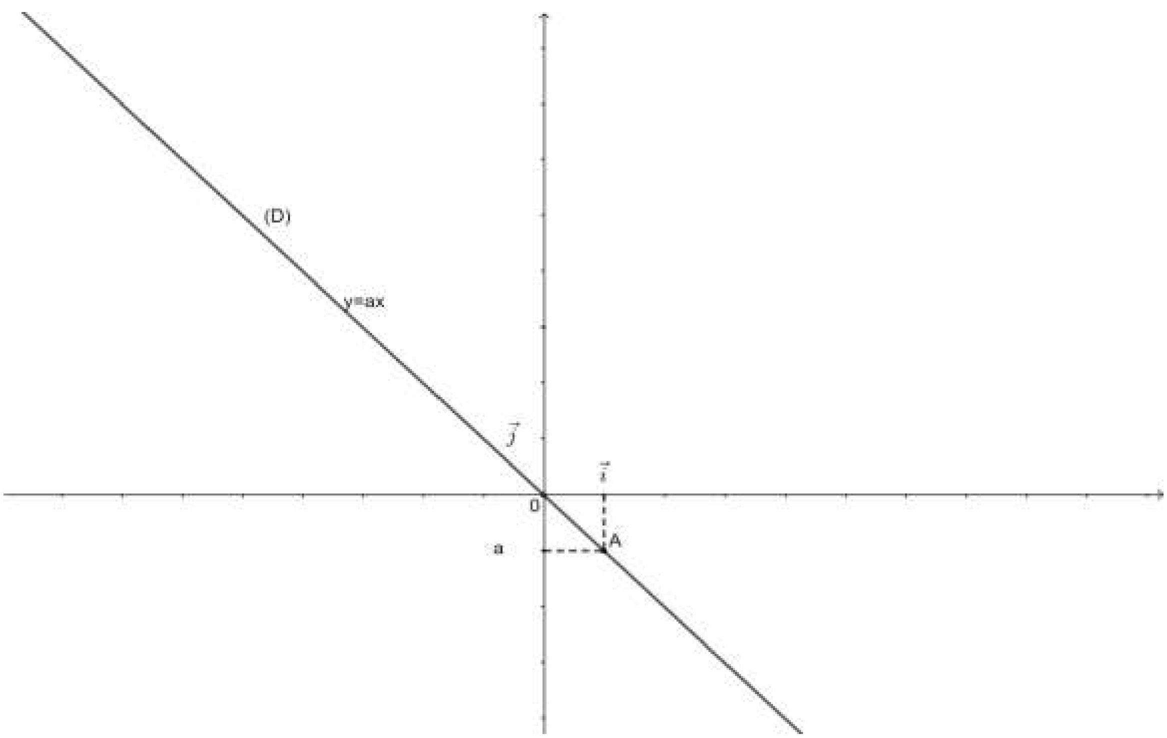
**6. Coefficient directeur d'une droite**

**a. Propriétés :**

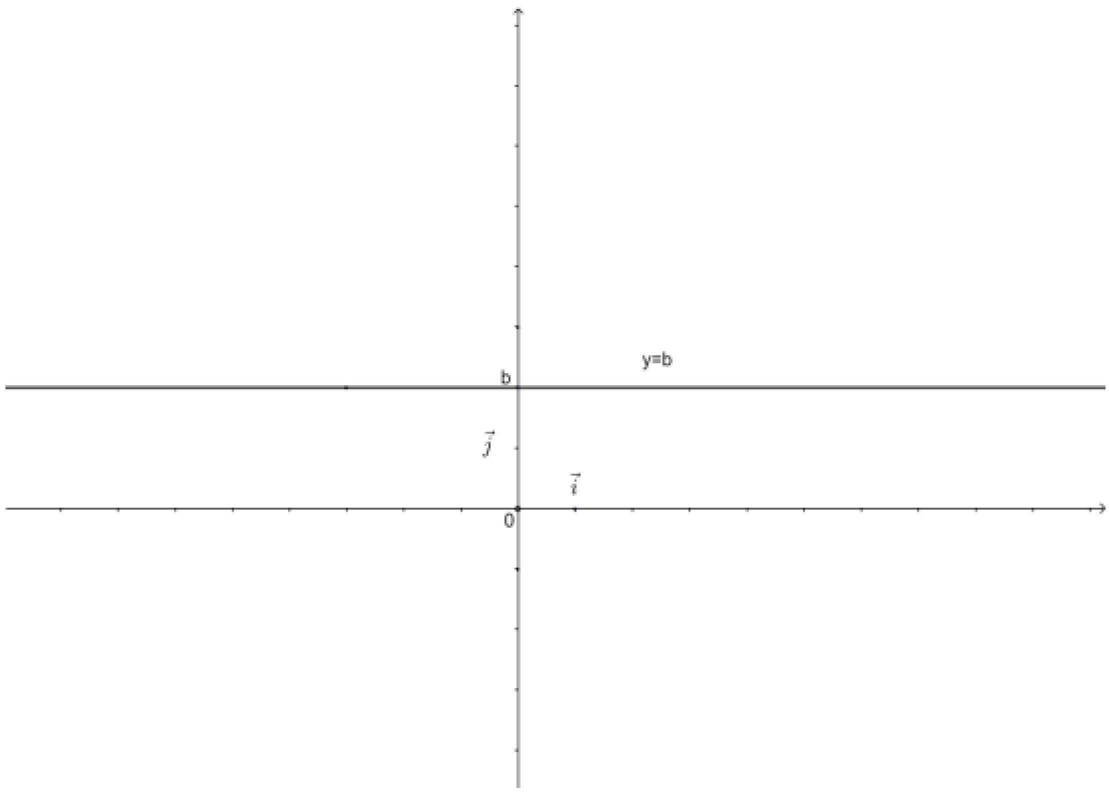
- Une droite $(D)$ non parallèle à l'axe des ordonnés a une équation de la forme : $y = ax + b$ ; a est le coefficient directeur de la droite $(D)$, $b$ est son ordonnée à l'origine .
- Une droite parallèle à l'axe des ordonnées a une équation de la forme : $x = k$. Elle n'a ni coefficient directeur ni ordonnée à l'origine.



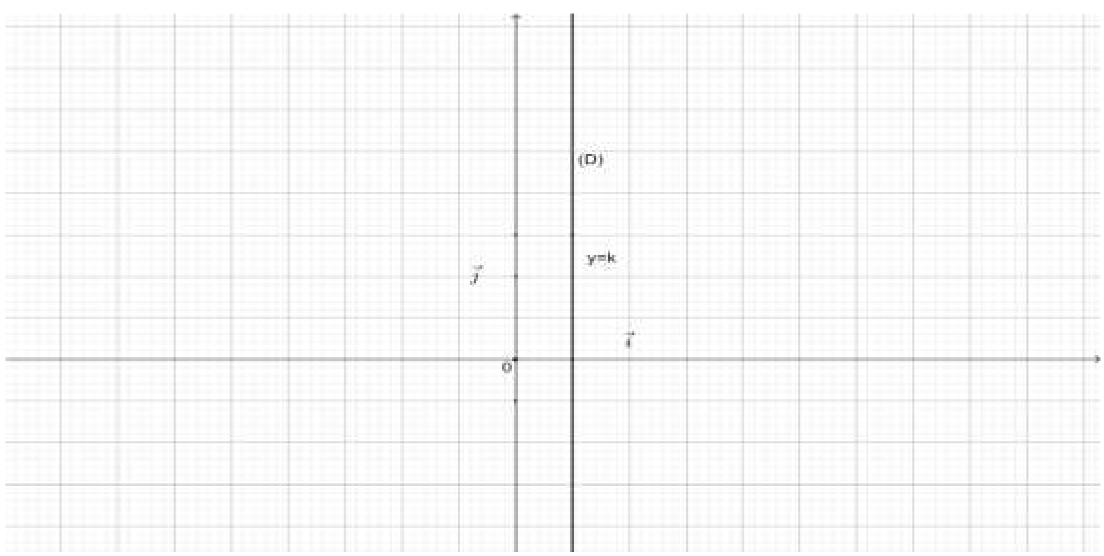

Coefficient directeur *a* ; vecteur directeur : $\overrightarrow{BA(1,a)}$




Coefficient directeur *a* ; vecteur directeur $\overrightarrow{OA}(1,a)$




Coefficient directeur $O$ vecteur directeur $\overrightarrow{OI}(1,0)$




Pas de coefficient directeur ; vecteur directeur $\overrightarrow{OJ}(0,1)$

**b. Remarque**

- Une droite d'équation $y = ax + b$ est nécessairement sécante à l'axe des ordonnées.
- Dans un repère orthonormé, lors que le coefficient directeur d'une droite est positif, il est aussi appelé pente de la droite.

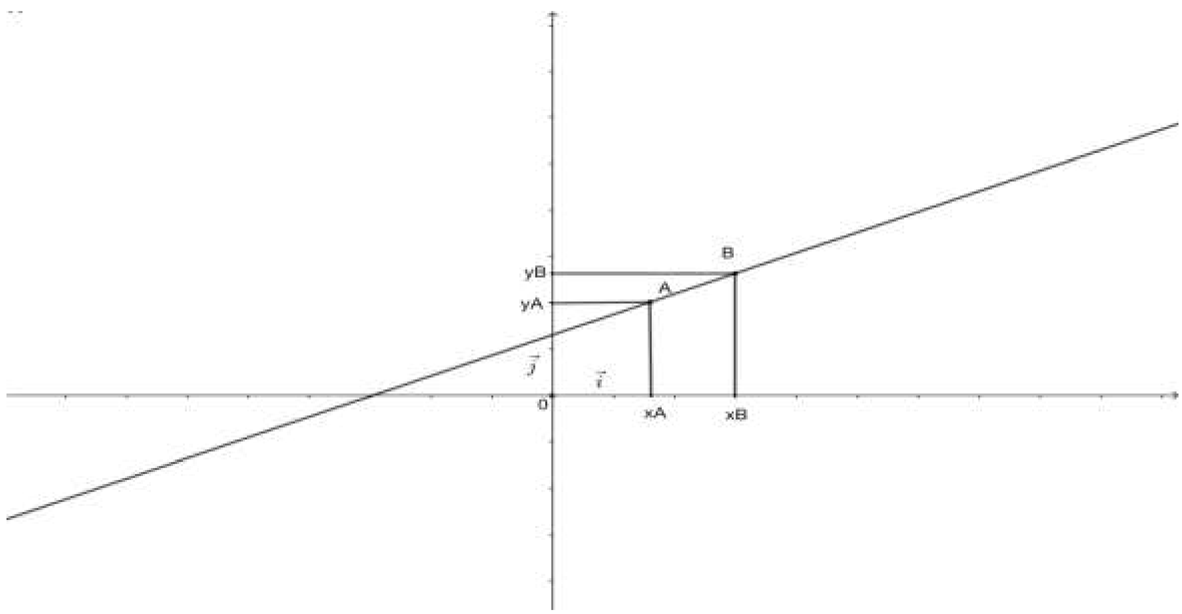
a. Calcul du coefficient directeur d'une droite

Le plan est muni du repère $(o, i, j)$ ; $(D)$ est la droite d'équation $y = ax + b$

$A\binom{x_A}{y_A}$ $et$ $B\binom{y_B}{y_B}$ sont deux points de la droite $(D)$

Donc : $y_A = ax_A + b \; et \; y_B = ax_B + b$

$\Rightarrow y_B - y_A = ax_{\mathrm{B}} + b - (ax_A + b) = a(x_B - x_A)$

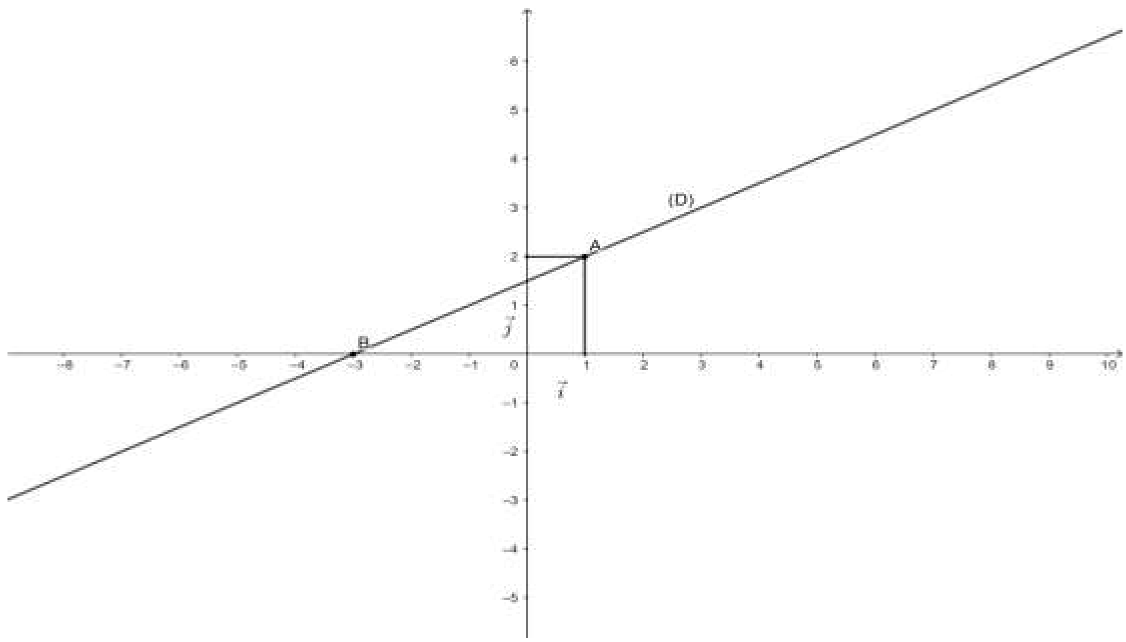



La droite $(CD)$ n'est pas parallèle à $(\overrightarrow{oj})$. Car elle a une équation du type :

$y = ax + b; donc\colon x_B \neq x_A$ alors $a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$

**c. Coefficient directeur et équation d'une droite**

Le plan est muni du repère $(o, i, j)$. Cherchons une équation de droite $(D)$ passant par les points $A\binom{1}{2}$ $et$ $B\binom{-3}{0}$




La droite $(D)$ n'étant pas parallèle à l'axe $(\overrightarrow{oj})$ est une équation de la forme :$y = ax + b$

Le coefficient directeur de la droite $(D)$ est :$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{0-2}{-3-1} = -\frac{2}{-4} = \frac{1}{2}$

$a = \frac{1}{2}$

Alors :$y = \frac{1}{2}x + b$

$A(1;2)$ appartient à $(D)$ ; (1,2) est solution de l'équation $y = \frac{1}{2}x + b$ (pour $x = 1 \; et \; y = 2$

On a donc $2 = \frac{1}{2} \times 1 + b \Rightarrow b = 2 - \frac{1}{2} \Rightarrow b = \frac{4-1}{2} = \frac{3}{2}$

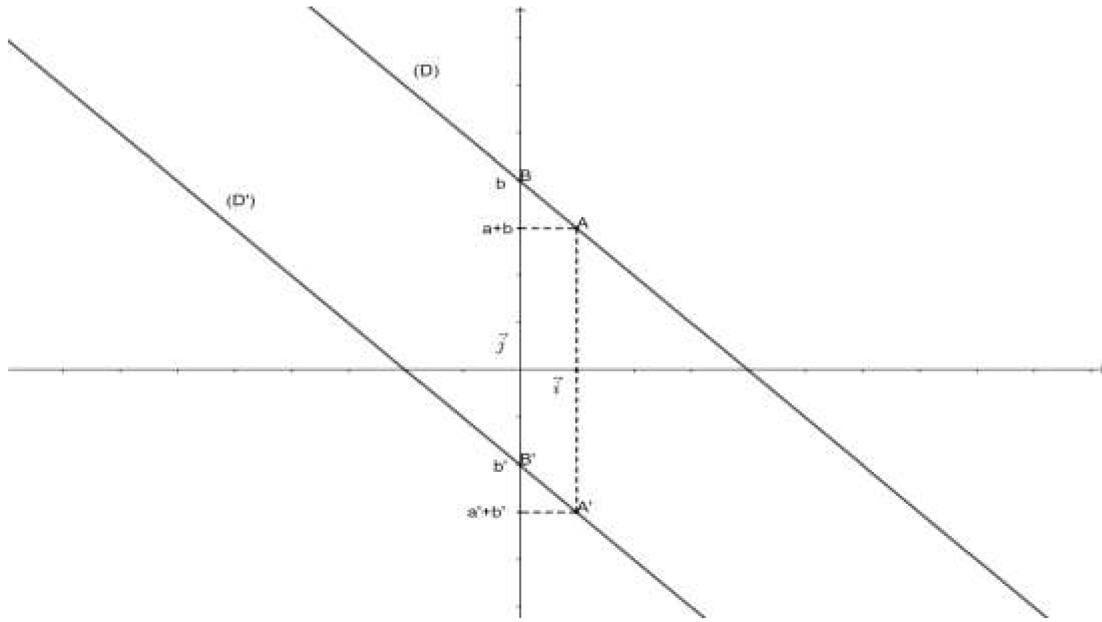
$b = \frac{3}{2}$ d'où $(D)$ a pour équation : $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$

### 7. Position relative de deux droites

#### a. Droite parallèles

Le plan est muni du repère$(o, i, j)$. $(D)$ est une droite d'équation $y = ax + b$ et $(D')$ est une droite d'équation :$y = a'x + b'$

Cherchons une condition pour que $(D)$ soit parallèle à$(D')$.$\big((D) \; // \; (D')\big)$.




$A\ et\ B$ sont les points de la droite $(D)$ d'abscisses respectives 1 et 0.

$A'\binom{1}{a'+b'} et\ B'\binom{0}{b}$

On sait que : $\big((D)\ //\ (D')\big) \rightarrow \overrightarrow{BA}\ et\ \overrightarrow{B'A'}$ ont la même direction. Or $\overrightarrow{BA}\binom{1}{a}\ et\ \overrightarrow{B'A'}\binom{1}{a\prime}$

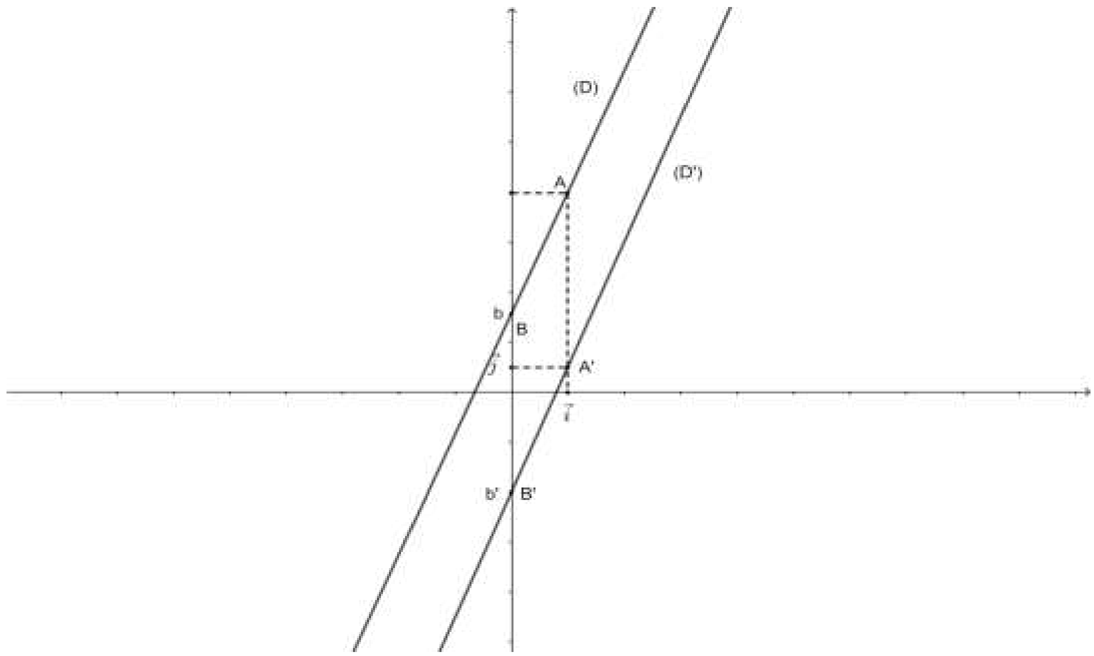
D'où $\big((D)\ //\ (D')\big) \Rightarrow 1 \times a' - 1 \times a = 0$

$\big((D)\ //\ (D')\big) \Rightarrow a = a'$

**Propriétés**

Le plan est muni du repère $(o, i, j)$; les droites $(D)$ et $(D')$ ont pour coefficients directeurs a et a'.

$\big((D)\ //\ (D')\big) \Rightarrow a = a'$




**b. Droites perpendiculaires**

Le plan est muni du repère$(o, i, j)$.

$(D)$ est la droite d'équation : $y = ax + b$

$(D')$ est la droite d'équation : $y = a'x + b'$

Cherchons une condition pour que $(D)$ soit perpendiculaire à $((D').(D') \perp$ (D')).

$A\ et\ B$ sont les points de la droite $(D')$ d'abscisses respectives 1 et 0 :$A\ \binom{1}{a+b}\ et\ B\binom{0}{b}$

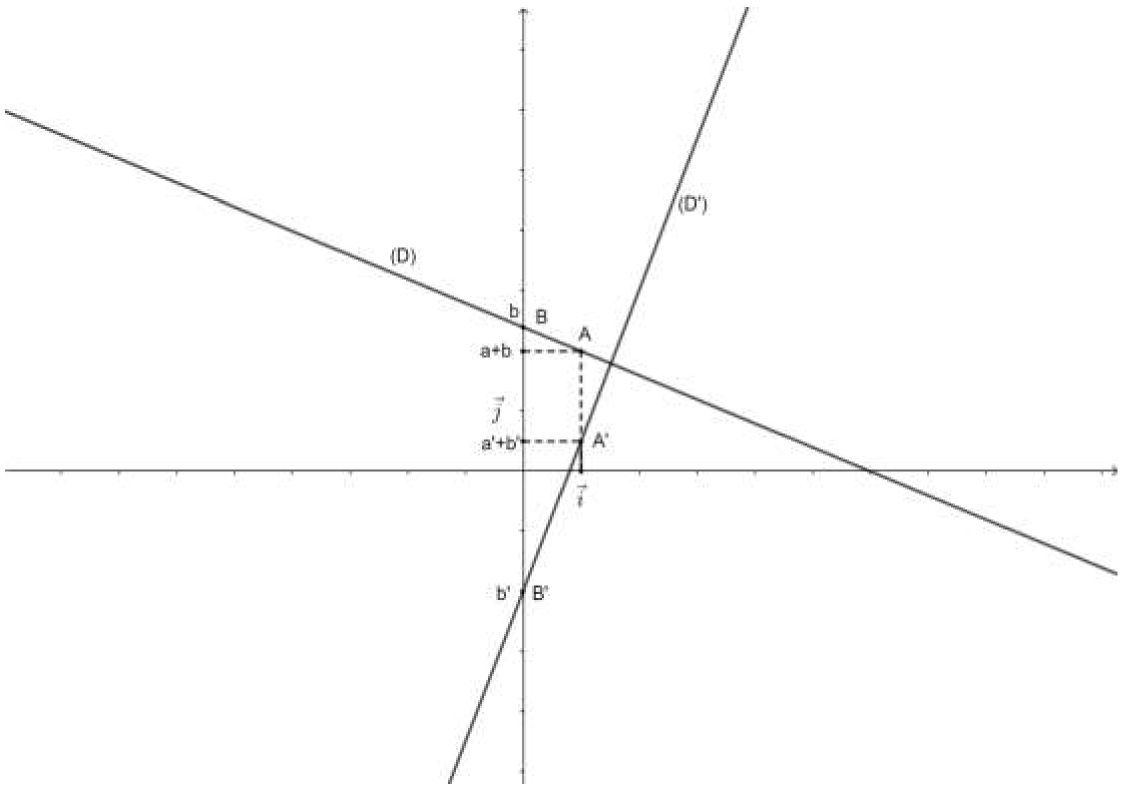
$A'\ et\ B'$ sont les points de la droite $(D')$ d'abscisses respectives 1 et 0 : $A'\binom{1}{a'+b'}\ et\ B\binom{0}{b'}$

On a : $(AB) \perp (A'B')$ si et seulement si $\overrightarrow{BA} \perp \overrightarrow{B'A'}$

Or $\overrightarrow{BA}\binom{1}{a}\ et\ \overrightarrow{B'A'}\binom{1}{a'}$

$D'$où $(D) \perp (D')$ si et seulement si $1 \times 1 + a \times a' = 0$

$(D) \perp (D')$ si et seulement si $a \times a' = -1$


(D')
(D)
b
B
A
a+b
$\vec{j}$
a'+b'
A'
$\vec{i}$
b'
B'

CHAPITRE 5 : SYSTEMES LINEAIRES

1. **Systèmes de deux équations dans $\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R}$**

a. **Définition :**

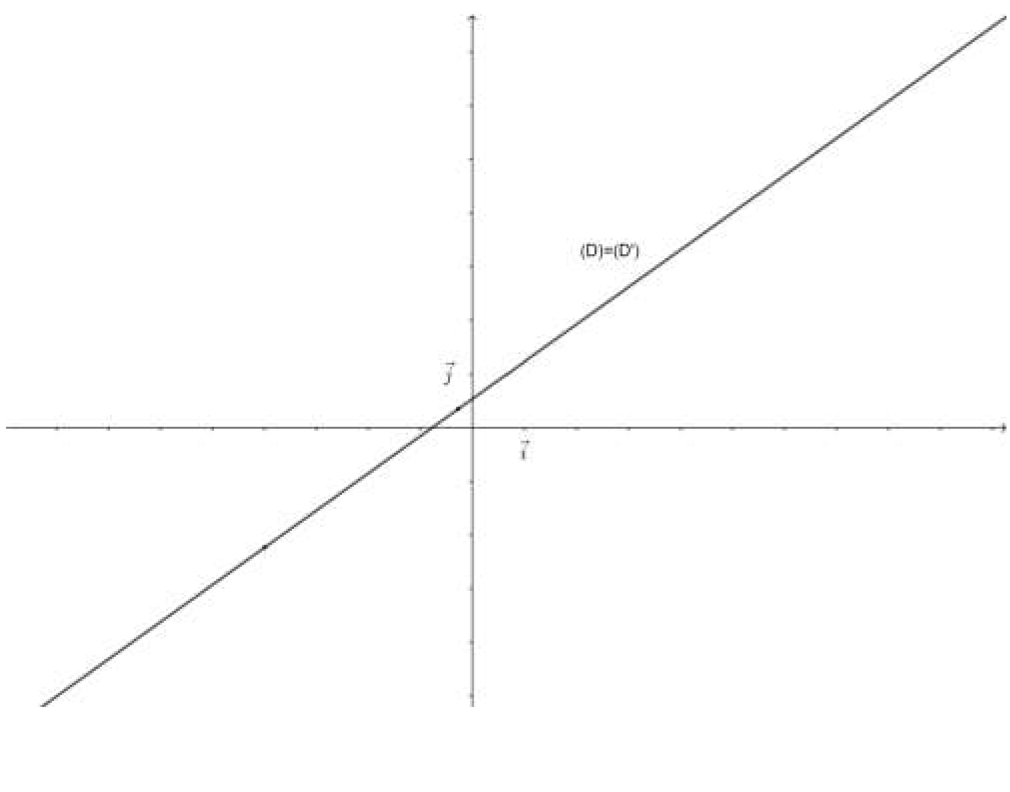
- Un système de la forme $\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$ frome de deux équations d'inconnues $x\ et\ y$ ou a; $b, c; a', b'et\ c'$) sont des nombres réels données ; est appelé **système de deux équations du premier degré dans $\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R}$.**
- Résoudre un système, c'est trouver dans $R \times R$ toutes les solutions communes aux équations qui composent ce système.
- Deux systèmes sont équivalents lorsqu'ils ont le même ensemble de solution

b. **Méthode de résolution**

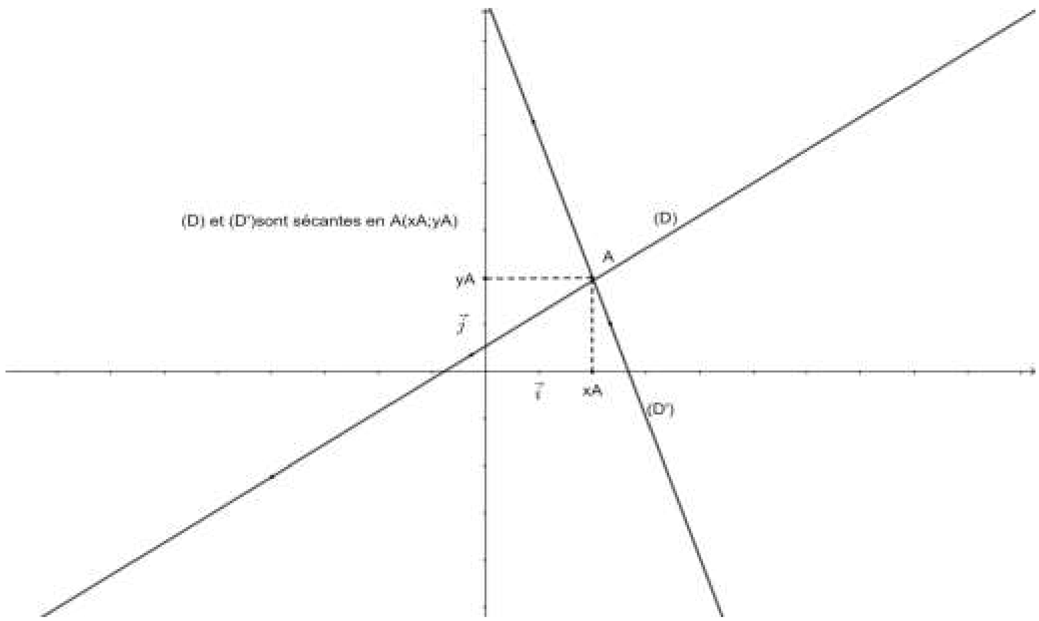
❖ **Résolution graphique**

Pour résoudre graphiquement le système d'équation $\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$ on peut procéder de la manière suivante

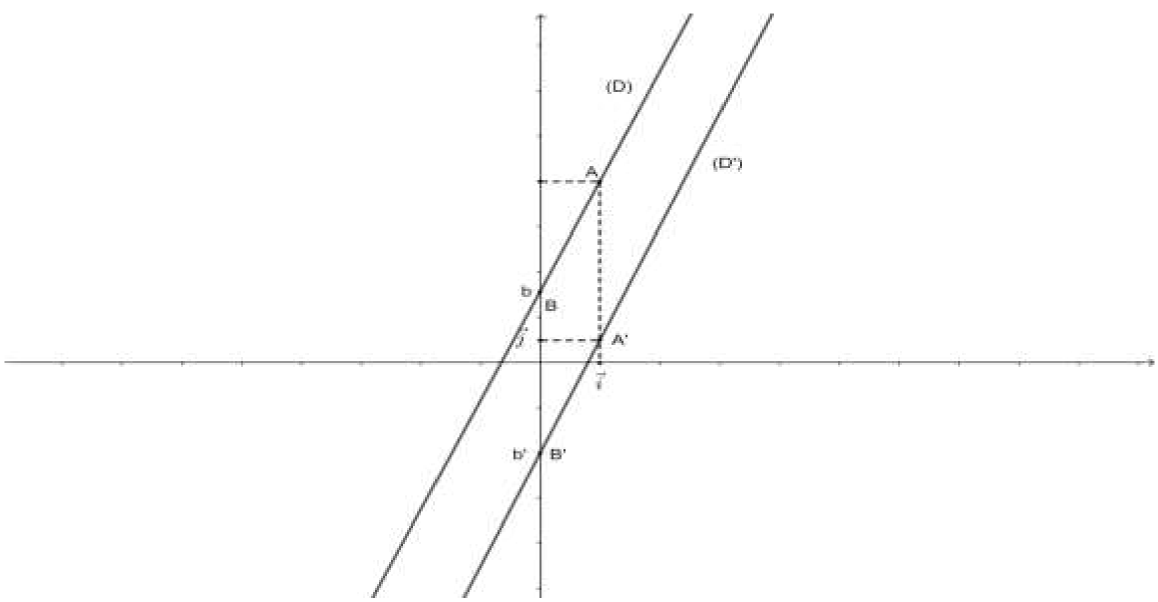
- Munir le plan d'un repère $(o, i, j)$;
- Construire les droites $(D) et\ (D')$ d'équations respectives $ax + bx + c = 0$ et $a'x + b'x + c' = 0$ ;
- Déterminer les couples de coordonnées des points communs aux droites $(D) et\ (D')$ ;
- Conclure en utilisant le tableau ci-dessous.



Le système(S) a une infinité de solution.




Le système(S) a une solution unique $(x_{A\,;}\, y_A)$




Le système(S) n’a pas de solution.

Exemple : résoudre graphiquement les systèmes suivants :

$(S_1): \begin{cases} 2x - 6y + 3 = 0 \\ -4x + 12y - 21 = 0 \end{cases}$ $(S_2): \begin{cases} -x - \frac{1}{2}y - 2 = 0 \\ 4x + y + 8 = 0 \end{cases}$

- **Résolution par combinaison**

Pour le système d'équation $(S): \begin{cases} 4x + 3y = 1 \\ 3x - 2y + 12 = 0 \end{cases}$

Solution : interprétation graphique

Dans le plan muni du repère $(o, i, j)$ on a :

$(D)$ la droite d'équation $4x + 3y = 1 \Rightarrow 4x + 3y - 1 = 0$ (1)

$(D')$ la droite d'équation $3x - 2y + 12 = 0$ (2)

Les droites $(D) et\ (D')$ ont pour coefficients directeurs respectifs :$-\frac{4}{3}\ et \frac{3}{2}$

:$-\frac{4}{3} \neq \frac{3}{2}$ , alors $(D) et\ (D')$ sont sécantes en un point $A$.

On en déduit que le système $(S)$ a une solution unique qui le couple de coordonnées du point $A$.

$\begin{cases} 4x + 3y - 1 = 0 \\ 3x - 2y + 12 = 0 \end{cases}$ Méthode par combinaison

- Eliminons $x$ : multiplions l'équation (1)par 3 et l'équation (2)par -4 : on obtient :

$\begin{matrix} 3\times \\ -4\times \end{matrix} \begin{cases} 4x + 3y - 1 = 0 \\ 3x - 2y + 12 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 12x + 9y - 3 = 0 \quad (1) \\ \underline{-12x + 8y - -48 = 0 \quad (2)} \\ (1) + (2) = 0 + 17y - 51 = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow 17y - 51 = 0 \Rightarrow y = \frac{51}{17} = 3$

$y = 3$

- Eliminons $y$ : multiplions l'équation (1)par 2 et l'équation (2)par 3 et on obtient :

$\begin{matrix} 2\times \\ 3\times \end{matrix} \begin{cases} 4x + 3y - 1 = 0 \\ 3x - 2y + 12 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8x + 6y - 2 = 0 \\ \underline{9x - 6y + 36 = 0} \\ (1) + (2) = 17x + 0 + 34 = 0 \end{cases}$

$17x = -34 \Rightarrow x = -\frac{34}{17} = -2$

$x = -2$

Le couple $(-2;3)$est solution des équations $(1)$et $(2)$ dons le système $(S)$ a une solution unique qui est le couple $(-2;3)$

- **Résolution par substitution**

Résoudre le système $(S)$: $\begin{cases} x+5y-9=0 \\ 7x+5y-3=0 \end{cases}$

$(D)$: $x+5y-9=0 \quad (1)$

$(D')$: $7x+5y-3=0 \quad (2)$

Les droites $(D) et\ (D')$ ont pour coefficients directeurs respectifs :$-\frac{1}{5} \neq -\frac{7}{5}$ , alors $(D) et\ (D')$ sont sécantes en un point $A$.

Le système $(S)$ admet une solution unique qui est le couple de coordonnées du point $A$.

$\begin{cases} x+5y-9=0 \quad (1) \\ 7x+5y-3=0 \quad (2) \end{cases}$ Méthode par substitution

De (1) exprimons $x$ en fonction de $y$.

$(1)$: $x=9-5y \quad (1')$

Dans l'équation(2)replaçons $x$ par son expression pour déterminer la valeur de $y$

$(2)$: $7(9-5y)+5y-3=0 \Rightarrow 63-35y+5y-3=0$

$\Rightarrow -30y+60=0 \Rightarrow y-\frac{60}{-30}=2\ alors$

$y=2$

Remplaçons $y$ par sa valeur dans (1)pour déterminer la valeur de $x$

$(1)$: $x=9-5\times 2 \Rightarrow x=9-10=-1$

$x=-1$

Le couple $(-1;2)$est la solution des équations $(1)$ et $(2)$donc le système $(S)$ a une solution unique qui est le couple $(-1;2)$.

- **Systèmes de trois équations à deux inconnues**

Pour résoudre graphiquement le système d'équation $(S)$:

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \\ a''x + b''y + c'' = 0 \end{cases}$$

On peut procéder de la façon suivante :

- Munir le plan d'un repère
- Construire les droites $(D), (D') et\ (D'')$ d'équation respectives $ax + by + c = 0$ ; $a'x + b'y + c' = 0$ et $a''x + b''y + c'' = 0$
- Conclure, en utilisant les résultats suivants :

✓ Si les droites $(D), (D') et\ (D'')$ sont confondues, alors le système (S) a une infinité de solution

✓ Si les droites $(D), (D') et\ (D'')$ concourantes en un point $A\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$, alors le système $(S)$ a une solution unique $(x_A; y_A)$ ;

✓ Dans tous les autres cas, le système $(S)$ n'admet pas de solution

Exemple : résoudre les systèmes suivants

$$S_1\begin{cases} 2x + y - 4 = 0 \\ 6x + 3y = 6 \\ 4x + 2y = -6 \end{cases} \quad S_2\begin{cases} x - y = 0 \\ 2x - 3y = -2 \\ 7x + y = 16 \end{cases} \quad S_3\begin{cases} 5x + 6y = 9 \\ 4x + 6y = 6 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$$

❖ **Changement d'inconnues**

Dans certains cas, on peut se ramener à un système d'équation du premier degré en effectuant un changement d'inconnues.

Exemple : résoudre le système d'équation $(S)$: $\begin{cases} x^2 - y = 2 \\ 3x^2 + y = 14 \end{cases}$

Posons $X = x^2$ et on désigne par $(S')$ le système $\begin{cases} X - y = 2 \\ 3X + y = 14 \\ X \geq 0 \end{cases}$

$(x, y)$ solution de $(S)$ équivaut à $(XY)$ solution de $(S')$

$$(S'): \begin{cases} X - y = 2 & (1) \\ 3X + y = 14 & (2) \\ X \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X = 2 + \mathrm{y} & (1)' \\ 3(2 + y) + y = 14 & (2)' \end{cases}$$

(2)' $6 + 3y + y = 14 \Rightarrow 4y = 8 \Leftrightarrow y = \frac{8}{4} = 2$

(1)' $X = 2 + y = 2 + 2 = 4 \Rightarrow X = 4\ or\ X = x^2$

$x = 2\ ou\ x = -2$

Alors $(S)$ a deux solutions qui sont les couples $(-2; 2)$ ou $(2; 2)$.

**2. Systèmes d'inéquation du premier de degré dans $R \times R$**

**a. Définition : a, b et c sont des nombres réels donnés.**

On appelle inéquation du premier degré dans $\times R$ , une inéquation ayant l'une des forme suivantes, où $x$ $et$ $y$ sont les inconnues :

$ax + by + c < 0$

$ax + by + c > 0$

$ax + by + c \leq 0$

$ax + by + c \geq 0$

Exemple : $2x - 3y + 2 > 0$ $et$ $x - y \leq 0$ sont des inéquations du premier degré dans $R \times R$

**b. Résolution graphique**

Propriétés : le plan est muni du repère $(o, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$

Soit $(D)$ la droite d'équation : $ax + by + c = 0$

La droite $(D)$ partage le plan en trois parties :

- La droite $(D)$ et les deux demi-plans ouverts $(P_1) et (P_2)$ de frontière $(D)$
- Les couples de coordonnées $(x, y)$ des points de $(D)$ vérifient : $ax + by + c = 0$ ;
- Les couples de coordonnées $(x, y)$des points d'un demi-plan vérifient : $ax + by + c < 0$
- Les couples de coordonnées $(x, y)$ des points de l'autre demi-plan vérifient : $ax + by + c > 0$

Remarque :

- Dans chacun de ces deux demi-plans ouverts, l'expression $(ax + by + c)$ garde un signe constant.
- Un demi-plan fermé est un demi-plan contenant la frontière $(D)$

Exemple: représentons graphiquement les solutions de l'inéquation $(I): x + 5y - 9 > 0$

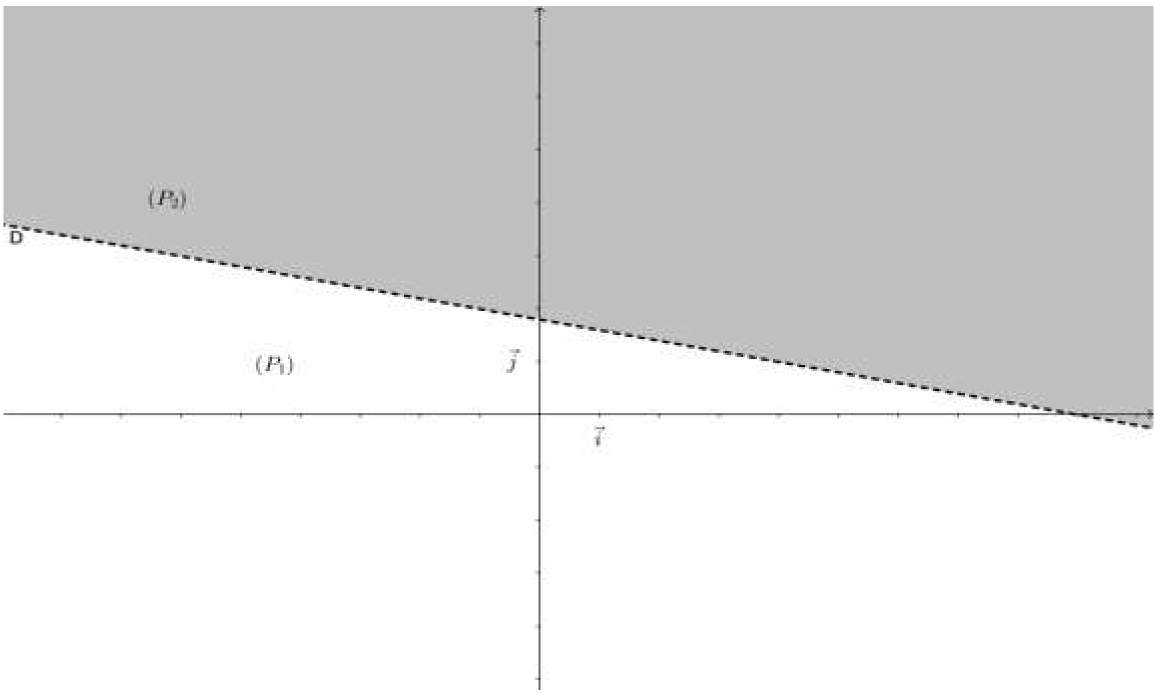
Le plan est muni du repère $(o, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

- Désignons par $(D)$ la droite d'équation $x + 5y - 9 = 0$. La droite $(D)$ partage le plan en trois parties : $(D)$; le demi-plan $(P_1) et (P_2)$ de frontière $(D)$.
- O est un point qui n'appartient pas à $(D)$.

$O\binom{0}{0} \Leftrightarrow s + 5y - 9 = 0 + 5 * 0 - 9 = -9 \Leftrightarrow -9 < 0$

$(P_1)$ est un demi-plan ouvert pour $x + 5y - 9 < 0$.

Alors, le demi-plan ouvert de ( $P_2$) qui ne contient pas le point $O$ représente graphiquement l'ensemble des solutions de $I$




**c. Système de deux inéquations à deux inconnues**

Résoudre graphiquement le système d'inéquation $(S)$: $\begin{cases} x - y > 0 \\ 2x + 3y < 10 \end{cases}$

Solution

- Le plan est muni du repère $(o, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$

Désignons par :

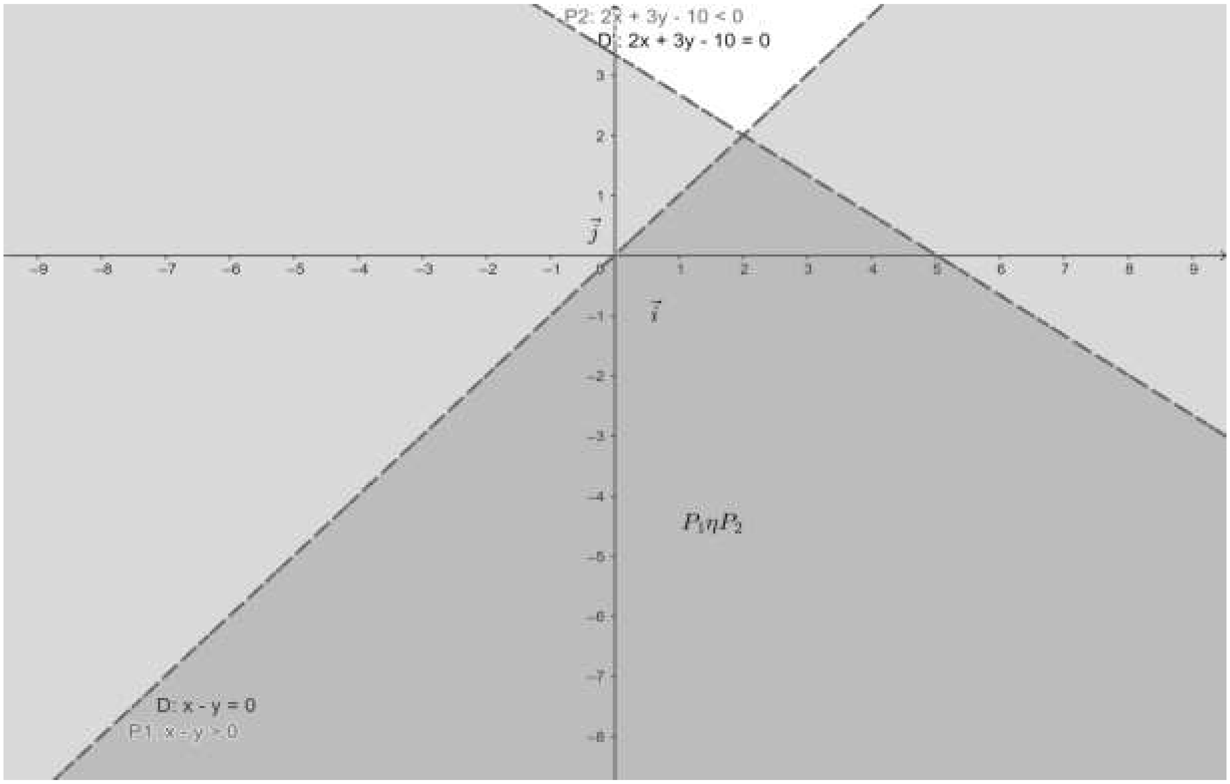
$(D)$ la droite d'équation : $x - y = 0$

$(D'$ ) la droite d'équation $2x + 3y - 10 = 0$

$(P_1)$ , le demi-plan d'inéquation $x - y > 0$

( $P_2$) , le demi-plan d'inéquation $2x + 3y - 10 < 0$

Construisons les droites$(D)$ $et$ $(D')$.




- Déterminons la valeur numérique de l'expression $(x - y)$, pour le point de coordonnées $\binom{1}{0}$ $de\ I$ et on obtient 1. Donc $(P_1)$ est le demi-plan ouvert de frontière $(D)$ contenant le point $I$.
- Déterminons la valeur numérique de l'expression $(2x + 3y - 10)$, p le point de coordonnées $(O, O)$de $O$ ; on obtient -10. Donc $(P_2)$ est le demi-plan ouvert de frontière $(D')$ contenant le point $O$.
- L'intersection des deux demi-plans ouverts $(P_1) et (P_2)$ (partie colorée), représente graphiquement des solutions de $(S)$.

### d. Système de trois inéquations à deux inconnues

Résoudre graphiquement le système d'inéquation ;

$$(S): \begin{cases} 4x + 3y - 1 < 0 \\ 3x - 2y + 12 > 0 \\ x + 5y + 4 > 0 \end{cases}$$

Solution

Désignons par :

$(D)$ la droite d'équation : $4x + 3y - 1 = 0$

$(D')$ la droite d'équation : $3x - 2y + 12 = 0$

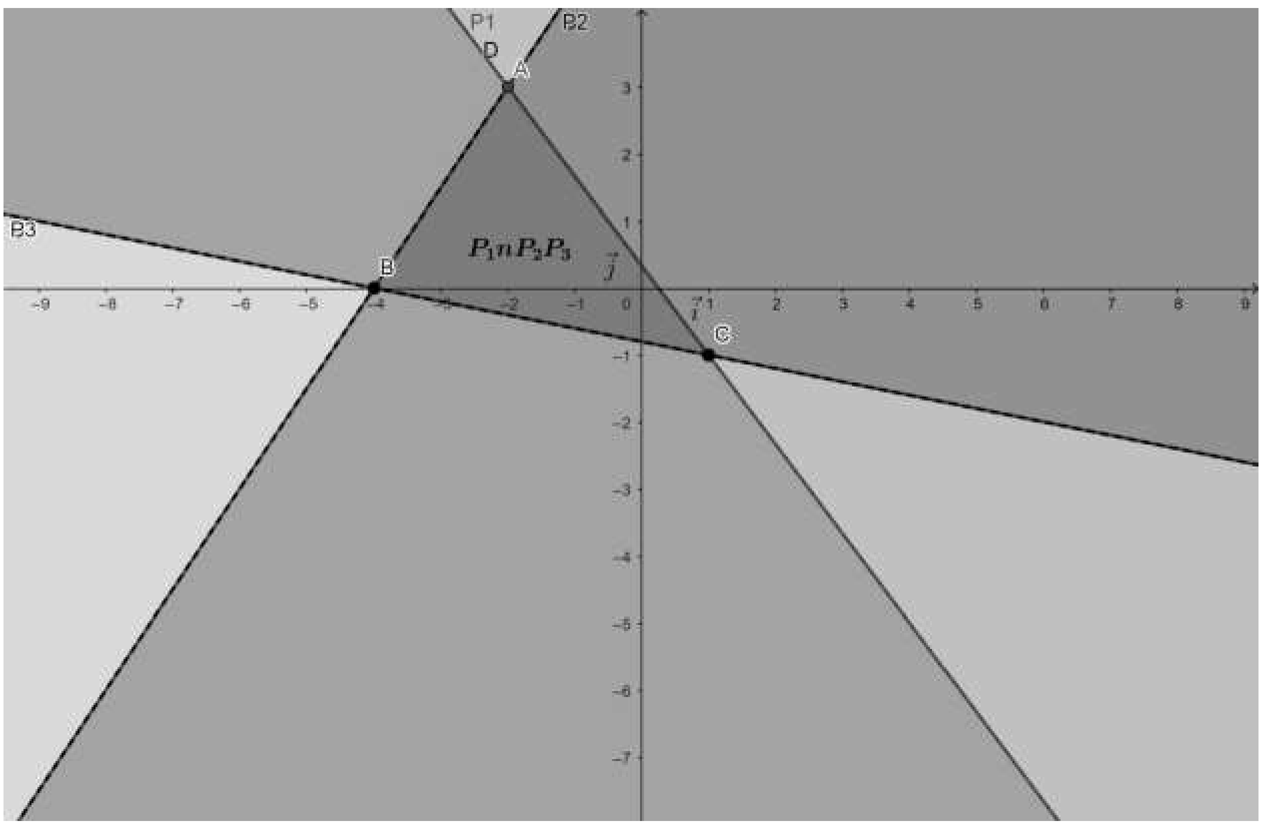
$(D'')$ la droite d'équation : $x + 5y + 4 = 0$

$(P_1)$ le demi-plan d'inéquation $4x + 3y - 1 < 0$

$(P_2)$ le demi-plan d'inéquation $3x - 2y + 12 > 0$

$(P_3)$ le demi-plan d'inéquation $x + 5y + 4 > 0$

Construisons les droites : $(D), (D') et\ (D'')$.




- Pour $0\binom{0}{0}$ $de\ 4x + 3y - 1$ ; on obtient -1, donc $(P_1)$ est le demi-plan de frontière $(D)$contenant 0.
- Pour $0\binom{0}{0}$ $de\ 3x - 2y + 12$ ; on obtient 12, donc $(P_2)$ est le demi-plan de frontière $(D')$contenant 0.

- Pour $0\binom{0}{0}$ $de\ x + 5y + 4$ on obtient 4, donc $(P_3)$ est le demi-plan ouvert de $(D'')$contenant le point 0.
- L'intersection des trois demi-plans ouverts de $(P_1), (P_2)\ et\ (P_3)$ partie colorée, c'est-à-dire, l'intérieur du triangle $(ABC)$représente graphiquement l'ensemble des solutions de $(S)$

**3. Résolution de problèmes**

**a. Problème conduisant à un système d'équation**

**Exemple** : la fabrication d'un sac ordinaire nécessite 0,50 mètre de toile et 0,4 mètre de cuir, celle d'un sac de luxe nécessite 0,6 mètre de toile et 0,68 mètre de cuir

Combien peut-on fabriquer de sacs ordinaires et de sacs de luxes avec 15 mètres de toile et 14 mètres de cuir ?

**Solution**

Soit $x$, le nombre de sacs ordinaires, et $y$ le nombre de sacs de luxe. ($x\ et\ y\ sont\ les\ inconnues$)

Exprimons les grandeurs en fonction des inconnues.

- Quantité de toile pour $x$ sacs ordinaires :$0{,}50x$ ;
- Quantité de toile pour $y$ sacs de luxe :$0{,}60y$ ;
- Quantité totale de toile :$0{,}50x + 0{,}60y$ ;
- Quantité de cuir pour $x$ sacs ordinaires : $0{,}40x$ ;
- Quantité de cuir pour $y$ sacs de luxe : $0{,}68y$
- Quantité totale de cuir : $0{,}40x + 0{,}68y$
- Mise en système d'équation

$$(S): \begin{cases} 0{,}50x + 0{,}60\mathrm{y} = 15 & (1) \\ 0{,}40x + 0{,}68y = 14 & (2) \end{cases}$$

Résolution du système :

En multipliant l'équation (1) par 10 et (2) par 25, on obtient :

$$(S_1) \begin{array}{l} 2\times \\ 1\times \end{array} \begin{cases} 5x + 6y = 150 & (1) \\ 10x + 17y = 350 & (2) \end{cases}$$

$(S) = (S_1)$

$(1) - (2)$ alors $\frac{\substack{10x+12y=300 \\ 10x-17y=-350}}{=0-5y=-50} \Rightarrow -5y = -50 \Leftrightarrow y = \frac{50}{5} = 10$

$y = 10$

$(1) : 5x + 6 \times 10 = 150 \Rightarrow 5x = 150 - 60 = 90$

$\Rightarrow x = \frac{90}{5} = 18$

$x = 18$

Donc, avec 15 mètres de toile et 14 mètres de cuir, on peut fabriquer 18 sacs ordinaires et 10 sacs de luxe.

**b. Problème conduisant à un système d'inéquation :**

Exemple : un collectionneur a acheté pour moins de 600.000f des tapis et des objets d'arts. Un tapis coûte 80.000f et un objet d'art coûte 60.000f. Il y a plus d'objets d'arts que de tapis.

Déterminer graphiquement les nombres de tapis et d'objets d'arts.

**Solution**

Désignons par $x$ le nombre de tapis et $y$ le nombre d'objet d'art.

Exprimons les grandeurs en fonction des inconnues $x$ et $y$ :

- Le coût total des tapis :80.000 $x$
- Le coût total des objets d'arts : $60.000y$
- La dépense totale : $80.000\,x + 60.000y$

Mise en système d'inéquation :

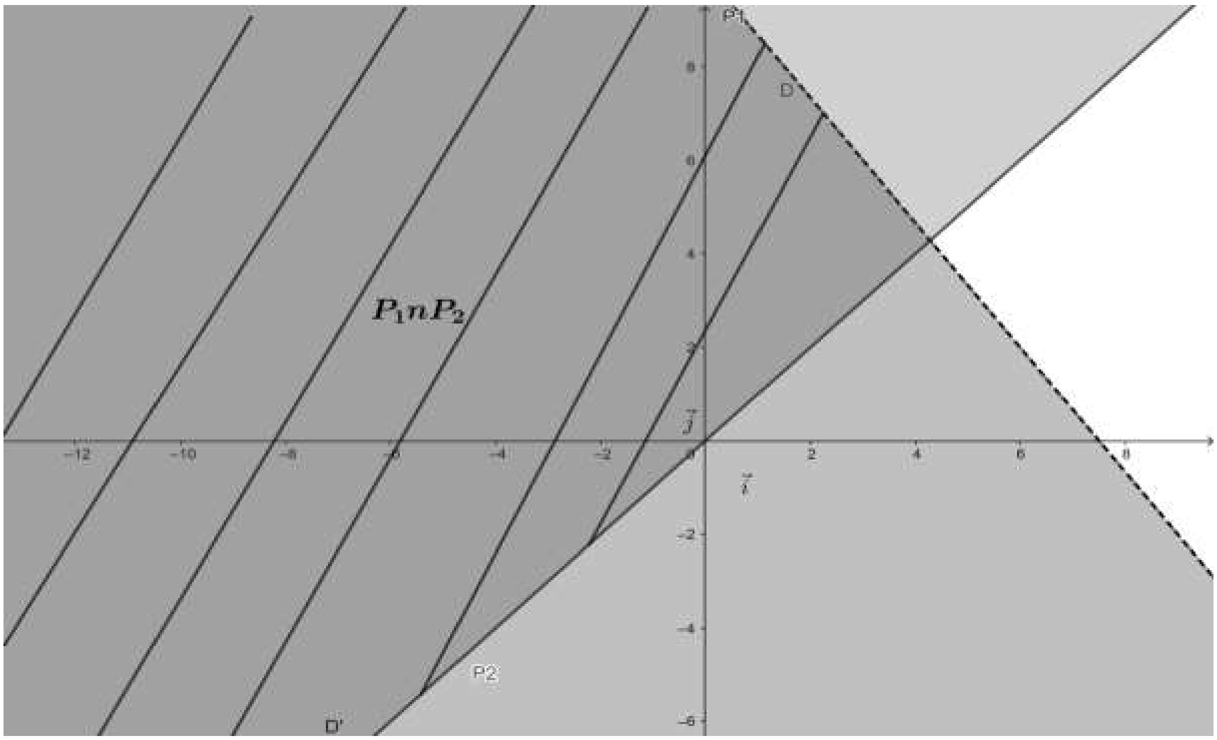
$$(I): \begin{cases} 80000x + 60000y < 600000 & (1) \\ x < y & (2) \end{cases}$$

Multiplions (1) par $\frac{1}{20000}$ ,on obtient :

$$(I_1): \begin{cases} 4x + 3y < 30 \\ \quad x - y < 0 \end{cases} \quad alors \quad I = (I_1)$$

Construisons $(D)$la droite d'équation $4x + 3y - 30 = 0$ et $(D')$la droite d'équation $x - y = 0$

$(P_1)$ $et$ $(P_2)$ le demi-plan d'inéquation $4x + 3y - 30 < 0$ $et$ $x - y < 0$




Exercices

1. Le plan est muni du repère $(o, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\,)$

Donner une interprétation graphique de chacun des équations suivantes :

a. $\begin{cases} x + 2 = 2 \\ y = 2x - 1 \end{cases}$

b. $\begin{cases} x - 2y = 4 \\ -2x + 4y = 4 \end{cases}$

2. Résoudre par la méthode de substitution :

a. $\begin{cases} x + y = \frac{5}{2} \\ x - y = 1 \end{cases}$

b. $\begin{cases} 2x - 7\text{y} = 1 \\ 5x + 2y = 9 \end{cases}$

3. On considère l'inéquation $4x - y \leq 3$

a. Vérifier si les couples suivants sont solution de cette inéquation :$(0; -1); (3; 4); (2; 20) et\ (-1; 1)$

b. Trouver deux couples solutions d'abscisse 2.

c. Trouver trois couples solutions d'ordonnée -5.

4. Résoudre graphiquement :

1. $-x + 4y \geq 4$

2. $2x - y \leq -1$

3. $\begin{cases} x + y - 1 > 0 \\ 2x - 3y < 0 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 2x + 3y < 1 \\ 4x - 3y < 2 \end{cases}$

## CHAPITRE 6 : FONCTION NUMERIQUE

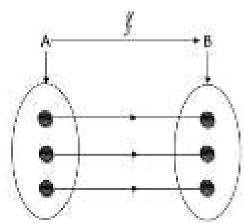
### I. Généralité

### 1. Notion de Fonction

#### a. Définition

$(A \; et \; B)$ sont des ensembles non vides. On appelle fonction de $A \; vers \; B$ toute correspondance f qui, à chaque élément de $A$, on associe un au zéro élément de $B$.

On note : $f\colon \begin{array}{c} A \to B \\ x \to f(x) \end{array}$




$f$ est la fonction de $A$ vers $B$ qui, à $x$ associe$f(x)$. $A$ est l'ensemble de départ et $B$ est l'ensemble d'arrivée de f. $x$ est la variable et $f(x)$ est l'image de $x$ par $f$.

Lors que $v$ est l'image de $u$ par $f$ ; on dit que $u$ est un antécédent de $v$ par $f$ ; on écrit : $V = f(u)$ .

Lorsque l'ensemble d'arrivé d'une fonction est une partie de $R$, on dit que $f$ est une fonction numérique.

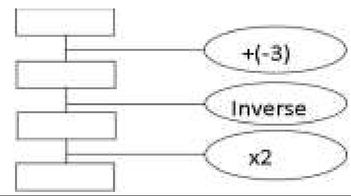
Lorsque l'ensemble de départ d'une fonction $f$ est une partie de $R$, on dit que $f$ est une fonction d'une variable réelle.

#### b. Détermination d'une fonction

On considère la fonction $f\colon \begin{array}{c} R \to R \\ x \to \frac{2}{x-3} \end{array}$

$f$ est une fonction de $R \; vers \; R$, déterminer par une formule explicite $f(x) = \frac{2}{x-3}$

La formule et le programme de calcul de l'image par $f$ du nombre réel $x$ peuvent être illustrée par un schéma de calcul.

| Formule explicite | Programme de calcul | Schéma de calcul |
|---|---|---|
| $f = \dfrac{2}{x-3}$ | - Prendre un nombre réel $x$<br>- Ajouter (-3) à ce nombre<br>- Prendre l'inverse<br>- Multiplier par 2<br>On obtient $f(x)$ |  |

### c. Ensemble de définition d'une fonction

Définition : $f$ est une fonction d'un ensemble $A$ vers un ensemble $B$.

On appelle ensemble de définition de $f$, l'ensemble des éléments de $A$ qui ont une image par $f$.

On note souvent $Df$, l'ensemble de définition de $f$.

Exemple: déterminons l'ensemble de définition de la fonction $f$ définie par : $f = \frac{-3x}{x^2-1}$

Contrainte d'existence de $f$ :

$f\exists \leftrightarrow x^2 - 1 \neq 0 \Rightarrow (x-1)(x+1) \neq 0 \Rightarrow x \neq 1 \; ou \; x \neq -1$

$Df = R\{-1; 1\} \; ou \; Df = ]-\infty; -1[ \cup ]1; +\infty[$

Remarque : pour déterminer l'ensemble de définition $Df$ d'une fonction, il faut :

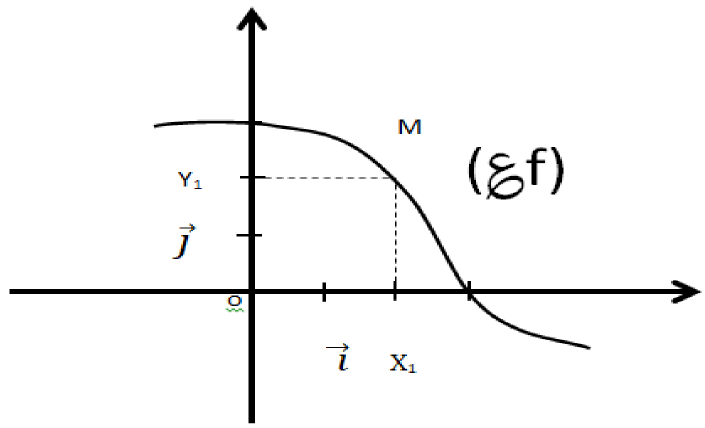
- Ecrire toutes les contraintes (conditions) d'exécution du programme de calcul de $f(x)$
- Préciser les ensembles que déterminent les contraintes ;
- Ecrire $Df$ à l'aide d'intervalles, (on pourra représenter $Df$ sur une droite graduée)

### d. Représentation graphique d'une fonction

Définition : le plan est muni du repère $(o, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. $f$ est une fonction numérique d'une variable réelle, d'ensemble de définition $Df$ .

On appelle représentation graphique de $f$ (ou courbe représentatif de l'ensemble des points $M(x; y)$ du plan tel que $x \in Df \; et \; y = f(x)$.

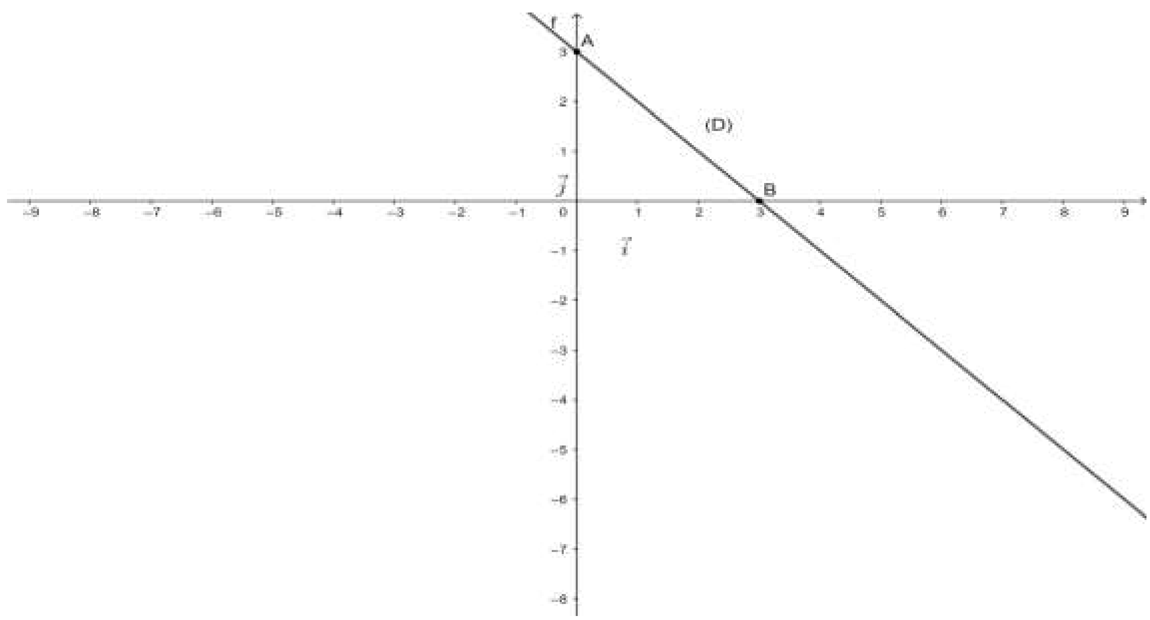
On note : $(Cf)$ la représentation graphique de $f$:




Exemple : La courbe représentative de la fonction $f$ :

$R \to R; x \Rightarrow -x+3$ est la droite $(D)$ d'équation : $y = -x+3$

Pour $x = 0 \Rightarrow y = 3$ $et\ pour$ $y = 0 \Rightarrow x = 3$




### e. Fonctions égales sur un ensemble

Définition : $f$ $et$ $g$ sont des fonctions définies sur un ensemble $E$

On dit que les fonctions $f$ $et$ $g$ sont égales sur $E$ (ou qu'elles coïncident sur $E$) lorsque, pour tout élément $x$ $de$ $E, f(x) = g(x)$

Exemple : on considère les fonctions $f: \begin{matrix} R \to R \\ x \to x-2 \end{matrix}$ $\quad et \quad$ $g: \begin{matrix} R \to R \\ x \to \frac{x^2-4}{x+2} \end{matrix}$

Justifions que $f\ et\ g$ sont définies sur : $]-\infty; -2[ \cup ]2; +\infty[$

- Pour tout élément de $x \in ]-\infty; -2[ \cup ]2; +\infty[$;

$\frac{x^2-4}{x+2} = \frac{(x+2)(x-2)}{(x+2)} = x - 2$

Alors on dit que les fonctions $f\ et\ g$ sont égales sur $]-\infty; -2[ \cup ]2; +\infty[$

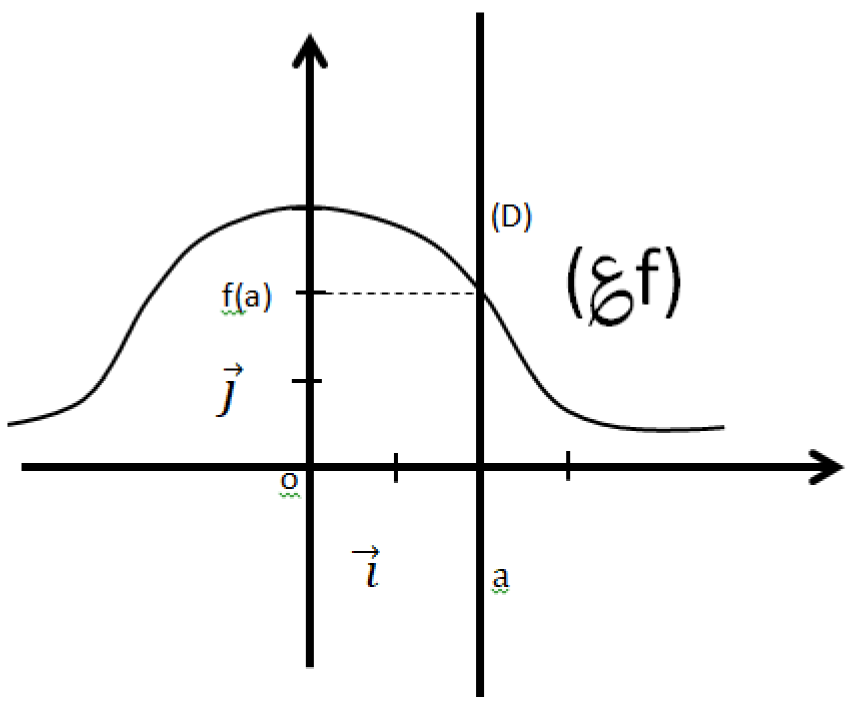
**2. Lecture graphique**

**a. Image et antécédents d'un nombre réel**

❖ **Image d'un nombre réel**

Pour déterminer graphiquement l'image d'un nombre réel $a$ par une fonction $f$, on trace la droite $(D)$d'équation $x = a$

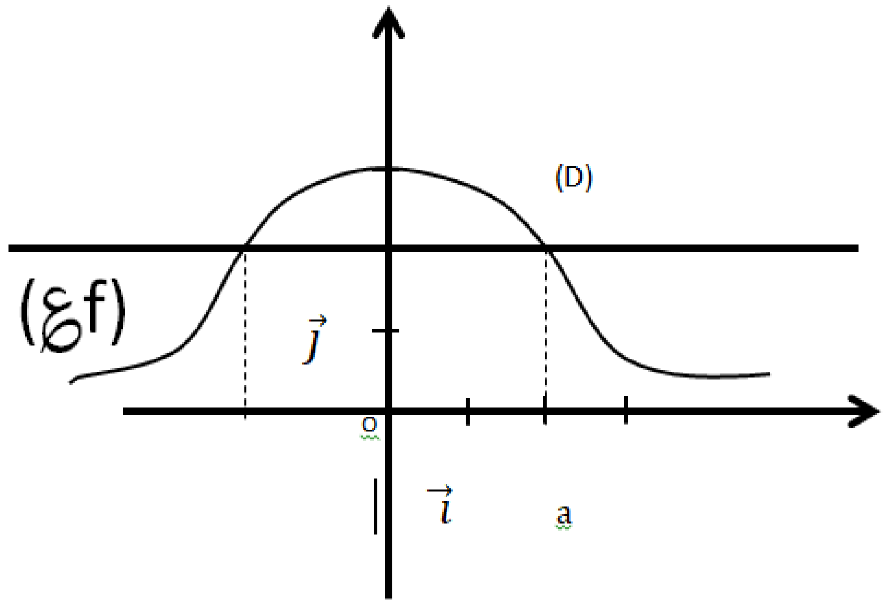
L'image de $a$ est l'ordonnée du point d'intersection de $(D)$et $(Cf)$



❖ **Antécédent d'un nombre réel**

Pour déterminer graphiquement les antécédents d'un nombre réel $b$ par une fonction $f$, on trace la droite $(D)$ d'équation $y = b$

Les antécédents de $b$ sont les abscisses des points d'intersection de $(D) et\ (Cf)$

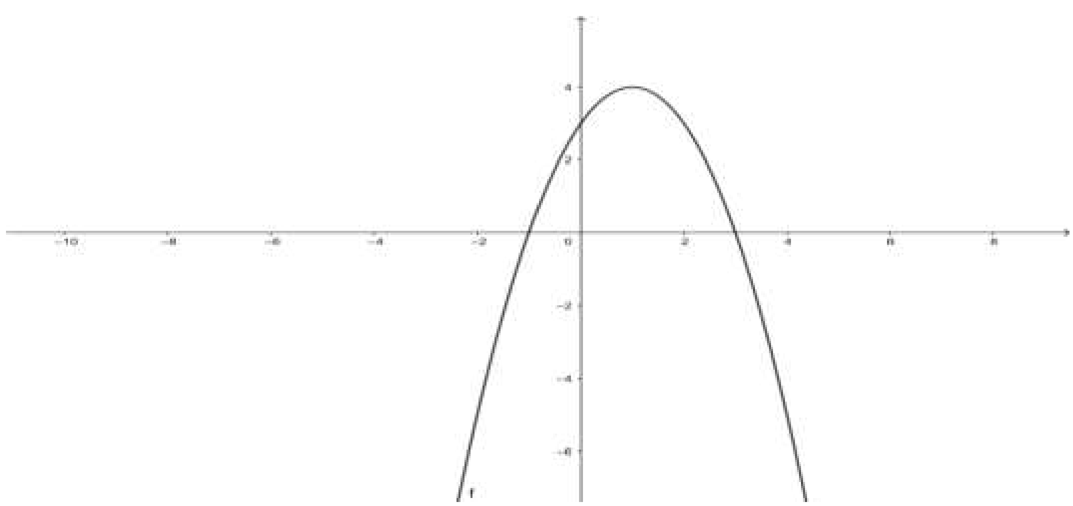



❖ **<u>Résolution graphique d'équation et d'inéquation</u>**

La courbe $(C)$ ci-contre est la représentation graphique de la fonction définie sur l'intervalle $[\![-2;4]\!]$

Par $f(x) = -x^2 + 2x + 3$

1) Résoudre graphiquement l'équation $(E): f(x) = 3$ . vérifier l'exactitude des solutions trouvées
2) Résoudre graphiquement l'inéquation $(I): f(x) > 3$



Solution

1) Les solutions de $(E)$ sont les antécédents par $f$ de 3

Traçons la droite $(D)$ d'équation : $y = 3$ . Cette droite coupe $(Cf)$ en deux points d'abscisses respectifs 0 et 2.

La lecture graphique donne deux solutions : 0 et 2

Vérifions :

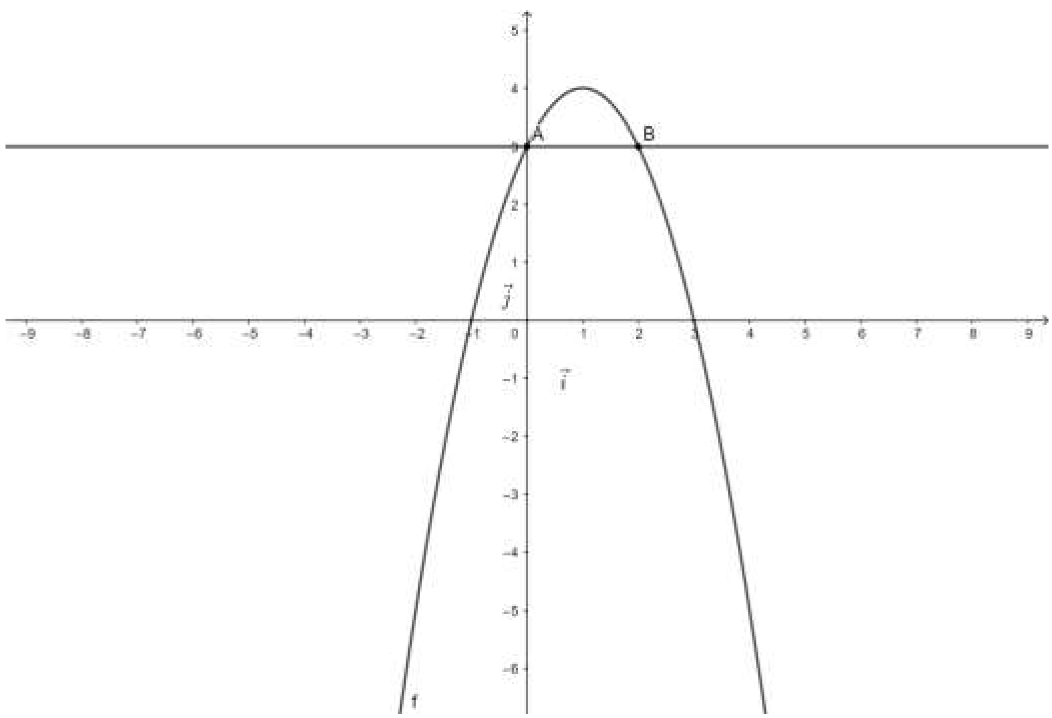
$f(0) = (0)^2 + 0 \times x + 3 = 3$

$f(0) = 3$

$f(2) = -2^2 + 2 \times 2 + 3$

$-4 + 4 + 3 = 3$

$f(2) = 3$




Donc l'équation $(E)$ a pour solution : 0 et 2

2) Les solutions de l'inéquation $(I)$ sont les abscisses des points de la courbe $(Cf)$ situés au-dessus de la droite $(D)$

La lecture graphique donne pour ensemble des solutions :$]0;2[$

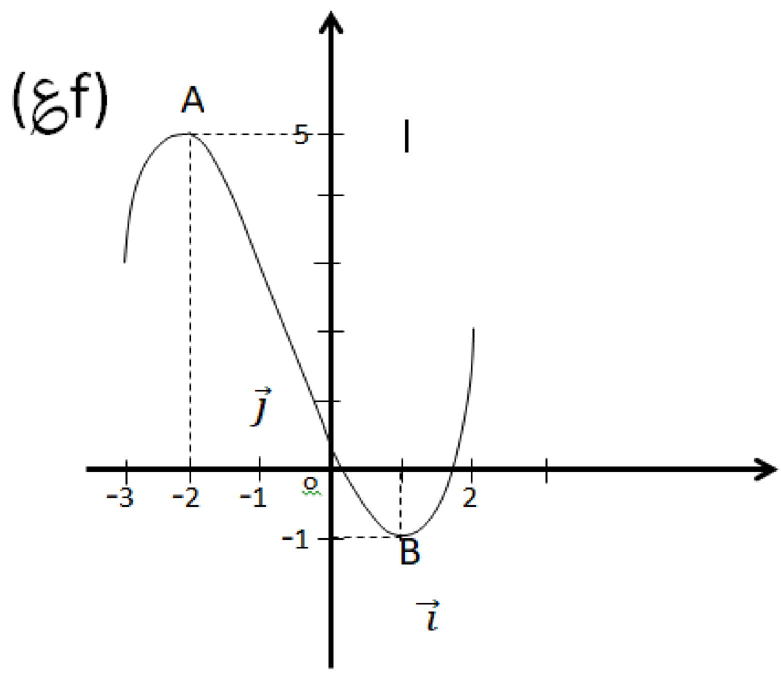
### 3. Variations d'une fonction

#### a. Définition :

$f$ est une fonction numérique d'une variation réelle définie sur un ensemble $E$ ; a est un élément de $E$.

- Lorsque, quel que soit $x\ de\ E, f(a) \geq f(x)$, on dit que $f(a)$ est le maximum de $f$ sur $E$.
- Lorsque, quel que soit $de\ E, f(a) \leq f(x)$ , on dit que $f(a)$ est le minimum de $f\ sur\ E$.
- Le maximum et le minimum d'une fonction $f$ sont appelés extremums (ou extrema) de $f$.

Exemple




La courbe $(C)$ est la représentation graphique d'une fonction $f$ définie sur $[\![-3;2]\!]$

$A(-2;5)$ est le point de $(C)$ ayant la plus grande ordonnée

On dit que sur $[\![-3;2]\!]$ , $f$ admet en -2 un maximum égal à 5.

- $B(1;-1)$ est le point de $(C)$ ayant la plus petite ordonnée.

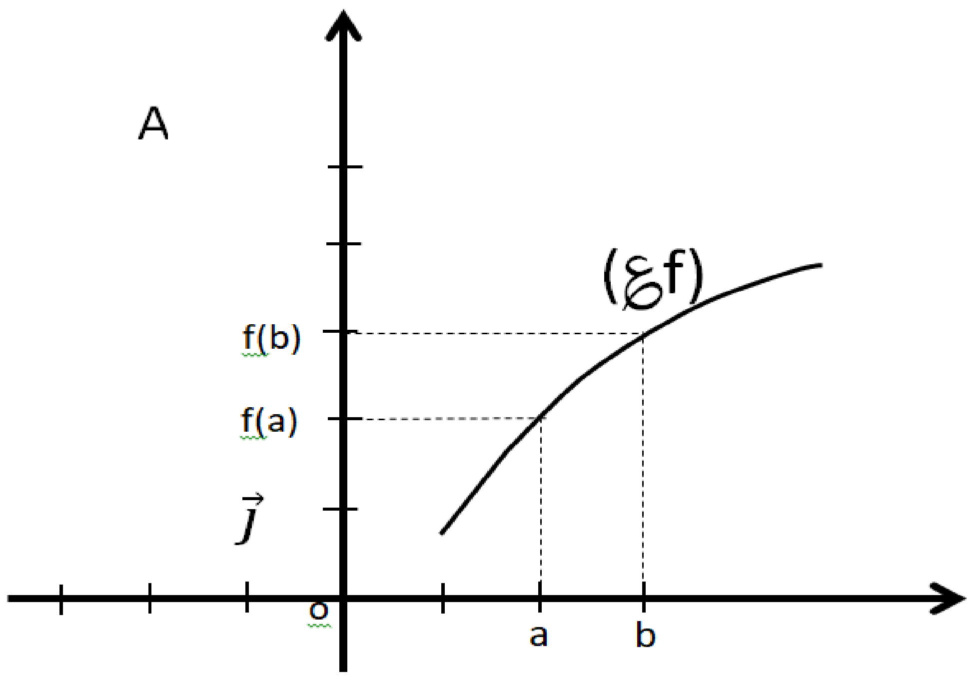
On dit que sur $[\![-3;2]\!]$, $f$ admet en 1 un minimum éal à -1.

**b. Sens de variation d'une fonction**

❖ Fonction croissante sur un intervalle

Définition : $f$ est une fonction numérique d'une variable réelle définie sur un intervalle $E$.

- On dit que $f$ est croissante sur $E$ lorsque pour tous éléments $a$ et $b$ $de$ $E$ tel que $< b$ , on a $f(a) \leq f(b)$
- On dit que $f$ est strictement croissante sur $E$ lorsque, pour tous éléments $a$ $et$ $b$ $de$ $E$ tel que $< b$ , on a $f(a) < f(b)$

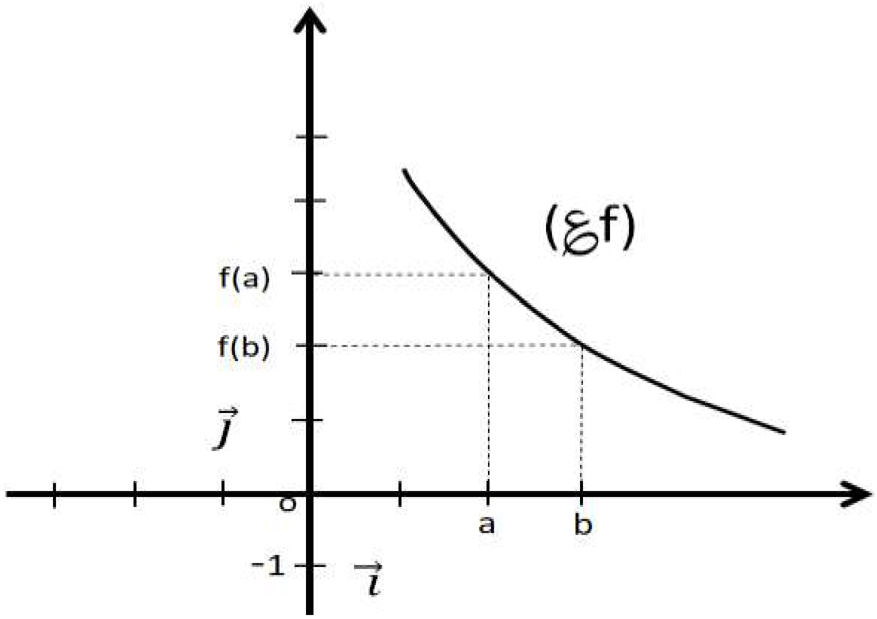



$f$ est croissante sur $E$ lorsque les nombres de $E$ sont rangés dans le même ordre que leurs images.

❖ **Fonction décroissante sur un intervalle**

Définition : $f$ est une fonction numérique d'une variable réelle définie sur un intervalle $E$

- on dit que $f$ est décroissante sur $E$, lorsque, pour tous éléments $a$ $et$ $b$ $de$ $E$ $et$ $a > b$ , alors $f(a) \geq f(b)$
- $f$ est strictement décroissante sur $E$ lors que pour tous éléments $a$ $et$ $b$ $de$ $E$ $et$ $a < b$ on a : $f(a) > f(b)$

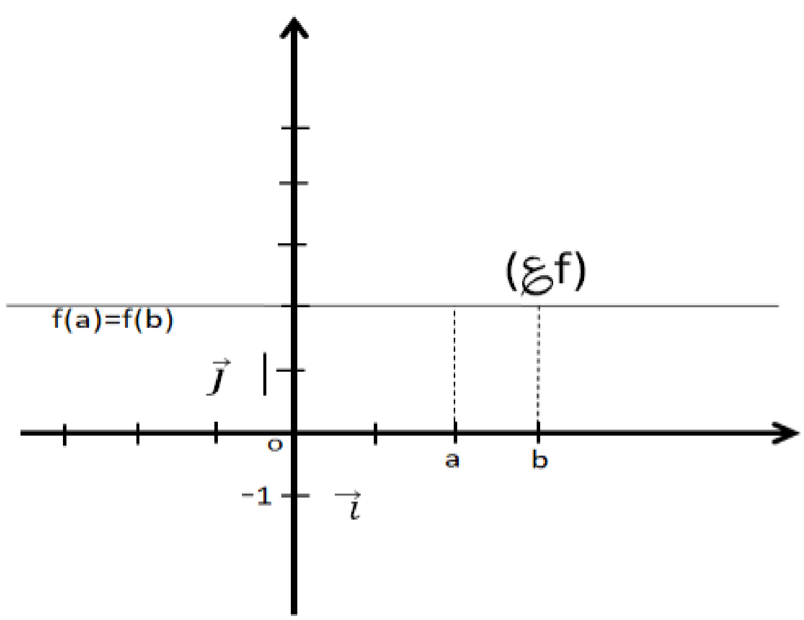



$f$ est décroissante sur $E$ lorsque les nombres $E$ sont rangés dans l'ordre inverse de leurs images

- **Fonction constante sur un intervalle**

Définition : $f$ est une fonction numérique d'une variable réelle définie sur un intervalle $E$.

On dit que $f$ est constante sur $E$, lorsque, pour tous éléments $et\ b\ de\ E$ , on a : $f(a) = f(b)$



$f$ est constante sur $E$ lorsque les nombres de $E$ ont tous la même image.

<u>Exercice</u>

1) Le plan est muni du repère$(o, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. $f$ est la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :$f(x) = \frac{a}{x}(a \in R)$

On désigne par $(C)$ la représentation graphique de $f$

a) Déterminer $a$ pour le point $A(6; 2)$ appartiennent à $(\mathrm{C})$
b) Calculer l'image par $f$ de chacun des nombres 2 , 3 et 4 puis compléter le tableau suivant :

| $x$ | 2 | 3 | 4 | 6 |
|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | | | |

2) $f$ est une fonction de $R\ vers\ R$ d2finie par : $f(x) = x^2 + 6x + 2$
a) Démontrer que $f$ est strictement décroissante sur l'intervalle $]-\infty; -3]$ et strictement croissante sur l'intervalle $[-3; +\infty[$ .
b) Dresser son tableau de variation.

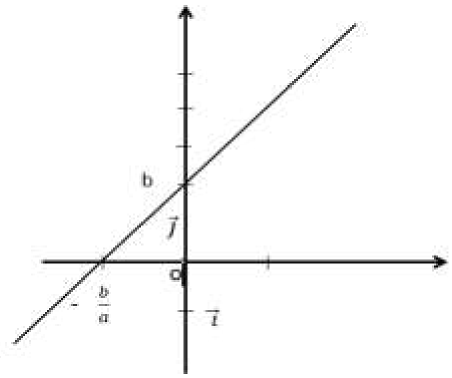
**CHAPITRE 7 : ETUDE DE FONCTION**

## 1. Fonction affine

Définition : $f$ est la fonction affine définie par : $f(x) = ax + b(a \in R\ et\ b \in R$ pour $b > 0$

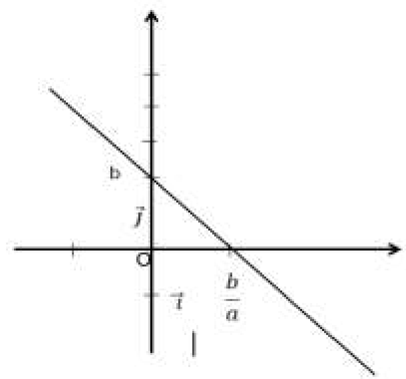
- $Si\ \ a > 0; f\ est\ croissante\ sur\ R$

| X | $-\infty$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| f(x) | | $\nearrow$ |



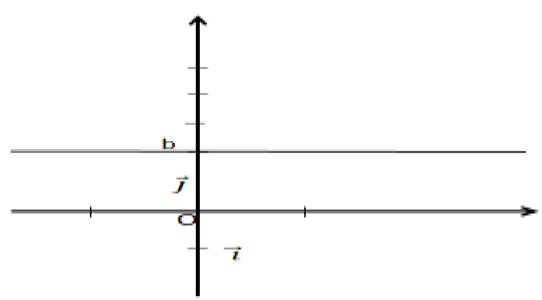

- $Si\ a < 0; f\ est\ décroissante\ sur\ R$

| X | $-\infty$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| f(x) | | $\searrow$ |




- $Si\ a = 0; f\ est\ une\ fonction\ constante\ sur\ R$

| X | $-\infty$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| f(x) | | $\rightarrow$ |




<u>Exemple</u> : soit $f$ une fonction linéaire définie par $f(x) = ax$

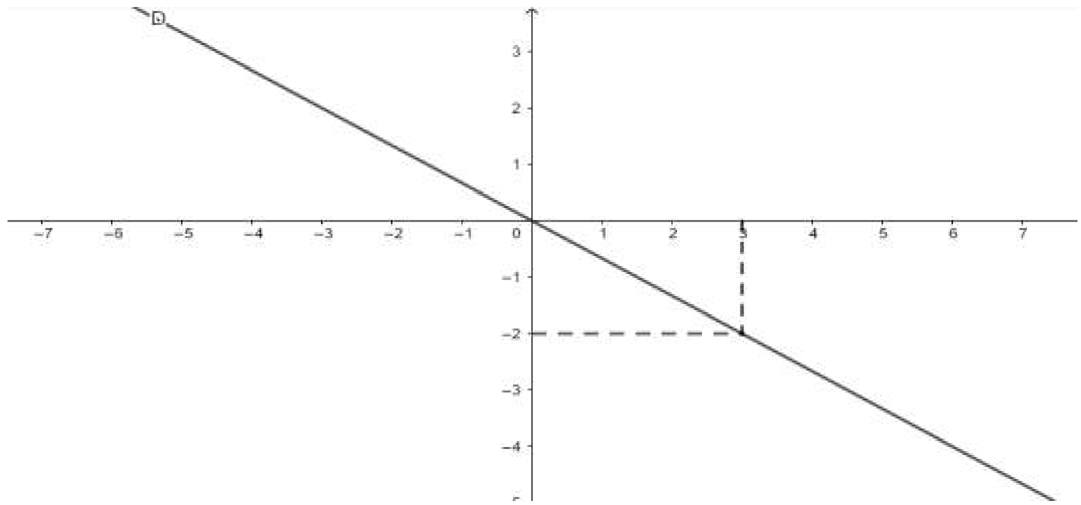
Exprimer $f(x)$ en fonction de $x$ pour $f(3) = -2$

La représentation graphique de $f$ est la droite passant par les points $O$ et $A(3; -2)$.

On a: $f(x) = ax \Rightarrow f(3) = -2 \Leftrightarrow f(3) = a \times 3 = -2$

$\Rightarrow 3a = -2 \Leftrightarrow a = -\frac{2}{3}$

$f(x) = -\frac{2}{3}x$



**2. Fonction affine par intervalle**

**a. Définition :** on appelle fonction affine par intervalle, toute fonction numérique $\boldsymbol{f}$ d'une variable réelle dont l'ensemble de définition est une réunion d'intervalle sur chacun desquels $\boldsymbol{f}$ coïncide avec une fonction affine.

Exemple : le plan est muni du repère$(o, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Considérons la fonction $f$ définie par :

- $\forall\, x \in [-3; -1[; f(x) = -x - 3$
- $\forall\, x \in [-1; 2[; f(x) = 2x$
- $\forall\, x \in [\![2; 5]\!]; f(x) = 4$
- Justifier que $f$ est une fonction affine par intervalle.
- Calculer l'image par $f$ de chacun des nombres suivants :-3 ;-1 ; 0 ; 2 et 5
- Construire la représentation graphique de la fonction $f$

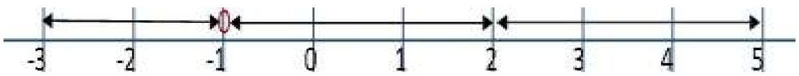
Solution

La fonction $f$ coïncide respectivement sur les intervalles $[-3; -1[$; $[-1; 2[$; $[\![2; 5]\!]$ avec les fonctions affines suivantes :

$f_1: \substack{R \to R \\ x \to -x-3}$ ; $f_2: \substack{R \to R \\ x \to 2x}$ ; $f_3: \substack{R \to R \\ x \to -4}$

Donc $f$ est une fonction affine par intervalle.

$Df = [-3; -1[ \cup [-1; 2[ \cup [\![2; 5]\!] = [\![-3; 5]\!]$




Les nombres -1 et 2 sont les valeurs pivots de Df. Les nombres -3 et 5 sont les extrémités de $Df$.

Calcul d'image

$-3 \in [-3; -1[\,; \Rightarrow f(-3) = f_1(-3) = -(-3) - 3 = 3 - 3 = 0$

$f_1(-3) = 0$

$-1 \in [-1; 2[ \Rightarrow f(-1) = f_2(-1) = 2 * (-1) = -2$

$f_2(-1) = -2$

$0 \in [-1; 2[ \Rightarrow f_2(0) = 0$

$2 \in [\![2; 5]\!] \Rightarrow f_3(2) = 4\ et\ f_3(5) = 4$

- ❖ **Représentation graphique de $\boldsymbol{f}$**: $(\boldsymbol{Cf})$

$Cf$ est obtenue à partir des droites $(D_1); (D_2); (D_3)$ d'équation respectives : $y_1 = -x - 3$ ;

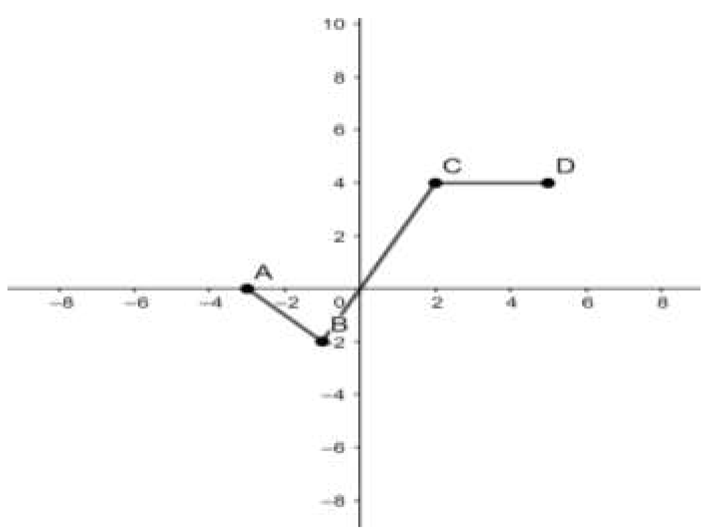
$y_2 = 2x$ et $y_3 = 4$

$(D_1)$ : $y_1 = -x - 3$ on a : $A(-3; 0) et\ B(-1; -2)$

$(D_2)$ : $y_2 = 2x$ on a : $B(-1; -2)\ et\ C(2; 4)$

$(D_3)$ : $y_3 = 4$ ; on a : $C(2; 4)\ et\ D(5; 4)$

Alors : on a $(Cf) = [\![AB]\!] \cup [\![BC]\!] \cup [\![CD]\!]$



**b. Fonction valeur absolue**

Considérons la fonction $f: {}^{R \to R}_{x \to IxI}$

$Df = R$

$f(x) = IxI$

$si\ x \geq 0 \Leftrightarrow f(x) = x$

$si\ x \leq 0 \Leftrightarrow f(x) = -x$

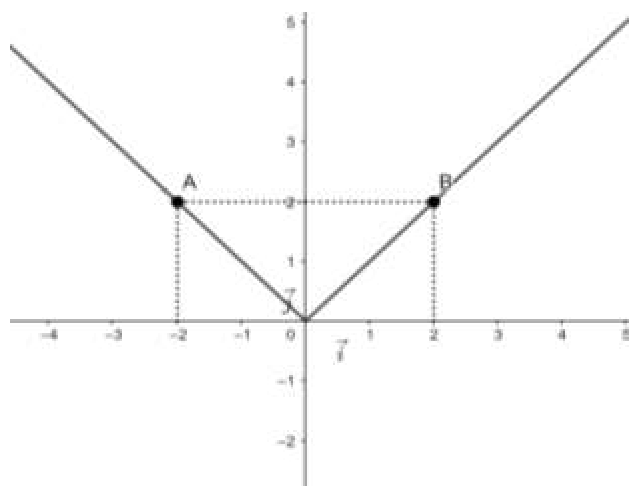
$f(2) = 2$

$f(-2) = -2$

$f(0) = 0$

<u>**Tableau de variation :**</u>

| X | -∞ | -2 | 0 | 2 | +∞ |
|---|---|---|---|---|---|
| f(x) | | -2 ↘ | 0 | ↗ 2 | |




Soient $A(-2; 2)\ et\ B(2; 2)$

La représentation graphique de $f$ est la réunion des demi-droites $[\![OA)\ et\ [\![OB)$

**c. Fonction en escaliers**

Définition : on appelle fonction en escaliers, toute fonction numérique $f$ d'une variable réelle dont l'ensemble de définition est une réunion d'intervalle sur chacun des quels $f$ coïncide avec une fonction constante

Exemple : le plan est muni du repère $(o, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\,)$

On considère la fonction $f$ définie par :

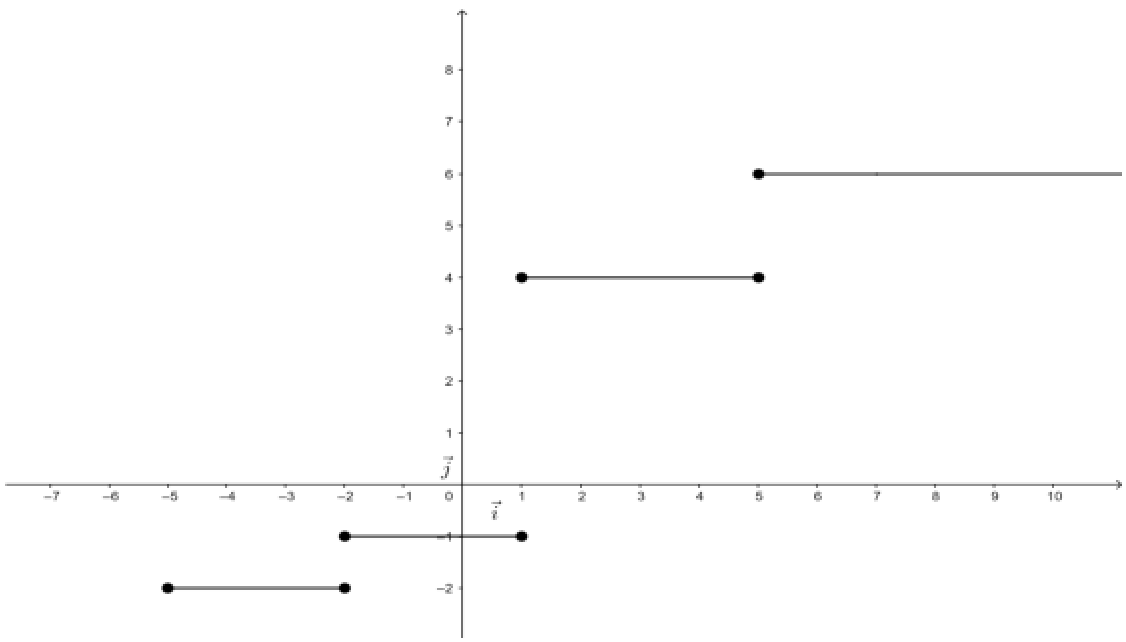
- Pour $x \in [-5; 2[; f(x) = -2$

- Pour $x \in [-2; [; f(x) = -1$
- Pour $x \in [\![1; 5]\!]; f(x) = 4$
- Pour $x \in ]5; +\infty[; f(x) = 6$

On a donc $Df = [-5; +\infty[$

La représentation graphique de $f$ ; s'obtient à partir des droites : $(D_1); (D_2); (D_3) et (D_4)$ d'équation respectives : $y_1 = -2; \quad y_2 = -1; \quad y_3 = 4; \quad y_4 = 6$

<u>Représentation graphique</u>




3. **Fonctions élémentaires :**

a. **Fonction carré**

Etudions la fonction $f: {}^{R \to R}_{x \to x^2}$ appelée fonction carré ; $Df = R$

Sens de variation :

Soit $a\ et\ b$ deux nombres réels tel que : $a < b$. Comparons $a^2 et\ b^2$. On sait que

- Si $a < b \leq 0\ alors\ a^2 > \ b^2$ donc la fonction carré est strictement décroissante sur $]-\infty; o]$
- Si $0 \leq a < b\ alors\ a^2 < \ b^2$ ; donc la fonction carré est strictement croissante sur $[0; +\infty[$

Elle admet donc en 0, un minimum égal à 0.

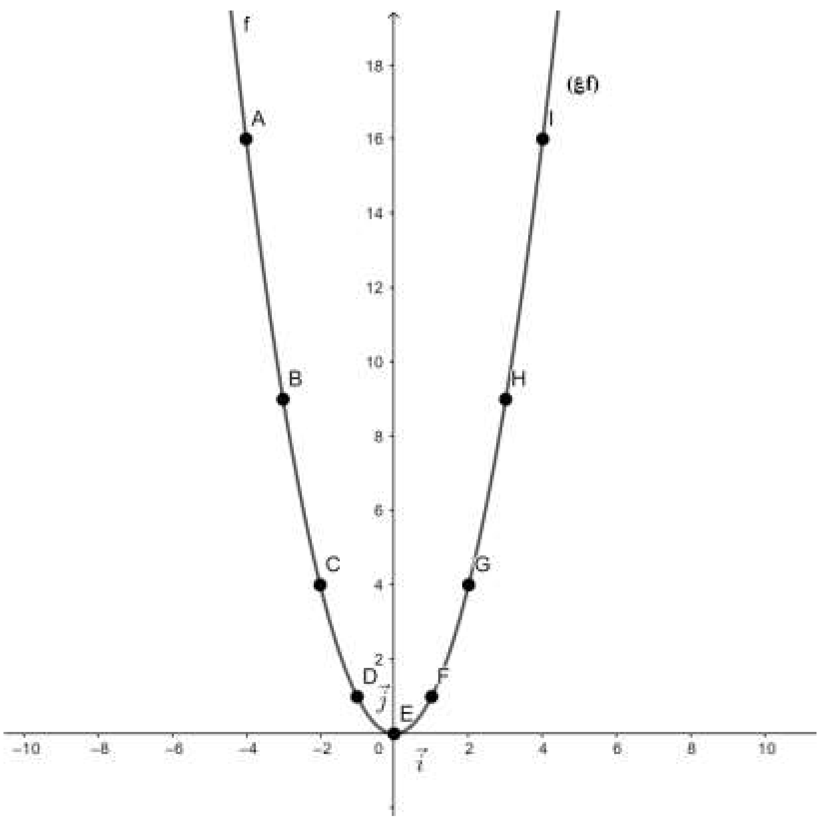
**Tableau de variation**

| X | $-\infty$ | | -4 | | 0 | | 4 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f(x) | | ↘ | 16 | ↘ | 0 | ↗ | 16 | ↗ | |

Traçons la courbe représentative de $f$ sur $[\![-4;4]\!]$ ;

**Tableau de valeurs**

| $x$ | -4 | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 16 | 9 | 4 | 1 | 0 | 1 | 4 | 9 | 16 |




La droite $(oj)$ est un axe de symétrie de la courbe $(C)$

$M\binom{x}{x^2}$ est un point de (C) d'abscisse $M'\binom{-x}{x^2}$ est le symétrie de $M$ par rapport à $(oj)$. $M'$ est un point $(C)$ car $x^2(-x)^2$

Ainsi tout point de $(C)$ a pour symétrique par rapport à $(oj)$ un point de $(C)$.

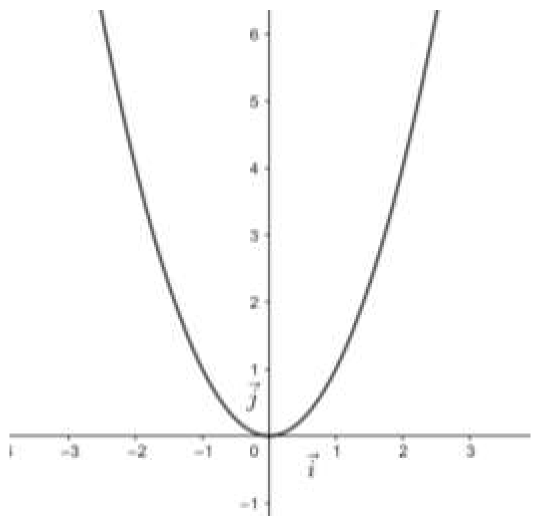
On dit que $(C)$ est une parabole de sommet 0 et d'axe $(oj)$.

**b. Fonction du type $X \rightarrow ax^2(a \neq 0)$**

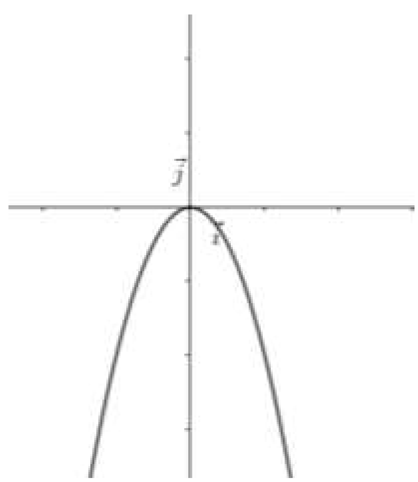
Propriété : le plan est muni du repère orthogonal $(0\vec{\imath}\,\vec{\jmath}\,)$

La représentation graphique d'une fonction du type $x \Rightarrow ax^2(a \neq 0)$ est une parabole de sommet 0 et d'axe $oj$.

- Si $a > 0$, la parabole est tournée vers le haut




- Si $a < 0$, la parabole est tournée vers le bas




Exemple : $f$ est une fonction de : $\begin{matrix} R \rightarrow R \\ x \rightarrow -\frac{1}{3}x^2 \end{matrix}$

- Etudions les variations de $f$ sur chacun des intervalles :$]-\infty; 0]$ $et[0; +\infty[$

- Traçons la courbe représentative de $f$ dans le plan muni du repère orthogonal $(o, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. On : $Df = R$.

Soit $(a \; et \; b)$ appartenant à $Df$ tel que : $a < b$

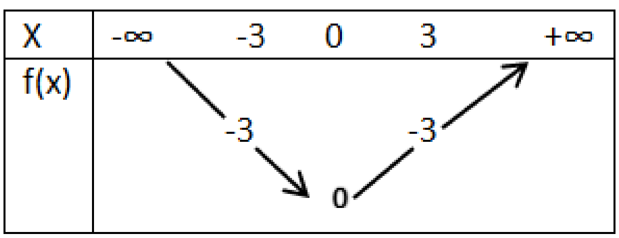
- Si $a < b \leq 0 \Rightarrow a^2 > b^2$ donc $-\frac{1}{3}a^2 < -\frac{1}{3}b^2$ . la fonction $f$ est strictement croissante sur $]-\infty; 0]$
- Si $0 \leq a < b, alors \; a^2 < b^2 \; donc : -\frac{1}{3}a^2 - \frac{1}{3}b^2$

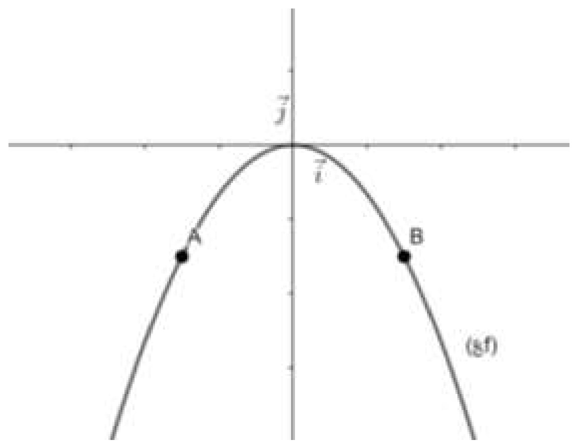
La fonction $f$ est strictement décroissante sur $[0; +\infty[$ , $f$ admet en 0 un maximum égal à 0.

Tableau de valeurs

| $x$ | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | -3 | $-\frac{4}{3}$ | $-\frac{1}{3}$ | 0 | $-\frac{1}{3}$ | $-\frac{4}{3}$ | $-\frac{4}{3}$ |

Tableau de variation




### c. Fonction racine carrée

Exemple: soit $f: \substack{R \rightarrow R \\ f(x) = \sqrt{x}}$

$Df = [0. +\infty[$

Sens de variation

Soit $a \; et \; b$ deux nombres réels. On sait que :

$0 \leq a \leq b \Leftrightarrow 0 \leq \sqrt{a} \leq \sqrt{b}$

La fonction racine carrée est strictement croissante sur $[0. +\infty[$

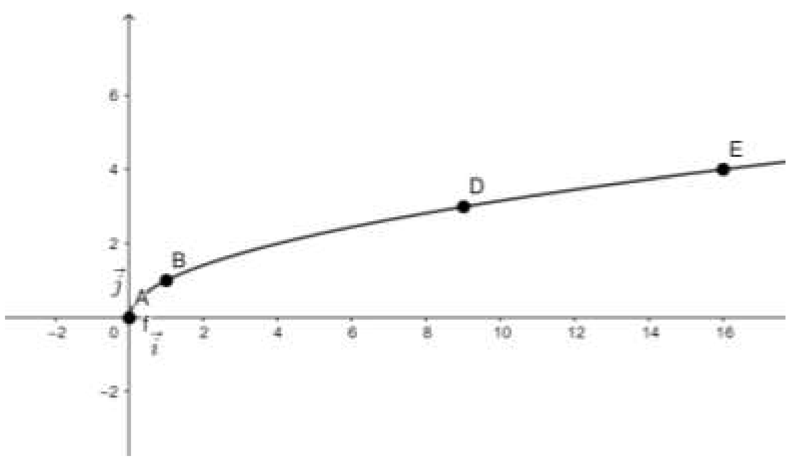
$f$ admet en 0 un minimum égal à 0.

**<u>Tableau de variation</u>**

| X | 0 | 16 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $\sqrt{x}$ | 0 ↗ | 4 | ↗ |

<u>Tableau de valeurs</u>

| $x$ | 0 | 1 | 4 | 9 | 16 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |




<u>Représentation graphique de la fonction racine carrée</u>

**d. Fonction inverse**

Exemple: soit $f: \genfrac{}{}{0pt}{}{R \to R}{f(x)=\frac{1}{x}}$ est une fonction inverse.

$Df = ]-\infty; 0[ \cup ]0; +\infty[$

Sens de variation :

Soit $a$ $et$ $b$ deux nombres réels tel que :

- Si $a < b < 0 \Rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ ;
- Si $0 < a < b; \Rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

La fonction inverse est strictement décroissante sur $]-\infty; 0[$ *et sur* $]0; +\infty[$

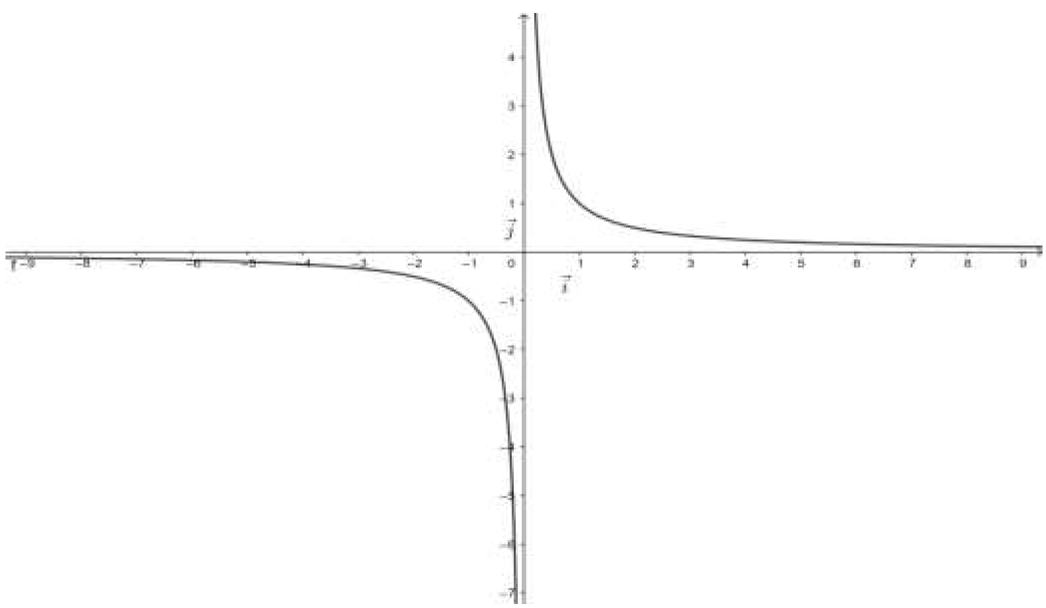
Tableau de variation

| $x$ | $-\infty$ | $-4$ | $-\frac{1}{4}$ | $0$ | $\frac{1}{4}$ | $4$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{1}{x}$ | | $-\frac{1}{4}$ | $-4$ | \|\| | $4$ | $\frac{1}{4}$ | |

**Tableau de valeurs**

| $x$ | -2 | -1 | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{4}$ | 0 | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **f(x)** | $-\frac{1}{2}$ | -1 | -2 | -4 | 0 | 4 | 2 | 1 | $\frac{1}{2}$ |

Courbe de représentative



$M'\left(-x; -\frac{1}{x}\right)$ et $M\left(x; \frac{1}{x}\right)$

Sont symétriques par rapport à 0.

On dit que Cf est une hyperbole de centre 0.

Exercices

1) Le plan est muni du repère $(o, \vec{i}, \vec{j})$.

Dans chacun des cas suivants, déterminer la formule explicite de l'application affine **f.**

a) La représentation graphique de **f** passe par les points$A(7,1)$ et $B(-1\,; -3)$.
b) La représentation graphique de **f** pour équation $2x - 3y - 6 = 0$
c) Par **,** le nombre 0 a pour image 4 et le nombre 10 a pour antécédent -2.

2) Le plan est muni du repère $(o, \vec{i}, \vec{j})$. **f** est une application affine définie par : $f(x) = 2x - 1$
a) Représenter graphiquement **f**
b) Colorier l'ensemble du plan des points d'ordonnées comprises entre 2 et 5
c) Déterminer graphiquement l'ensemble des nombres ayant une image par **f** compris entre 2 et 5. Vérifier par le calcul.

3) En utilisant la courbe d'équation $y = x^2$ ;

Résoudre les équations suivantes :

a) $x^2 = 4$
b) $x^2 = -1$
c) $x^2 = 0$
d) $x^2 = \frac{1}{4}$

**Bibliographie de Mathématiques Secondes L**


1. CIAM, Mathématiques Seconde Littéraire, Edicef, 2000
2. CIAM, Guide pédagogique Mathématiques Seconde Littéraire, Edicef, 2000

**Partenariat**

Lycée Saint François Xavier

Label 109

Livret à ne pas vendre

**Contact**

info@label109.org