MATHS

1er S

Maths
Première S

INNOVATING
EDUCATION
IN AFRICA

Chapitre 1 : Equations-Inéquations-Systèmes

I. EQUATIONS

$I_{.1}$ – Polynôme du second degré

1.1 – Définition :

On appelle polynôme ou trinôme du second degré, toute fonction f définie par :

$f(x)= ax^2 + bx + c$ (avec $a \neq 0$) où a, b et c sont des nombres réels.

Exemple :

$$f(x) = 4x^2 - 4\sqrt{3}x + 3$$
$$g(x) = 5x^2 - 2x + 5$$
$$h(x) = x^2 - 5$$

Ce sont donc des polynômes ou trinômes du 2nd degré.

1.2 –Racines d'un polynôme du 2nd degré.

1.2.1 –Forme canonique

Soit P un polynôme du 2nd degré dans $\mathbb{R}$ défini par $P(x) = ax^2 + bx + c$ et $(a \neq 0)$.

La forme canonique de $P(x)$ s'écrit donc : $P(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)\right]$

En posant $\Delta = \boldsymbol{b^2 - 4ac}$ appelée discriminant du polynôme $P(x)$, on réécrit $P(x)$ sous forme : $\boxed{P(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right];\ \text{avec a} \in \mathbb{R}^* \ et\ b \in \mathbb{R}}$

☑ Démonstration:

$$P(x) = ax^2 + bx + c$$
$$= a\left[x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a}\right], \text{ Or } \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{b^2}{4a^2} \Longrightarrow x^2 + \frac{bx}{a} = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} (1)$$

En injectant (1) dans P(x), on a: $P(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right]$

$$= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)\right], \text{ or } \Delta = b^2 - 4ac$$

D' où $\boxed{\boldsymbol{P(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right];\ \text{avec a} \in \mathbb{R}^* \ et\ b \in \mathbb{R}}}$

1.2.2 –Propriétés :

Soit $\boldsymbol{P(x) = ax^2 + bx + c}$**,** un polynôme du second degré. Une équation du second degré a coefficients réels a toujours **deux racines** qui sont soit **distinctes, soit confondues** ou soit **n'existent pas**.

Les racines de P sont selon les cas suivants :

1er Cas : Si $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, $P(x)$ a deux racines distinctes x_1 et x_2 distinctes telles que : $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

Donc P peut s'écrire sous la forme : $\boldsymbol{P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)}$

2e Cas : Si $\Delta = b^2 - 4ac = 0$, $P(x)$a deux racines x_1 et x_2 qui sont confondues telles que : $x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$ **et** P s'écrit sous la forme$P(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$. On dit que P a une racine double.

3^e Cas : Si $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, alors P n'a pas de racines et donc n'est pas factorisable, x_1 et x_2 n'existent pas, donc l'équation $P(x) = 0$ n'admet pas de solutions dans $\mathbb{R}$..

Exemple : Mettre sous forme canonique les trinômes du 2nd degré suivants :

a) $P(x) = 4x^2 - 4\sqrt{3}x + 3$
b) $Q(x) = 5x^2 - 2x + 3$
c) $R(x) = 2x^2 + 3x + 2$

1.2.2 –Résolution d'une équation du 2nd degré.

On appelle équation du 2nd degré, c'est une équation du type $ax^2 + bx + c = 0, (a \neq 0)$ d'inconnue x.

Résoudre l'équation $ax^2 + bx + c = 0, (a \neq 0)$ équivaut à déterminer les racines du polynôme du 2nd degré P défini par : $P(x) = ax^2 + bx + c, (a \neq 0)$

En posant $\Delta = \boldsymbol{b^2 - 4ac}$ appelée discriminant de $P(x)$,

On a : $ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$,

donc $ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] = 0$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = 0, \text{ puis que } a \neq 0$$

On envisage trois cas :

1er cas : Si $\Delta > 0$,

On a: $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2 = 0$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x + \frac{b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x + \frac{b+\sqrt{\Delta}}{2a} = 0 \text{ ou } x + \frac{b-\sqrt{\Delta}}{2a} = 0$$

$$\Leftrightarrow x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ ou } x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

L'ensemble de solution est : $S = \left\{\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}; \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right\}$

2e cas : Si $\Delta = 0$,

On a : $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a}\right) = 0$

$\Leftrightarrow x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$ et l'ensemble de solution est : $S = \left\{\frac{-b}{2a}\right\}$

3e cas : Si $\Delta < 0$, On a : $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} > 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2} < 0$ impossible dans $\mathbb{R}$ car le carre d'un nombre n'est jamais négatif.

Propriété :

Pour résoudre l'équation $x^2 + bx + c = 0, (a \neq 0)$, on calcule le discriminant $\Delta = \boldsymbol{b^2 - 4ac}$ et on envisage les trois cas suivants :

- Si $\Delta > 0$, alors l'équation admet deux solutions distinctes : $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ ou $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$
- Si $\Delta = 0$, alors l'équation admet une double solution : $x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$

- Si $\Delta < 0$, alors l'équation n'a pas de solutions.

<u>Exemple</u> : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

a) $x^2 + x + 3 = 0$
b) $(\sqrt{2} - 1)x^2 + 2x + \sqrt{2} + 1 = 0$
c) $x^2 - 5x + 6 = 0$

<u>Remarque</u> :

- Le calcul de Δ n'est pas toujours indispensable pour résoudre une équation du 2nd degré, soit par exemple : $2x^2 + 5x = 0 \Leftrightarrow x(2x + 5) = 0$. Donc cette équation a deux solutions distinctes qui sont $\left\{-\frac{5}{2}; 0\right\}$.
- Parfois on peut simplifier les calculs si b est pair en posant $b' = \frac{b}{2}$. On aura donc: $\Delta = b^2 - 4ac = 4(b'^2 - ac)$. On utilise alors le ***discriminant réduit*** Δ' tel que : $\Delta' = b'^2 - ac$ (Δ et Δ' ont même signe).
- Si $\Delta' > 0$, alors l'équation a deux solutions distinctes : $x_1 = \frac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a}$ et $x_2 = \frac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a}$
- Si $\Delta' = 0$, alors l'équation a une double solution : $x_1 = x_2 = \frac{-b'}{a}$
- Si $\Delta' < 0$, alors l'équation n'a de solution.

<u>Exemple</u> : résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations ci- dessous en utilisant le discriminant réduit Δ'.

a) $x^2 + 2x + 3 = 0$
b) $3x^2 - 12x + 12 = 0$
c) $2x^2 - 10x + 12 = 0$

1.2.3 –<u>Équation du 2nd degré avec paramètre</u>.

<u>Exemple d'application</u> :

Résoudre et discuter suivant les valeurs du paramètre m l'équation

$$(E_m): (1 - m)x^2 - 2mx - (m + 2) = 0$$

<u>Résolution</u> :

Cette équation est du 1er ou 2nd degré suivant que le coefficient de (E_m) est nul. On a :

- Si $1 - m = 0 \Rightarrow m = 1$, l'équation (E_m) devient :
  $(E_m): -2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2}$, donc $S = \left\{-\frac{3}{2}\right\}$.
- Si $1 - m \neq 0 \Rightarrow m \neq 1$, l'équation (E_m) est une équation du 2nd degré.

$$(E_m): (1 - m)x^2 - 2mx - (m + 2) = 0$$

On pose alors $\Delta' = m^2 + (1 - m)(m + 2)$
$= m^2 + 2 - m - m^2$
$\Delta' = -m + 2.$

<u>Signe de Δ'</u>

M	$-\infty$	1		2	$+\infty$
$-m + 2.$	+	‖	+	0	−
Δ'	+	‖	+		−

- Si $m \in]2;\ +\infty[$, $\Delta' < 0$, alors l'équation (E_m) n'a pas de solutions.
- Si $m = 2$, alors $\Delta' = 0$ donc l'équation (E_2) a une solution double :

$$x_1 = x_2 = \frac{-(-m)}{1-m} = -2,$$

Donc $S = \{-2\}$.

- Si $m \in]-\infty; 1[\cup]1; 2[$, $\Delta' > 0$ alors l'équation (E_m) admet deux solutions distinctes :
  $x_1 = \frac{m-\sqrt{-m+2}}{1-m}$ et $x_2 = \frac{m+\sqrt{-m+2}}{1-m}$

  Donc $S = \left\{\frac{m-\sqrt{-m+2}}{1-m};\ \frac{m+\sqrt{-m+2}}{1-m}\right\}$.

Propriété :

Pour résoudre dans $\mathbb{R}$ une équation (E): $ax^2 + bx + c = 0$ ou a, b et c dépendent d'un paramètre, on peut procéder de la manière suivante :

- On étudie éventuellement les cas où l'équation(E) n'est pas du 2nd degré $(a = 0)$.
- Dans le cas où l'équation (E) est du 2nd degré $(a \neq 0)$:
  - On calcule le discriminant Δ ;
  - On étudie le signe de Δ suivant les valeurs du paramètre.
  - On détermine dans chaque cas le nombre de solutions et on calcule ces solutions.

1.2.4 – Somme et produit des racines

Soit P le polynôme du 2nd degré défini par : $P(x) = ax^2 + bx + c$ admettant deux racines $x_1\ et\ x_2$.

Si P admet deux racines $x_1\ et\ x_2$, alors on pose S leur somme et P leur produit.

On a : S = $x_1 + x_2 = \left(\frac{\boldsymbol{-b-\sqrt{\Delta}}}{\boldsymbol{2a}}\right) + \left(\frac{\boldsymbol{-b+\sqrt{\Delta}}}{\boldsymbol{2a}}\right) = \frac{-b}{a} \Longrightarrow S = \frac{-b}{a}$

a) $P = x_1x_2 = \left(\frac{\boldsymbol{-b-\sqrt{\Delta}}}{\boldsymbol{2a}}\right)\left(\frac{\boldsymbol{-b+\sqrt{\Delta}}}{\boldsymbol{2a}}\right)$

$$= \left(\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)$$

$$= \frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2} = \frac{c}{a} \Longrightarrow P = \frac{c}{a}$$

Exemple : Soit (E): $x^2 - 3x + 2 = 0$

Calculer la somme S et le produit P des racines de (E).

Solution :

On a : $\begin{cases} S = -\frac{b}{a} = -\frac{(-3)}{1} = 3 \\ P = \frac{c}{a} = \frac{2}{1} = 2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} S = 3 \\ P = 2 \end{cases}$

Propriété 2 : Deux nombres réels ont pour somme S et pour produit P si et seulement si, ils sont solutions de l'équation:$x^2 - Sx + P = 0$.

Démonstration :

- Soit $x_1\ et\ x_2$ deux nombres réels tels que : $S = x_1 + x_2$ et $P = x_1x_2$.
  Pout tout nombre réel x on a :

  $(x - x_1)(x - x_2) = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1.x_2$

  $= x^2 - Sx + P$, car $S = x_1 + x_2$ et $P = x_1x_2$

D'où x_1 et x_2 sont les solutions de l'équation : $x^2 - Sx + P = 0$

- Réciproquement, si x_1 et x_2 sont les solutions de l'équation : $x^2 - Sx + P = 0$, alors d'après la propriété 1, on a : $S = x_1 + x_2$ et $P = x_1 x_2$

Exemple : Déterminer deux nombres ayant pour somme $2\sqrt{3}$ et pour produit -1.
Résolution :
Soit x_1 et x_2 sont ces deux nombres, s'ils existent, sont solutions de l'équation :
$x^2 - 2\sqrt{3}x - 1 = 0$,
On a : $\Delta' = 4 > 0$, donc $x_1 = \sqrt{3} - 2$ et $x_2 = \sqrt{3} + 2$.
Ces deux nombres cherchées sont $x_1 = \sqrt{3} - 2$ et $x_2 = \sqrt{3} + 2$

II. INEQUATIONS

II_1 –Signe d'un polynôme du 2nd degré.

Soit P le polynôme du second degré défini par $P(x) = ax^2 + bx + c$.
Le discriminant de P est le nombre réel Δ tel que : $\Delta = b^2 - 4ac$.
On a: $P(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$

- Si $\Delta < 0$ alors : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} > 0$, donc $P(x)$ est du signe de a ;
- Si $\Delta = 0$, alors : $P(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$, donc pour tout $x \neq -\frac{b}{2a}$, $P(x)$ est du signe de a ;
- Si $\Delta > 0$, alors: $P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$, avec x_1 et x_2 les deux racines distinctes de P.

On étudie le signe de $P(x)$ à l'aide d'un tableau. On suppose que : $x_1 < x_2$

x	$-\infty$	x_1	x_2 $+\infty$
$x - x_1$	$-$	0 $+$	$+$
$x - x_2$	$-$	$-$	0 $+$
$(x - x_1)(x - x_2)$	$+$	$-$	$+$
$P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$	Signe de a	Signe de $-a$	Signe de a

Méthode : Soit P le polynôme du second degré défini par $P(x) = ax^2 + bx + c$, $(a \neq 0)$.
Pour étudier le signe de $P(x)$, on peut calculer son discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ et utiliser l'un des tableaux ci-dessous.

$\Delta < 0$, P n'a pas de racines	
x	$-\infty$ $+\infty$
$P(x)$	Signe de a

$\Delta = 0$, P a une racine double $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$		
x	$-\infty$ $-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
$P(x)$	Signe de a 0	Signe de a

$\Delta > 0$, P a deux racines distinctes x_1 et x_2			
x	$-\infty$ x_1	x_2	$+\infty$
$P(x)$	Signe de a 0	Signe de $-a$ 0	Signe de a

Exemple :
Déterminer suivant les valeurs de x, le signe du polynôme P defini dans les cas suivants :
1) $P(x) = -2x^2 + x - 1$
2) $P(x) = -2x^2 + 3x + 2$

3) $P(x) = -3x^2 + 6x - 3$

Résolution :

1) $P(x) = -2x^2 + x - 1$

$\Delta = -7 < 0$, donc P n'a pas de racines.

$\forall\, x \in \mathbb{R}$, $P(x) = -2x^2 + x - 1$ est du signe $-2 < 0$, donc $P(x) < 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

2) $P(x) = -2x^2 + 3x + 2$

$\Delta = 25 > 0$, donc P a deux racines distinctes.

$x_1 = 2$ et $x_2 = -\frac{1}{2}$, alors $P(x) = -2(x-2)\left(x + \frac{1}{2}\right)$

Tableau de signe de $P(x)$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$		2	$+\infty$
$x + \frac{1}{2}$	$-$	0	$+$		$+$
$x - 2$	$-$		$-$	0	$+$
$\left(x + \frac{1}{2}\right)(x-2)$	$+$		$-$		$+$
$P(x) = -2\left(x + \frac{1}{2}\right)(x-2)$	$-$		$+$		$-$

$\forall\, x \in \left]-\infty; -\frac{1}{2}\right[\cup \left]2; +\infty\right[$, $P(x) = -2(x-2)\left(x + \frac{1}{2}\right) < 0$,

$\forall\, x \in \left]-\frac{1}{2}; 2\right[$, $P(x) = -2(x-2)\left(x + \frac{1}{2}\right) > 0$.

3) $P(x) = -3x^2 + 6x - 3$

$\Delta = 0$, donc P a une racine double. $x_1 = x_2 = 1$ et $P(x) = -3(x-1)^2$.

$\forall\, x \neq 1$, $P(x) = -3x^2 + 6x - 3$ est du signe de $-3 < 0$, donc $\forall\, x \neq 1$, $P(x) < 0$.

1.1 – Résolution d'une inéquation du 2nd degré.

Définition : Une inéquation d'inconnue x du type $ax^2 + bx + c > 0$ ou $ax^2 + bx + c < 0$ ou encore ($\geq 0, resp\ \leq 0$) avec $a \neq 0$ est appelée inéquation du 2nd degré.

Exemple :

a) $3x^2 - 6x - 7 < 0$
b) $x^2 - 7x - 1 > 0$
c) $9x^2 + x - 9 \geq 0$
d) $-2x^2 + 2x - 1 \leq 0$

Ce sont donc des inéquations du 2nd degré.

Méthode :

Pour résoudre dans $\mathbb{R}$ une inéquation du type $x^2 + bx + c > 0, (a \neq 0)$, on étudie le signe du polynôme P défini par : $P(x) = ax^2 + bx + c$.

Exercice d'application :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

a) $-3x^2 + 2x - 5 > 0$
b) $-3x^2 + 6x - 3 > 0$
c) $-3x^2 + 6x - 3 < 0$
d) $-3x^2 + 15x - 18 \geq 0$

e) $-3x^2 + 15x - 18 \leq 0$

<u>Résolution</u> :

Résolvons dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

a) $-3x^2 + 2x - 5 > 0$

Posons $P(x) = -3x^2 + 2x - 5$

$\Delta = -56 < 0$, alors $P(x)$ est du signe $-3 < 0$, donc $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $P(x) = -3x^2 + 2x - 5 < 0$ mais $-3x^2 + 2x - 5 > 0$, c'est absurde, par conséquent cette inéquation n'a pas de solutions.

b) $-3x^2 + 6x - 3 > 0$

Posons $P(x) = -3x^2 + 6x - 3$

$\Delta = 0$, on a : $x_1 = x_2 = 1$ donc $P(x) = -3(x-1)^2$.

$\forall\, x \neq 1$, $P(x) = -3x^2 + 6x - 3$ est du signe de $-3 < 0$, alors $\forall\, x \neq 1$, $P(x) < 0$ mais comme $-3x^2 + 6x - 3 > 0$, c'est absurde donc $P(x)$ n'a pas de solution, par conséquent cette inéquation n'a pas de solutions.

c) $-3x^2 + 6x - 3 < 0$

$\Delta = 0$, on a : $x_1 = x_2 = 1$ donc $P(x) = -3(x-1)^2$.

$\forall\, x \neq 1$, $P(x) = -3x^2 + 6x - 3$ est du signe de $-3 < 0$, alors $\forall\, x \neq 1$, $P(x) < 0$ et comme $-3x^2 + 6x - 3 < 0$, alors l'ensemble de solutions est $S = \mathbb{R} =]-\infty;\ +\infty[$.

d) $-3x^2 + 15x - 18 \geq 0$

Posons $P(x) = -3x^2 + 15x - 18$

$\Delta = 9 > 0$, on a : $x_1 = 3$ et $x_2 = 2$, alors $P(x) = -3(x-2)(x-3)$

Tableau de signe de $P(x)$

x	$-\infty$	2		3	$+\infty$
$x-2$	$-$	0	$+$		$+$
$x-3$	$-$		$-$	0	$+$
$(x-2)(x-3)$	$+$		$-$		$+$
$P(x) = -3(x-2)(x-3)$	$-$		$+$ $+$		$-$

$-3x^2 + 15x - 18 \geq 0$, alors $S = [2; 3]$.

e) $-3x^2 + 15x - 18 \leq 0$.

De ce qui précède, on a : $\Delta = 9 > 0$, $x_1 = 3$ et $x_2 = 2$,

Tableau de signe de $P(x)$

x	$-\infty$	2		3	$+\infty$
$x-2$	$-$	0	$+$		$+$
$x-3$	$-$		$-$	0	$+$
$(x-2)(x-3)$	$+$		$-$		$+$
$P(x) = -3(x-2)(x-3)$			$+$		

$-3x^2 + 15x - 18 \leq 0$, alors $S =]-\infty; 2] \cup [3; +\infty[$.

II_2 −Équation et inéquation se ramenant au 2^{nd} degré.

2.1 − Équation et inéquation de degré supérieur à 2.

Équations bicarrés.

On appelle équation bicarrée, toute équation de la forme : $ax^4 + bx^2 + c = 0$ avec $(a \neq 0)$.
Pour résoudre une telle équation, on est ramené à la résolution d'une équation du 2^{nd} degré en posant $X = x^2$ et l'équation $x^4 + bx^2 + c = 0$ devient alors $aX^2 + bX + c = 0; (a \neq 0)$.

Exemple :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations bicarrées suivantes.

1) $(E_1): x^4 - 5x^2 + 4 = 0$
2) $(E_2): x^4 = x^2 + 12$

Résolution :

Résolvons dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1) $(E_1): x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

Posons $X = x^2$, alors (E_1) devient :

$(E_1): X^2 - 5X + 4 = 0$

$$\Delta = (-5)^2 - 4 \times 1 \times 4 = 9 > 0$$

On a : $X_1 = 1$ et $X_2 = 4$

Alors $x^4 - 5x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow (X-1)(X-4) = 0$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 1)(x^2 - 4) = 0$$
$$\Leftrightarrow (x+1)(x-1)(x+2)(x-2) = 0$$
$$\Leftrightarrow x_1 = 1 \; ou \; x = -1 \; ou \; x = 2 \; ou \; x = -2$$

Donc l'ensemble de solution est :

$$S = \{-2; -1; 1; 2\}$$

2) $(E_2): x^4 - x^2 - 12 = 0$

Posons $X = x^2$, alors (E_2) devient :

$(E_2): X^2 - X - 12 = 0$

$\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-12) = 49 > 0$

On a : $X_1 = -3$ et $X_2 = 4$

Alors $x^4 - x^2 - 12 = 0 \Leftrightarrow (X+3)(X-4) = 0$

$$\Leftrightarrow (x^2 + 3)(x^2 - 4) = 0$$
$$\Leftrightarrow (x^2 + 3)(x+2)(x-2) = 0$$
$$\Leftrightarrow (x^2 + 3) > 0 \; et \; x = 2 \; ou \; x = -2$$

Donc l'ensemble de solution est :

$$S = \{-2; 2\}$$

2.2 −Inéquations bicarrées.

Applications :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1) $(I_1): x^4 - 5x^2 + 4 < 0$
2) $(I_2): 4x^4 - 5x^2 + 1 \geq 0$

Résolution.

Résolvons dans $\mathbb{R}$ les inequations suivantes :

1) $(I_1): x^4 - 5x^2 + 4 < 0$

Posons $X = x^2$, alors (I_1) devient :
(E_1): $X^2 - 5X + 4 < 0$
$\Delta = (-5)^2 - 4 \times 1 \times 4 = 9 > 0$
On a : $X_1 = 1$ et $X_2 = 4$
Alors $x^4 - 5x^2 + 4 = (x^2-1)(x^2-4) = (x+1)(x-1)(x+2)(x-2)$

Tableau de signe :

x	$-\infty$		-2		-1		1		2		$+\infty$
$x+1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$		$-$	0	$-$		$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$P(x)$		$+$		$-$		$+$		$-$		$+$	

(I_1): $x^4 - 5x^2 + 4 < 0$, alors l'ensemble de solution est :

$$S =]-2;\ -1[\cup]1; 2[$$

2) (I_2): $4x^4 - 5x^2 + 1 < 0$

Soit $P(x) = 4x^4 - 5x^2 + 1$
$P(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^4 - 5x^2 + 1 = 0$
Posons $X = x^2 \Leftrightarrow 4X^4 - 5X^2 + 1 = 0$,
$\Delta = 9 > 0$ et $X_1 = \frac{1}{2}$, $X_2 = 1$

$$P(x) = 4(X - \frac{1}{4})(X-1)$$
$$= (4X-1)(X-1)$$
$$= (4x^2-1)(x^2-1)$$
$$P(x) = (2x-1)(2x+1)(x-1)(x+1)$$

Tableau de signe :

x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$2x+1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$2x-1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$P(x)$		$+$		$-$		$+$		$-$		$+$	

Et comme $4x^4 - 5x^2 + 1 \geq 0$, l'ensemble de solution est :

$$S =]-\infty; -1] \cup \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right] \cup [1;\ +\infty[$$

II_3 — Autres équation et inéquation de degré supérieur à 2.

3.1 — Équation de degré supérieur à 2.

Exemple :
Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation: (E): $x^4 - x^3 - 13x^2 + x + 12 = 0$
Posons : $P(x) = x^4 - x^3 - 13x^2 + x + 12$
$P(1) = 0 \Leftrightarrow 1$ est une racine de P donc il existe un polynôme Q de degré 3 tel que :
$\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = (x-1)Q(x)$
$P(-1) = 0 \Leftrightarrow -1$ est une racine de P donc il existe un polynôme R de degré 2 tel que :
$\forall x \in \mathbb{R}, Q(x) = (x+1)R(x)$, par suite, on a : $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = (x-1)(x+1)R(x)$
$\Longrightarrow P(x) = (x^2-1)R(x)$
Pour déterminer le polynôme R, on peut effectuer la division euclidienne de $P(x)$ par $x^2 - 1$

$$
\begin{array}{c|l}
x^4 - x^3 - 13x^2 + x + 12 & x^2 - 1 \\
\cline{2-2}
-x^4 + x^2 & x^2 - x - 12 \\
\hline
-x^3 - 12x^2 + x + 12 & \\
x^3 - x & \\
\hline
-12x^2 + 12 & \\
12x^2 - 12 & \\
\hline
0 &
\end{array}
$$

Donc $R(x) = x^2 - x - 12$
$\Longrightarrow P(x) = (x^2-1)(x^2 - x - 12)$
On factorise R en utilisant Δ
$R(x) = x^2 - x - 12$
$R(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 12 = 0$
$\Delta = 49 > 0, x_1 = -3$ et $x_2 = 4$
$\Longrightarrow R(x) = (x+3)(x-4)$
$P(x) = (x^2-1)R(x) \Longrightarrow P(x) = (x-1)(x+1)(x+5)(x-4)$
$P(x) = 0$, (E) admet pour ensemble de solution :

$$S = \{-3;\ -1; 1; 4\}$$

3.1 – Inéquation de degré supérieur à 2
Exemple :
Soit P, le polynôme défini par ; $P(x) = x^4 + x^3 - 5x^2 + x - 6$
a) Calculer $P(-3)$ et $P(2)$, que peut-on conclure ? En déduire une factorisation de $P(x)$;
b) Résoudre dans $\mathbb{R}$; (I): $x^4 + x^3 - 5x^2 + x - 6 < 0$
Solution :
a) Calculons $P(-3)$ et $P(2)$
- $P(-3) = 81 - 27 - 45 - 3 - 6 = 0$
  $P(-3) = 0$
- $P(2) = 16 + 8 - 20 + 2 - 6 = 0$
  $P(2) = 0$

$P(-3) = 0$ et $P(2) = 0$, alors -3 et 2 sont les racines de P.

Factorisons le polynome P.

On a : $P(x) = (x+3)(x-2).\, Q(x)$ où Q est un polynôme du second degré.

Pour déterminer le polynôme Q, on se propose d'utiliser la méthode des coefficients indéterminés.

On pose : $Q(x) = ax^2 + bx + C$

On a: $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = (x+3)\,(x-2)\,(ax^2 + bx + c$

$$= (x^2 + x - 6)\,(ax^2 + bx + c)$$

$$= ax^4 + bx^3 + Cx^2 + ax^3 + bx^2 + Cx - 6ax^2 - 6bx - 6c$$

$$P(x) = ax^4 + (a+b)\,x^3 + (-6a + b + C)\,x^2 + (-6b + C)\,x - 6c$$

Par identification, on a: $\begin{cases} a = 1 \\ a + b = 1 \\ -6a + b + c = -5 \\ -6b + c = 1 \\ -6C = -6 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ c = 1 \end{cases}$

Donc $\boldsymbol{P(x) = (x+3)(x-2)(x^2 + 1)}$

b) Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $(E) : x^4 + x^3 - 5x^2 + x - 6 < 0$

$x^4 + x^3 - 5x^2 + x - 6 < 0 \Leftrightarrow P(x) < 0$,

Or $P(x) = (x+3)(x-2)(x^2 + 1)$ et $\forall\, x \in \mathbb{R},\ x^2 + 1 > 0$

Donc $P(x)$ est du signe de $(x+3)(x-2)$

Tableau de signe

x	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+3$		$-$	0	$+$		$+$	
$(x+3)(x-2)$		$+$		$-$		$+$	
$P(x)$		$+$				$+$	

Comme $x^4 + x^3 - 5x^2 + x - 6 < 0$, alors l'ensemble des solutions de l'inéquation est :

$$S =]-3; 2[$$

II_4 – <u>Équation et inéquations irrationnelles</u>

4.1 – <u>Équation irrationnelle</u>

On appelle équation irrationnelle, c'est une équation du type: $\sqrt{p(x)} = q(x)$

<u>Méthodes 1</u> :

Résoudre l'équation $\sqrt{p(x)} = q(x)$, revient à résoudre le système suivant : $\begin{cases} p(x) \geq 0 \\ q(x) \geq 0 \\ p(x) = q^2(x) \end{cases}$

<u>Méthodes 2</u> : $\sqrt{p(x)} = q(x) \Leftrightarrow p(x) = q^2(x)$

Résoudre l'équation $p(x) = q^2(x)$ et prendre parmi les solutions, celles qui vérifient l'équation $\sqrt{p(x)} = q(x)$.

<u>Exemple</u> :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : (E): $\sqrt{(x+1)(3-x)} = 3x - 1$

$$\sqrt{(x+1)(3-x)} = 3x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)(3-x) \geq 0 \\ 3x-1 \geq 0 \\ (x+1)(3-x) = (3x-1)^2 \end{cases}$$

- $(x+1)\,(3-x) \geq 0$

Tableau de signe de $(x+1)\,(3-x)$:

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$3-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$P(x)$		$-$		$+$		$-$	

Comme $(x+1)\,(3-x) \geq 0$, alors $S_1 = [-1; 3]$

- $3x-1 \geq 0 \Longrightarrow x \geq \frac{1}{3}$, alors $S_1 = \left[\frac{1}{3};\ +\infty\right[$
- $(x+1)(3-x) = (3x-1)^2$

$\Longrightarrow 3x - x^2 + 3 - x = 9x^2 - 6x + 1$

$\Longrightarrow 10x^2 - 8x - 2 = 0$

$\Longrightarrow 5x^2 - 4x - 1 = 0$

$D = 9 > 0$; $x_1 = -\frac{1}{5}$ et $x_2 = 1 \Longrightarrow S_3 = \left\{-\frac{1}{5}; 1\right\}$

L'ensemble de solution de cette équation est l'intersection de S_1 ,S_2 et S_3.

On a : $S = S_1 \cap S_2 \cap S_3 = [-1; 3] \cap \left[\frac{1}{3}; +\infty\right[\cap \left\{-\frac{1}{5}; 1\right\}$

On a: $[-1; 3] \cap \left[\frac{1}{3}; +\infty\right[= \left[\frac{1}{3}; 3\right]$

$$\Longrightarrow \left[\frac{1}{3}; 3\right] \cap \left\{-\frac{1}{5}; 1\right\}, or\ -\frac{1}{5} \notin \left[\frac{1}{3}; 3\right]\ , seul\ 1\, \epsilon \left[\frac{1}{3}; 3\right]$$

Donc l'ensemble de solution de l'équation (E): $\sqrt{(x+1)(3-x)} = 3x-1$ est :

$S = \{1\}$

4.1 − <u>Inéquation irrationnelle</u>

On appelle inéquation irrationnelle, c'est une inéquation du type : $\sqrt{p(x)} < q$(x),

Méthode :

Résoudre cette inéquation, c'est résoudre le système suivant :

$$\sqrt{p(x)} < Q(x) \Leftrightarrow \begin{cases} p(x) \geq 0 \\ q(x) \geq 0 \\ p(x) = q^2(x) \end{cases}$$

<u>Exemple</u> :

Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation (I): $\sqrt{-2x^2+5x+3} < 2x + 1$

Contraintes sur l'inconnue à préciser si nécessaire

(I): $\sqrt{-2x^2+5x+3} < 2x + 1 < 2x + 1$

$$\sqrt{-2x^2+5x+3} < 2x + 1 \Leftrightarrow \begin{cases} -2x^2+5x+3 \geq 0 \\ 2x+1 \geq 0 \\ -2x^2+5x+3 < (2x+1)^2 \end{cases}$$

- $-2x^2 + 5x + 3 \geq 0$

$\Delta = 49 > 0$; $x_1 = 3$ et $x_2 = -\frac{1}{2}$

Donc $-2x^2 + 5x + 3 = -2(x + \frac{1}{2})(x - 3)$

Tableau de signe

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		3		$+\infty$
$x + \frac{1}{2}$		$-$	0	$+$		$+$	
$x - 3$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x + \frac{1}{2})(x - 3)$		$+$		$-$		$+$	
$P(x) = -2(x + \frac{1}{2})(x - 3)$		$-$		$\perp$		$-$	

$-2x^2 + 5x + 3 \geq 0$, alors $S_1 = [-\frac{1}{2}; 3]$

- $2x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{2}$, alors $S_2 = \left[-\frac{1}{2}; +\infty\right[$
- $-2x^2 + 5x + 3 < (2x+1)^2$

$\Leftrightarrow -2x^2 + 5x + 3 < 4x^2 + 4x + 1$

$\Leftrightarrow -6x^2 + x + 2 < 0$

$\Delta = 49 > 0$; $x_1 = \frac{2}{3}$ et $x_2 = -\frac{1}{2}$

$\Longrightarrow -6x^2 + x + 2 = -6\left(x - \frac{2}{3}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right)$

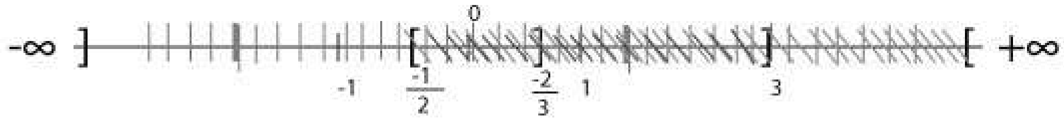
Tableau de signe

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
$x + \frac{1}{2}$		$-$	0	$+$		$+$	
$x - \frac{2}{3}$		$-$		$-$	0	$+$	
$\left(x - \frac{2}{3}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right)$		$+$		$-$		$+$	
$P(x) = -6\left(x - \frac{2}{3}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right)$		$-$		$+$		$-$	

$-6x^2 + x + 2 < 0$, alors : $S_3 = \left]-\infty; -\frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{2}{3}; +\infty\right[$

Alors l'ensemble de solution de (I) est :

$S = S_1 \cap S_2 \cap S_3 = \left[-\frac{1}{2}; 3\right] \cap \left[-\frac{1}{2}; +\infty\right[\cap \left(\left]-\infty; -\frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{2}{3}; +\infty\right[\right)$



Donc $S = \left]\frac{2}{3};\ 3\right]$

III. SYSTEME LINEAIRES D'EQUATIONS ET D'INEQUATIONS

III_1 – <u>Système de trois équations à trois inconnues</u>

On appelle système linéaire ou système de trois équations du 1er degré à trois inconnues, c'est le système du Type (Σ): $\begin{cases} ax+by+cz=d \\ a'x+b'y+c'z=d' \\ a''x+b''y+c''z=d'' \end{cases}$ $où\ \ x, y\ et\ z\ sont\ \ des\ inconnues$

Résoudre ce système, c'est déterminer tous les triplets (x, y, z) de nombres réels qui vérifient les trois équations.

Nous utiliserons quatre (4) méthodes pour la résolution d'un tel système.

- La méthode par Substitution ;
- La méthode par Pivot de GAUSS ;
- La méthode de CRAMER ;
- La méthode de SAIRUS.

1.1 –Résolution par Substitution

<u>Exemple</u> :

Résoudre dans les systèmes d'équations suivants :

a) (Σ): $\begin{cases} x+y-2z=7 \\ 2x-y+z=0 \\ 3x+y\ +z=8 \end{cases}$

b) (Σ): $\begin{cases} 2x-y-2z=6 \\ x+y-z=1 \\ x-5y-z=9 \end{cases}$

<u>Solution</u> :

Résolvons les systèmes d'équations suivants

a) (Σ): $\begin{cases} x+y-2z=7 & (1) \\ 2x-y+z=0 & (2) \\ 3x+y\ +z=8 & (3) \end{cases}$

De l'équation (3), on tire $z = -3x - y + 8 \quad (4)$

On remplace z par $-3x - y + 8$ dans les équations (1) et (2)

On obtient (Σ): $\begin{cases} x+y-2(-3x-y+8)=7 & (1') \\ 2x-y-3x-y+8=0 & (2') \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 7x+3y=23 & (1') \\ -x-2y=-8 & (2') \end{cases}$

$(2') \Rightarrow x = -2y + 8\ (3')$ et on remplace x par $-2y + 8$ dans $(1')$

$\Rightarrow 7(-2y+8) + 3y = 23$

$\Rightarrow -14y + 56 + 3y = 23$

$\Rightarrow -11y = -33$

$$\Rightarrow \boldsymbol{y = 3}$$

Remplaçons y par 3 dans $(3')$.

$(3')$: $x = -2y + 8 \Rightarrow x = -2 \times 3 + 8 = 2$

$$\Rightarrow \boldsymbol{x = 2}$$

On remplace x et y par leurs valeurs dans (4).

(4): $z = -3x - y + 8 \Rightarrow z = -3 \times 2 - 3 + 8 = -1$

$$\Rightarrow \boldsymbol{z = -1}$$

Donc le triplet de solution est : $\boldsymbol{S} = \{(\boldsymbol{2}; \boldsymbol{3}; \boldsymbol{-1})\}$

b) (Σ): $\begin{cases} 2x - y - 2z = 6 \ ① \\ x + y - z = 1 \ ② \\ x - 5y - z = 9 \ ③ \end{cases}$

$① \Rightarrow y = 2x - 2y - 6$

Remplaçons y par $2x - 2y - 6$ dans les équations (2) et (3)

On obtient (Σ): $\begin{cases} x + 2x - 2z - 6 - z = 1 \\ x - 5(2x - 2x - 2z - 6) - z = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 3z = 7 \\ -9x - 9z = -21 \end{cases}$

Le système $\begin{cases} 3x - 3z = 7 \\ -9x - 9z = -21 \end{cases}$ a pour solutions, tous les couples $(x; z)$ des nombres réels tels que : $3x - 3z = 7$

Donc on donne à l'une des inconnues une valeur arbitraire, par exemple :

$z = \alpha \Leftrightarrow 3x = 3\alpha + 7 \Rightarrow x = \alpha + \dfrac{7}{3}$

Et : $y = 2x - 2z - 6 \Rightarrow y = 2\left(\alpha + \frac{7}{3}\right) - 2\alpha - 6$

$$\Rightarrow y = 2\alpha + \frac{14}{3} - 2\alpha - 6$$

$$\Rightarrow y = -\frac{4}{3}$$

On obtient (Σ): $\begin{cases} x = \frac{7}{3} + \alpha \\ y = -\frac{4}{3} \\ z = \alpha \end{cases}$ $, \alpha \in \mathbb{R}$

Donc l'ensemble des triplets de solutions de (Σ) est : $\boldsymbol{S} = \left\{\boldsymbol{\frac{7}{3} + \alpha, -\frac{4}{3}, \alpha};\ (\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R})\right\}$

1.2 –<u>Résolution par le pivot de Gauss</u>

La méthode par le Pivot de Gauss est aussi appelée méthode par combinaison qui nécessite de vérification, mais qui transforme un système initial en un autre système équivalent ayant même ensemble de solutions.

<u>Exemple</u> :

Résoudre les systèmes d'équations suivants :

a) (Σ): $\begin{cases} x - 5y - 7z = 3 \\ 5x + 3y + z = 3 \\ 3x + y - 2z = -1 \end{cases}$ b) (Σ): $\begin{cases} x + y - 2z = 1 \\ x + 2y + z = 1 \\ -2x + y + z = 1 \end{cases}$

<u>Solution</u> :

Résolvons les systèmes d'équations suivants :

a) (Σ): $\begin{cases} x-5y-7z=3 & ① \\ 5x+3y+z=3 & ② \\ 3x+y-2z=-1 & ③ \end{cases}$

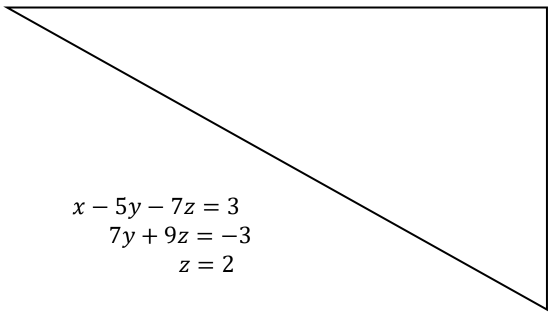
- On élimine x dans ② *et* ③ par combinaison linéaire de chacune de ces deux équations avec l'équation ① :

On a: (Σ): $\begin{cases} x-5y-7z=3 & ① \\ 5x+3y+z=3 & ② \\ 3x+y-2z=-1 & ③ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-5y-7z=3 & \\ 28y+36z=-12 & \rightarrow ② - \mathbf{5}\times ① \\ 16y+19z=-10 & \rightarrow ③ - \mathbf{3}\times ① \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x-5y-7z=3 & ① \\ 7y+9z=-3 & ②' \\ 16y+19z=-10 & ③' \end{cases}$

- On élimine y dans ③$'$ par combinaison linéaire de ②$'$ *et* ③$'$

On obtient le système triangulaire suivant : $\begin{cases} \boldsymbol{x-5y-7z=3} \\ \boldsymbol{7y+9z=-3} \\ \boldsymbol{z=2} \rightarrow \mathbf{7}\times ③' - \mathbf{16}\times ②' \end{cases}$



Système de Gauss

On résout le système triangulaire en commençant par $z=2$, tout en remontant.

- $7y+9z=-3 \Longrightarrow 7y=-3-9\times 2$
  $\Longrightarrow 7y=-21$
  $\Longrightarrow \boldsymbol{y=-3}$
- $x-5y-7z=3$
  $\Longrightarrow x-5(-3)-7\times 2=3$
  $\Longrightarrow x+15-14=3$
  $\Longrightarrow x=3-1$
  $\Longrightarrow \boldsymbol{x=2}$

L'ensemble de triplets de solution est : $\boldsymbol{S}=\{(\mathbf{2};\ \mathbf{-3};\mathbf{2})\}$

b) (Σ): $\begin{cases} x+y-2z=1 \\ x+2y+z=1 \\ -2x+y+z=1 \end{cases}$

On a: $\begin{cases} x+y-2z=1 & ① \\ x+2y+z=1 & ② \\ -2x+y+z=1 & ③ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y-2z=1 & \\ 3y-3z=0 & \rightarrow ① - ② \\ 3y+3z=3 & \rightarrow 2\times ① + ③ \end{cases}$

Le système $\begin{cases} 3y-3z=0 \\ 3y-3z=3 \end{cases}$ n'a pas de solutions donc le système (Σ): $\begin{cases} x+y-2z=1 \\ x+2y+z=1 \\ -2x+y+z=1 \end{cases}$ n'admet pas de solutions. L'ensemble de triplets de solution est un ensemble vide; $S=\emptyset$

1.3 −<u>Résolution par la méthode de CRAMER</u>

Considérons le système d'équations (Σ): $\begin{cases} ax+by+cz=d \\ a'x+b'y+c'z=d' \\ a''x+b''y+c''z=d'' \end{cases}$

Pour résoudre ce système par la méthode de CRAMER, on procède de la manière suivante :

- On calcule le déterminant du système Δ_S selon la disposition suivante :

$$\Delta_S = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} b' & c' \\ b'' & c'' \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} a' & c' \\ a'' & c'' \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} a' & b' \\ a'' & b'' \end{vmatrix}$$

$$\boxed{\Delta_S = a(b'c'' - b''c') - b(a'c'' - a''c') + c(a'b'' - a''b')}$$

- On calcule les discriminants par rapport à $x, y\ et\ z$ selon les dispositions ci-dessous :

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} d & b & c \\ d' & b' & c' \\ d'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = d\begin{vmatrix} b' & c' \\ b'' & c'' \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} d' & c' \\ d'' & c'' \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} d' & b' \\ d'' & b'' \end{vmatrix}$$

$$\boxed{\Delta_x = d(b'c'' - b''c') - b\left(d'^{c''} - d''c'\right) + c\left(d'^{b''} - d''b'\right)}$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a & d & c \\ a' & d' & c' \\ a'' & d'' & c'' \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} d' & c' \\ d'' & c'' \end{vmatrix} - d\begin{vmatrix} a' & c' \\ a'' & c'' \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} a' & d' \\ a'' & d'' \end{vmatrix}$$

$$\boxed{\Delta_y = a(d'c'' - d''c') - d(a'c'' - a''c') + c(a'd'' - a''d')}$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} a & b & d \\ a' & b' & d' \\ a'' & b'' & d'' \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} b' & d' \\ b'' & d'' \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} a' & d' \\ a'' & d'' \end{vmatrix} + d\begin{vmatrix} a' & b' \\ a'' & b'' \end{vmatrix}$$

$$\boxed{\Delta_z = a(b'd'' - b''d') - b(a'd'' - a''d') + d\,(a'b'' - a''b')}$$

- En fin, on détermine les valeurs de x, y et z par les formules suivantes :

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta_S}; \qquad y = \frac{\Delta_y}{\Delta_S}; \qquad z = \frac{\Delta_z}{\Delta_S}$$

<u>Remarques</u> :

- Si $\Delta_S \neq 0$, alors le système admet un triplet de nombre réels $\{(x; y; z)\}$, solutions du système et la méthode de CRAMER est applicable.
- Si $\Delta_S = 0$, alors la méthode de CRAMER n'est pas applicable, par conséquent :
  - ✓ Si l'un des déterminants par rapport à $x, y\ et\ z$ est non nul, c'est-à-dire $\Delta_x \neq 0$ ou $\Delta_y \neq 0$ ou $\Delta_z \neq 0$, alors $S = \emptyset$;
  - ✓ Si tous les déterminants par rapport à x, y et z sont nuls $(\Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0)$, alors le système admet une infinité de solutions réelles et $S = \mathbb{R}^3$.

<u>Exemple</u> :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les systèmes d'équations suivants :

(Σ_1): $\begin{cases} x+2y+3z=14 \\ 2x-y+z=3 \\ 3x+2y-4z=-5 \end{cases}$ (Σ_2): $\begin{cases} 2x+3y+4z=6 \\ x-y+3z=5 \\ 4x+11y+6z=6 \end{cases}$ (Σ_3): $\begin{cases} x+y-z=2 \\ 2x+y-3z=0 \\ x-y-3z=-6 \end{cases}$

Solution :

Résolvons dans $\mathbb{R}$ les systèmes d'équations suivant :

$$(\Sigma_1): \begin{cases} x + 2y + 3z = 14 \\ 2x - y + z = 3 \\ 3x + 2y - 4z = -5 \end{cases}$$

Procédons par la méthode de CRAMER :

- Calculons le discriminant du système Δ_S

$$\Delta_S = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 4 - 2 - 2(-8 - 3) + 3(4 + 3)$$

$$\boldsymbol{\Delta_S = 45}$$

- Calculons le déterminant par rapport à x, y et z.

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 14 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 1 \\ -5 & 2 & -4 \end{vmatrix} = 14\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -5 & -4 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 14(4 - 2) - 2(-12 + 5) + 3(6 - 5)$$

$$\boldsymbol{\Delta_x = 45}$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 14 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & -5 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -5 & -4 \end{vmatrix} - 14\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -5 \end{vmatrix}$$

$$= -12 + 5 - 14(-8 - 3) + 3(-10 - 9)$$

$$\boldsymbol{\Delta_x = 90}$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 14 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} + 14\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 5 - 6 - 2(-10 - 9) + 14(4 + 3)$$

$$\boldsymbol{\Delta_x = 135}$$

- Déterminons x, y et z. On a :
  - $x = \frac{\Delta_x}{\Delta_S} = \frac{45}{45} = 1$
  - $y = \frac{\Delta_y}{\Delta_S} = \frac{90}{45} = 2$
  - $z = \frac{\Delta_z}{\Delta_S} = \frac{135}{45} = 3$

  L'ensemble de triplets de solutions est : $S = \{(1; 2; 3)\}$

1.4 –<u>Résolution par la méthode de SAIRUS</u>

Considérons le système d'équations (Σ): $\begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \\ a''x + b''y + c''z = d'' \end{cases}$

Pour résoudre un système par la méthode de SAIRUS, on procède de la manière suivante :

- On calcule le déterminant du système Δ_S selon la disposition suivante :

$$\Delta_S = \begin{vmatrix} a & b & c & a & b \\ a' & b' & c' & a' & b' \\ a'' & b'' & c'' & a'' & b'' \end{vmatrix}$$

$$\boxed{\Delta_S = ab'c'' + bc'a'' + ca'b'' - (a''b'c + b''c'a + c''a'b)}$$

- On calcule les discriminants par rapport à $x, y\ et\ z$ suivants, selon les dispositions suivants et les procédures ci-dessus :

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} d & b & c & d & b \\ d' & b' & c' & d' & b' \\ d'' & b'' & c'' & d'' & b'' \end{vmatrix}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\Delta_x = db'c'' + bc'd'' + cd'b'' - (d''b'c + b''c'd + c''d'b)}$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a & d & c & a & d \\ a' & d' & c' & a' & d' \\ a'' & d'' & c'' & a'' & d'' \end{vmatrix}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\Delta_y = ad'c'' + dc'a'' + ca'd'' - (a''d'c + d''c'a + c''a'd)}$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} a & b & d & a & b \\ a' & b' & d' & a' & b' \\ a'' & b'' & d'' & a'' & b'' \end{vmatrix}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\Delta_z = ab'd'' + bd'a'' + da'b'' - (a''b'd + b''d'a + d''a'b)}$$

- En fin, on détermine les valeurs de x, y et z par les formules suivantes :

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta_S}; y = \frac{\Delta_y}{\Delta_S}; z = \frac{\Delta_z}{\Delta_S} \text{ et } S = \{(x; y; z)\}$$

<u>Remarques</u> :

- Si $\Delta_S \neq 0$, alors le système admet un triplet de nombre réels $\{(x; y; z)\}$, solutions du système et la méthode de SAIRUS est applicable.
- Si $\Delta_S = 0$, alors la méthode de SAIRUS n'est pas applicable, par conséquent :
  - ✓ Si l'un des déterminants par rapport à $x, y\ et\ z$ est non nul, c'est-à-dire $\Delta_x \neq 0$ ou $\Delta_y \neq 0$ ou $\Delta_z \neq 0$, alors $S = \emptyset$;
  - ✓ Si tous les déterminants par rapport à x, y et z sont nuls ($\Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$), alors le système admet une infinité de solutions réelles et $S = \mathbb{R}^3$.

<u>Exemple</u> :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les système suivants

$$(\Sigma_1): \begin{cases} 3x - 2y + 5z = 7 \\ 2x + y - z = -6 \\ x - y + z = 0 \end{cases} \qquad (\Sigma_2): \begin{cases} 2x + 3y + 4z = 6 \\ x - y + 3z = 5 \\ 4x + 11y + 6z = 6 \end{cases} \qquad (\Sigma_3) \begin{cases} x + y - z = 2 \\ 2x + y - 3z = 0 \\ x - y - 3z = -6 \end{cases}$$

<u>Solution</u> :

Résolvons dans $\mathbb{R}$ les système suivants en procédons par la méthode de SAIRUS :

$$(\Sigma_1): \begin{cases} 3x - 2y + 5z = 7 \\ 2x + y - z = -6 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$$

- Calculons le discriminant du système Δ_S

$$\Delta_S = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 5 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$= 3 + 2 - 10 - (5 + 3 - 4) = -9$

$\boldsymbol{\Delta_S = -9}$

- De la même manière, on calcule le déterminant par rapport à $x, y\ et\ z$.

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 7 & -2 & 5 & 7 & -2 \\ -6 & 1 & -1 & -6 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 7 + 30 - (7 - 12)$$

$\boldsymbol{\Delta_x = 18}$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 7 & 5 & 3 & 7 \\ 2 & -6 & -1 & 2 & -6 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -18 - 7 — (-30 + 14)$$

$\boldsymbol{\Delta_y = -9}$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 7 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & -6 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 12 - 14 - (7 + 18)$$

$\boldsymbol{\Delta_z = -27} \Rightarrow z = \frac{27}{-9} = -3$

- Déterminons $x, y\ et\ z$. On a :
  - $x = \frac{\Delta_x}{\Delta_S} = \frac{18}{-9} = -2$
  - $y = \frac{\Delta_y}{\Delta_S} = \frac{-9}{-9} = 1$
  - $z = \frac{\Delta_z}{\Delta_S} = \frac{-27}{-9} = 3$

L'ensemble de triplets de solutions est : $S = \{(-2; 1; 3)\}$

III_2 – <u>Système d'inéquation linéaire</u>

Exemple :

Résoudre dans $\mathbb{R}$, le système d'inéquation suivant (Σ): $\begin{cases} -x + y + 3 \geq 0 \\ x + y - 1 \geq \\ -2x + y - 1 \geq 0 \end{cases}$

Soit : $\begin{cases} D_1 : -x + y + 3 = 0 \\ D_2 : x + y - 1 = 0 \\ D_3 : -2x + y - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D_1 : y = x - 3 \\ D_2 : y = -x + 1 \\ D_3 : y = 2x + 1 \end{cases}$

$D_1 : y = x - 3$,

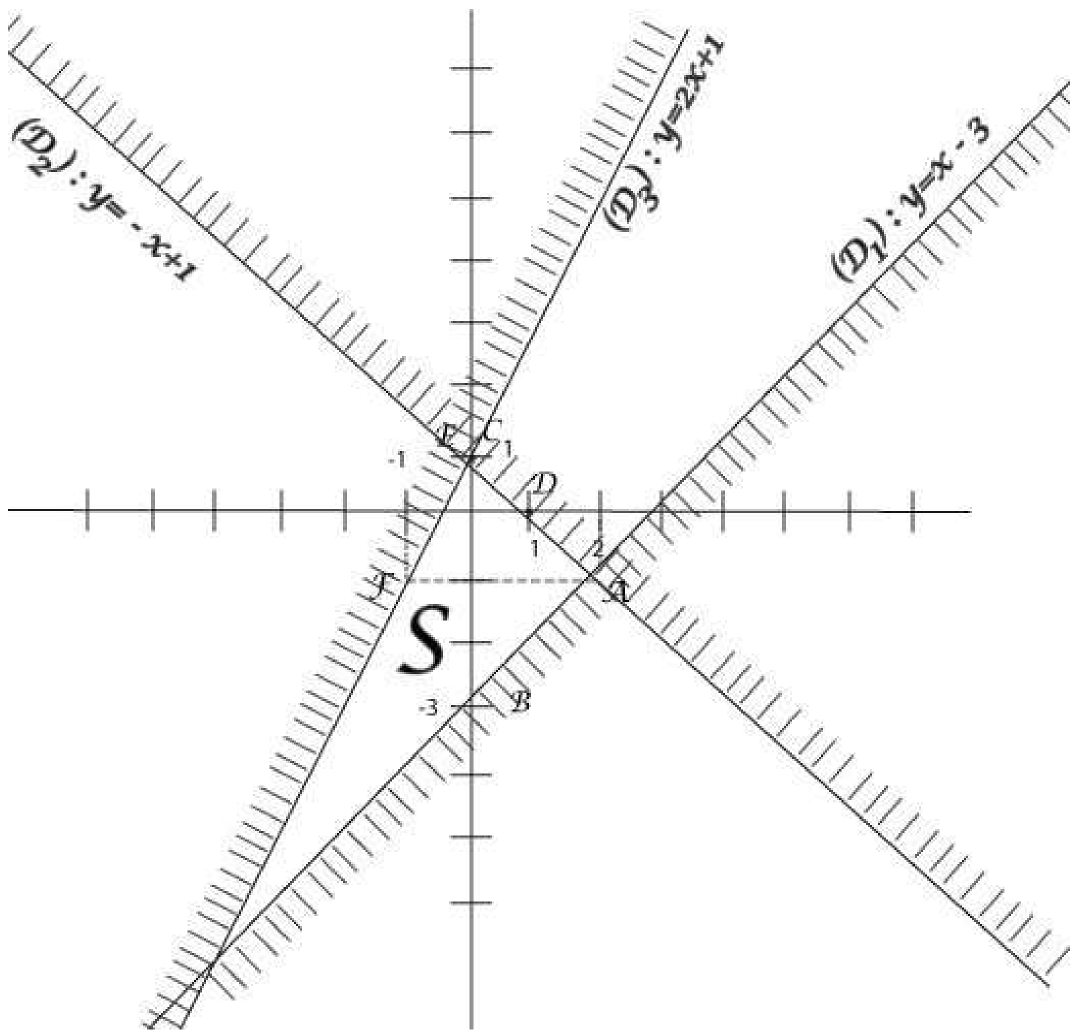
x	2	0
y	-1	-3

$D_2 : y = -x + 1$,

x	0	1
y	1	0

$D_3: y = 2x + 1,$

x	0	-1
y	1	-1



Chapitre 2 : Limites et continuité

I. Approche intuitive de la notion de limite

$\mathbf{I_1}$ −Limite d'une fonction en l'infinie

$\mathbf{1.1}$ −Limite infinie

Pour les grandes : valeurs de x, les fonctionx^2, $x^3, x^4, \dots, x^n (n \in \mathbb{N})$ prennent des valeurs Suffisamment grandes. On dit que ces fonctions tendent vers l'infini lorsque x tend vers l'infini et on note :

- $\lim_{n\to+\infty} x^2 = +\infty$,
- $\lim_{n\to-\infty} x^2 = +\infty$

<u>NB</u> **:** Le symbole $\infty = +\infty\ ou - \infty$

<u>Notation :</u>

On écrit : $\lim_{n\to+\infty}(fx) = +\infty$,

On lite : « limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$ est égale à ∞»

$\mathbf{1.2}$ −Limite en infini des fonctions élémentaires

Nous Admettons les résultats suivants :

- $\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} k = k \\ \lim\limits_{n\to-\infty} k = k \end{cases}$
- Exemple : $\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} 3 = 3 \\ \lim\limits_{n\to-\infty} 7 = 7 \end{cases}$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} x = +\infty$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$
- $\lim\limits_{n\to-\infty} x = -\infty$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} x^n = +\infty$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} x^3 = +\infty$
- $\lim\limits_{n\to-\infty} x^n = \begin{cases} +\infty\ si\ x\ est\ pair \\ -\infty\ si\ x\ est\ inpair \end{cases}$
- $\lim\limits_{n\to-\infty} x^3 = -\infty$

On remarque que $\frac{1}{x}$ est très voisin de 0 pour des grandes valeurs positives de x.

Alors, on a :

- $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{x^n} = 0, (n \in \mathbb{N}^*)$
- $\lim\limits_{n\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$
- $\lim\limits_{n\to-\infty} \frac{1}{x^n} = 0, (n \in \mathbb{N}^*)$

<u>Remarque :</u>

- Une fonction lorsqu'elle admet une limite en $+\infty$, ou en $-\infty$ cette limite est unique.
- Certaines fonctions n'admettent pas de limite en infini, ainsi la fonction mantisse, définie par $m(x) = x - E(x)$, n'admet de limite ni en $+\infty$, ni en $-\infty$,

$\mathbf{I_2}$ −Limite d'une fonction en x_0

$\mathbf{2.1}$ −Limite infinie en x_0

Soit $f(x) = \frac{1}{x^2}$, une fonction définie sur $\mathbb{R}^*$

On examine le comportement de f lorsque x se rapproche de 0.

x	$-0{,}01$	$-0{,}001$	0	$0{,}001$	$0{,}01$
$\frac{1}{x^2}$	10^6	10^4	$+\infty$	10^4	10^6

- $x = -0{,}01 \Longrightarrow\ x^2 = 0{,}0001\ et\ \frac{1}{x^2} = \frac{1}{0{,}0001} = 10^4$
- $x = -0{,}001 \Longrightarrow\ x^2 = 0{,}000001\ et\ \frac{1}{x^2} = \frac{1}{0{,}000001} = 10^6$

De même pour $x = 0{,}01\ et\ x = 0{,}001$, on obtient respectivement $10^4\ et\ 10^6$

On Constate que $f(x)$ prend des valeurs positives de plus en plus grandes lorsque x se rapproche de 0. Donc $f(x)$ tend vers $+\infty$ $x\ tend\ vers\ 0$ et on écrit :

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2} = \frac{1}{0} = +\infty$$

Propriété :

Soit f une fonction définie en $x_{0.}$

Si f admet une limite en x_0, alors : $\boldsymbol{\lim_{x\to 0} f(x)} = \boldsymbol{f}(x_0)$

Généralement, nous admettons les résultats suivants :

- $\begin{cases} \lim\limits_{x\to a} kx = ka \\ \lim\limits_{x\to a} a^n = a^n, (Si\ n \in \mathbb{N}) \\ \lim\limits_{x\to a} \sqrt{x} = \sqrt{a},\ (si\ a\ \geq 0) \end{cases}$
- Exemples : $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 2} 3x = 3\times 2 = 6 \\ \lim\limits_{x\to 2} x^3 = 2^3 = 8 \\ \lim\limits_{x\to 4} \sqrt{x} = \sqrt{4} = 2 \end{cases}$

<u>Exemple</u> :

Soit $f(x) = x^2 + 3$; on a :

$\lim\limits_{x\to 1} f(x) = f(1) = 1^2 + 3 = 4$ ou $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1}(x^2+3) = 1^2 + 3 = 4$

Remarque :

- Lorsqu'une fonction admet une limite en x_0, cette limite est unique.
- Une fonction en x_0, n'admet pas nécessairement une limite en x_0. Ainsi la fonction g définie par : $\begin{cases} g(x) = \frac{\sin x}{x}, n \in \mathbb{R}^* \\ g(0) = \frac{1}{2} \end{cases}$ n'admet pas de limite en o.
- Une fonction f n'admet pas de limite en x_0 s'il existe un intervalle ouvert K de centre x_0 tel que $D_f \cap K = \emptyset$

2. 2 −Limite à droite limite à gauche

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I.

- On dite que f admet une limite l en x_0 à droite si et seulemnet si la restriction de f à $I \cap]x_0;\ +\infty[$ admet en x_0 cette limite.

  On note : $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = l$ ou $\lim\limits_{x\to x_0>} f(x) = l;\ (x > x_0)$
- On dite que f admet en $x_0 \in I$ une limite l'' à gauche si et seulement si la restriction de f à $\grave{a}\ I \cap \left]-\infty\ ; x_0\ \right[$ admet en x_0 cette limite l'.

  On note : $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = l'$ ou $\lim\limits_{x\to x_0<} f(x) = l';\ (x < x_0)$

<u>Exemple</u> :

Soit $f(x) = \frac{1}{x}$ et $D_f =]-\infty; 0[\cup]0;\ +\infty[$

1) $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^+}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{0^+} = +\infty$ ou $\lim\limits_{x\to x_0>}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{0^>} = +\infty$
2) $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^-}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{0^-} = -\infty$ ou $\lim\limits_{x\to x_0<}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{0^<} = -\infty$

II. Calculs de limites

II_1– Propriété de comparaison

1.1 – Majoration, minoration

Propriétés

Soit f une fonction.

- S'il existe une fonction g $telle\ que\ f \geq g\ sur\ un\ intervalle$ $]x_0;+\infty[$ et
$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty, alors \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$
- S'il existe une fonction $g\ telle\ que\ f \leq g\ sur\ un\ intervalle$ $]x_0;+\infty[$ et
$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty, alors \lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty.$$

Exemple :

Soit $f(x) = |x|(x+1)$

On a : $Df = \mathbb{R}$ et $\forall\, x \in\ ]0\,;+\infty[, f(x) = x^2 + x.$

Donc $\forall\, x\ \in]0\,;\ +\infty[$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$

On en déduit que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty, \forall x \in]-\infty\,;\ 0[$

1.2- Encadrement

Propriété :

Soit f une fonction, g, h des fonctions telles que $g \leq f\ \leq h$ sur un intervalle $]x_0;+\infty[$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = l$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$

Cette propriété est connue sous le nom de théorème de deux gendarmes ou théorème de sandwich.

Exemple :

Soit $f(x) = x^2 + \ cos\ x.$

Calculons la limite de f en $+\infty$ et en $-\infty$

$Df = \mathbb{R}$ et $\forall\, x \in \mathbb{R}$, On a : $-1 \leq \cos x \leq 1 \Leftrightarrow x^2 - 1 \leq x^2 + cos\ x \leq x^2 + 1$

On pose $g(x) = x^2 - 1$ et $h(x) = x^2 + 1$ telles que $g \leq f \leq h$

Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

De même : $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

On en déduit que $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$

1.3- Comparaison de limites:

Propriété

Soit $f et\ g$ deux fonctions telles que: $f \leq g$ sur un intervalle $I =]xo;+\infty[$.

Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = l'$, alors $l \leq l'$

II_2 – Limites et opérations sur les fonctions.

2.1**- Limite de la somme de deux fonctions.**

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$	l'	l'	l'	l'	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to x_0} (f+g)(x)$	$l = l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	? ind

Exemple :

On considère les fonctions $(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}$, $g(x) = x - 1 + \frac{1}{x}$ et $h(x) = x^2 + x$

1) $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) = 0 + \frac{1}{0^+} = 0 + (+\infty) = +\infty$
   Donc $\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$

2) $\lim_{x \to 0^-} g(x) = \lim_{x \to 0^-} \left(x - 1 + \frac{1}{x}\right) = 0 - 1 + \frac{1}{0^-} = -1 + (-\infty) = -\infty$
   Donc $\lim_{x \to 0^-} g(x) = -\infty$
3) $\lim_{x \to +\infty} h(x) = \lim_{x \to +\infty} (x^2 + x) = +\infty + (+\infty) = +\infty$
   Donc $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

2.2- **Limite du produit de deux fonctions**

$\lim_{x \to x_0} f(x)$	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim_{n \to x_0} g(x)$	l'	$l'(l' \neq 0)$	$l'(l' \neq 0)$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_{x \to x_0} (fg)(x)$	$l\ l'$	$\begin{cases} +\infty \ si\ l' > 0 \\ -\infty, si\ l' < 0 \end{cases}$	$\begin{cases} -\infty \ si\ l' > 0 \\ +\infty, si\ l' < 0 \end{cases}$	? ind	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$

Remarque :
On en déduit que si $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$, alors $\forall\, x \in \mathbb{N}^*$, on a : $\lim_{x \to x_0} f(x)^n = l^n$

Exemple :
On considère les fonctions suivantes : $f(x) = -3x^5$; $g(x) = x^5 + x$ et $h(x) = -3x$;
1) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} (-3x^5) = -3(-\infty)^5 = -\infty,$
$$\Longrightarrow \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty,$$
2) $g(x) = x^2 + x = x^2\left(1 + \frac{1}{x}\right)$
$$\Longrightarrow \lim_{x \to -\infty} g(x) = \lim_{x \to -\infty} x^2\left(1 + \frac{1}{x}\right) = (-\infty)^2\left(1 + \frac{1}{+\infty}\right) = +\infty\big(1 + (0)\big) = +\infty$$
$$\Longrightarrow \lim_{x \to -\infty} g(x) = +\infty$$
3) $\lim_{x \to -2} h(x) = \lim_{x \to -2} (3x) = 3 \times 2 = 6$
$$\Longrightarrow \lim_{x \to -2} h(x) = 6$$
2.3- **Limite de l'inverse d'une fonction.**

$\lim_{x \to x_0} f(x)$	$l'(l' \neq 0)$	$+\infty$ ou $-\infty$	0 et $f(x) > 0$	0 et $f(x) < 0$
$\lim_{x \to x_0} \left(\frac{1}{f}\right)(x)$	$\frac{1}{l}$	0	$+\infty$	$-\infty$

Exemple :
On donne $f(x) = \frac{1}{x-3}$. $Df = \mathbb{R} - \{3\}$
On a : $\lim_{x \to 3}(x - 3) = 0,\ or : \begin{cases} f(x) < 0, Si\ \ x < 0 \\ f(x) > 0, Si\ \ x > 0 \end{cases}$

Alors $\lim\limits_{x \to -3^+} = \frac{1}{0^+} = +\infty$ $et \lim\limits_{x \to -3^-} f(x) = \frac{1}{0^-} = -\infty$

Donc $f(x)$ n'a pas de limite en 3.

NB : Cette propriété est aussi avalable pour la limite du quotient de deux fonctions.

On a : $\lim\limits_{x \to x_0} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \lim\limits_{x \to x_0} \left(f \times \frac{1}{g}\right)(x)$ et on applique les mêmes propriétés sur les deux fonctions.

2.4- Limite de la valeur absolue d'une fonction.

Exemple :

Soit $f(x) = x^2 - 2$

On a : $\lim\limits_{x \to 0} |f(x)| = \lim\limits_{x \to 0} |x^2 - 2| = |-2| = |2| = 2$

2.5- Limite de la racine d'une fonction :

Propriété :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, x_0 un élément de I et l un réel donné.

- Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l \Longrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \sqrt{f(x)} = \sqrt{l}$
- Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty \Longrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \sqrt{f(x)} = \sqrt{+\infty} = +\infty$

Exemple :

Soit $g(x) = x^2 + 2$

Calculons la limite de g en 0 et en $+\infty$.

On a:

$\lim\limits_{x \to 0} g(x) = 2 \iff \lim\limits_{x \to 0} \sqrt{g(x)} = \sqrt{2}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty \iff \lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{g(x)} = \sqrt{+\infty} = +\infty$

2.6- Limite de $\boldsymbol{x \longrightarrow f(ax + b)}$

2.6.1- propriété :

Soit f une fonction, x_0 un nombre réel et $\boldsymbol{x \longrightarrow ax + b}$ une fonction affine non constante.

La fonction $x \longrightarrow ax + b$ admet une limite en x_0 si et seulement si f admet une limite en $ax_0 + b$ et on a : $\lim\limits_{x \to x_0} f(ax + b) = \lim\limits_{u \to ax_0 + b} f(u)$, avec $u = ax + b$

NB: Dans $f(ax + b)$, on pose $u = ax + b$ et lorsque $x \to x_0$, alors $u \to ax_0 + b$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ est appelée limite de référence.

Exemple:

Calculons la limite de la fonction f définie par $f(x) = \frac{\sin(3x-6)}{3x-6}$ en 2.

Pour calculer la $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$, on pose : $u = 3x - 6$

Alors quand $x \longrightarrow 2$, $u \longrightarrow 0$, donc $\lim\limits_{x \to 2} \frac{\sin(3x-6)}{3x-6} = \lim\limits_{u \to 0} \frac{\sin u}{u}$

D'après la limite de référence, On a: $\lim\limits_{u \to 0} \frac{\sin u}{u} = 1$, et on en déduit que : $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 1$

$\mathbf{II_3}$ −Exemple de recherché de limite:

3.1- limite d'une fonction polynôme en l'infini.

Soit a un nombre réel et n un entier naturel.

On écrite : $\boldsymbol{\lim\limits_{x \to \infty} (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x^1 + a_o) = \lim\limits_{x \to \infty} a_n a^n}$

On dit que la limite en l'infini d'un polynôme est égale à la limite en l'infini de son monôme de plus haut degré.

Example:

1) $\lim_{x\to-\infty}(-x^2+4x-1) = \lim_{x\to-\infty}(-x^2) = -\infty$
2) $\lim_{x\to-\infty}(-x^3+3x-5) = \lim_{x\to-\infty}(-x^3) = +\infty$
3) $\lim_{x\to+\infty}(x^3-5^6+3) = \lim_{x\to+\infty}(-5x^6) = -5(+\infty)^6 = -\infty$

3.2- Limite d'une fonction rationnelle en infini

Propriété :

Soit a et b deux nombres réels et n, m deux entiers naturels.

On écrite : $\lim_{x\to\infty}\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_o}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_o} = \lim_{x\to\infty}\frac{a_nx^n}{b_mx^m}$

On dit que la limite en l'infinie d'une fonction rationnelle est égale à la limite en infinie du quotient des monômes de plus haut degré du numérateur et du dénominateur.

Exemple:

1) $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^6+2x^5-14x}{-7x^4+11x^2-17} = \lim_{x\to\infty}\frac{3x^6}{-7x^4} = \lim_{x\to\infty}\frac{3x^2}{-7} = \frac{-3}{7}(-\infty)^2 = -\infty$

   Donc $\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^6+2x^5-14x}{-7x^4+11x^2-17} = 0$
2) $\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^6+x+4}{2x^6-5x+1} = \lim_{x\to+\infty}\frac{4x^6}{2x^6} = \frac{4}{2} = 2$

   Donc $\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^6+x+4}{2x^6-5x+1} = 2$

3.3- Autre Exemple

1) Déterminons la limite en $+\infty$ de la fonction définie par : $f(x) = \sqrt{x^2+1} - x$

On a: $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1} - x = \sqrt{+\infty} - \infty = +\infty - \infty$? ?

(On ne peut conclure directement)

En effet, $\forall\ x \in \mathbb{R}, \sqrt{x^2+1} + x \neq 0$, alors on peut écrire :

$\sqrt{x^2+1} - x = \frac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{(\sqrt{x^2+1}+x)}$ (expression conjuguée de $\sqrt{x^2+1} - x$)

$= \frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}$

$\sqrt{x^2+1} - x = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$,

$\Longrightarrow \lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1} - x = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} = \frac{1}{+\infty} = 0$

Donc $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1} - x = 0$

2) Déterminons la limite en 2 de la fonction g définie par : $g(x) = \frac{x^2-4}{x^2+2x-8}$

On a : $\lim_{x\to2} g(x) = \lim_{x\to2}\frac{x^2-4}{x-2} = \frac{0}{0}$? ? (On peut conclure directement).

On a: $D_g =]-\infty; 2[\cup]2; +\infty[$

$\forall\ x \epsilon D_g, g(x) = \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)} = x + 2$

$\Longrightarrow \lim_{x\to2} g(x) = \lim_{x\to2}(x+2) = 4$

$\Longrightarrow \lim_{x\to2} g(x) = 4$

III. Continuité

III_1 − Définition et propriétés

1.1- Definition :

Soit f une fonction et x_0 un nombre réel. On dit que f est continue en x_0 si f est définie en x_0 et $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Exemple :

1) $f(x) = k \Leftrightarrow f(x_0) = k$; $(x_0 \in \mathbb{R})$, f est une fonction constante.
   $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} k = f(x_0)$.

On n'en déduit que la fonction $f(x) = k$ est constante en tout élément de $\mathbb{R}$.

2) $g(x) = x^2 + 1$
   Démontrons que g est continue en 3.
   g est continue en 3 si et seulement si $\lim\limits_{x \to 3} g(x) = g(3)$
   $g(x) = x^2 + 1 \Leftrightarrow g(3) = 3^2 + 1 = 10$ et et $\lim\limits_{x \to 3} g(x) = 3^2 + 1 = 10$

$\lim\limits_{x \to 3} g(x) = g(3) = 10$, d'où g est continue en 3.

1.2- Continuité en x_0 de fonctions élémentaires.

Propriété :

1) Les fonctions suivantes sont continues en tout élément x_0 de leur ensemble de définition. Il s'agit de $f(x) = |x\,|$, $g(x) = u^n, (n \in \mathbb{N})$, $q(x) = \sqrt{x}, p(x) = \frac{1}{x^n}$, $(n \in \mathbb{N}^*)$, $w(x) = \cos x$, $t(x) = \sin x$.
2) Soit f et g deux fonctions continues en x_0.
   Les fonctions $f + g, kf, (k \in \mathbb{R})$, et $|f|$ sont continues en x_0.
   - Si $g(x_0) \neq 0$, alors la fonction $\frac{f}{g}$ est continue en x_0.
   - Si $f(x_0) \geq 0$, alors la fonction $\sqrt{f}$ est continue en tout nombre réel x_0.

Exemple :

- Les fonctions polynômes et les fonctions rationnelles sont continues en tout élément de leur ensemble de définition.
- La fonction f, définie par $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$, est continue en tout nombre réel x_0.
- La fonction tangente est continue en tout élément de son ensemble de définition.
- La fonction g, definie par $g(x) = |2x + 3|, est$ continues en tout nombre réel x_0.

Propriété :

Soit a et b deux nombres réels avec $(a \neq 0)$, f une fonction et g la fonction définie par : $g(x) = f(ax + b), f$ est continu en $ax_o + b$ si et seulement si g est continue en x_0.

Exemple :

La fonction f définie par $f(x) = cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$ est continue tout nombre réel x_0.

III_1 − Prolongement d'une fonction par continuité.

2.1- Definition :

Soit f une fonction non définie en x_0, et l un nombre réel tel que: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$.

On Appelle prolongement de f par continuité en x_0, la fonction définie par :

$$\begin{cases} g(x) = f(x), si\ x \in D_f \\ \quad g(x_0) = l \end{cases}$$

<u>Exemples</u> :

1) Soit $f(x) = \frac{\sin x}{x}$,

$D_f =]-\infty; 0[\cup]0, +\infty[$

On a: $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1, (l = 1)$, alors : $\begin{cases} g(x) = \frac{\sin x}{x}, si\ x \neq 0 \\ \quad g(0) = 1 \end{cases}$ est donc le prolongement par continuité de f en 0.

2) $f(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$

$f(x)$ existe si et seulement si : $\begin{cases} x \geq 0 \\ et \\ x - 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ et \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [0; +\infty[\\ x \in]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[\end{cases}$

$$\Leftrightarrow x \in [0; 1[\cup]1; +\infty[$$
$$\Leftrightarrow D_f = [0; 1[\cup]1; +\infty[$$

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 1} f(x) &= \lim_{x\to 1} \left(\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}\right) \\ &= \lim_{x\to 1} \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} \\ &= \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} \\ &= \lim_{x\to 1} \frac{1}{\sqrt{x}+1} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$\Longrightarrow \lim\limits_{x\to 1} f(x) = \frac{1}{2}$,

$\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \frac{1}{2}$, alors la fonction g définie par : $\begin{cases} g(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}, si\ x \in D_f \\ \quad g(1) = \frac{1}{2} \end{cases}$ est le prolongement de f par continuité en 1.

FIN

Chapitre 3 : Dérivation

I. Dérivation en x_0

$I_1 -$ Nombre derivé d'une fonction en x_0

1.1- Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert K et x_0 un élément de K.

On dit que f est dérivable en x_0 si $\frac{f(x_0)-f(x_0)}{x-x_0}$ a une limite finie en x_0. Cette limite est appelée nombre dérivé f en x_0 notée $f'(x_0)$.

On a alors : $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$

Remarque :

Parfois on peut poser : h= $x - x_0 \Leftrightarrow x = h + x_0$

Donc lorsque$x \to x_0$, alors $h \to 0$.

On a alors : $\lim_{h\to 0} \frac{f(h+x_0)-f(x_0)}{h} = f'(x_0)$

Exemple 1 :

Soit $f(x) = \frac{x}{2x+1}$

Etudions la dérivabilité de f en -1.

On a : $\forall\, x \in D_f \setminus \{-1\}$,

$$\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)} = \frac{\frac{x}{2x+1}-1}{x+1}$$
$$= \frac{-(x+1)}{(2x+1)(x+1)}$$
$$= \frac{-1}{2x+1}$$
$$\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)} = \frac{-1}{2x+1},$$

$\Longrightarrow \lim_{x\to -1} \frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)} = \lim_{x\to 1} \frac{-1}{2x+1} = 1$

On en déduit que : $\lim\limits_{x\to -1} \frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)} = 1$, donc f est dérivable en -1 et $f'(-1) = 1$ est appelé nombre dérivé de f en -1.

Exemple2 :

Soit $g(x) = |x|$

Etudions la dérivation de g en 0

On a : $\forall\, x \in \mathbb{R}^*$, $\frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \frac{|x|}{x}$

Alors : $\frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \begin{cases} = \frac{-x}{x} = -1\ ,\ si\ x < 0 \\ = \frac{x}{x} = 1,\quad si\ x > 0 \end{cases}$

On en déduit que : $\lim_{x\to 0^+} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = 1\ et\ \lim_{x\to 0^-} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = -1$

$\lim_{x\to 0^+} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} \neq \lim_{x\to 0^-} \frac{g(x)-g(0)}{x-0}$; donc g n'est pas dérivable en 0.

1.2-Interprétation graphique :

Soit f une fonction, (C) sa présentation et A un point de (C) d'abscissex_0 . Si f est dérivable en x_0, alors (C) admet une tangente (T) en A dont le coefficient directeur est $f'(x_0)$.

On a : $\boldsymbol{(T)}$: $\boldsymbol{y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)}$, appelée équation de la tangente (T) au point d'abscisse x_0.

Exemple :

Soit h une fonction définie par : $h(x) = \frac{x^2-4}{x+2}$.

Déterminons une équation de la tangente (T) au point $A(1\,;-1)$ de la fonction h.

On a : $x_0 = 1$ et $h(1) = \frac{1-4}{1+2} = -1 \Rightarrow h(1) = -1$

$$\frac{h(x)-h(1)}{x-1} = \frac{\frac{x^2-4}{x+2}+1}{x-1}$$
$$= \frac{x^2-4+x+2}{(x+2)(x-1)}$$
$$= \frac{(x-1)(x+2)}{(x+2)(x-1)}$$

$\frac{h(x)-h(1)}{x-1} = 1,$

$\Rightarrow \lim_{x\to 1} \frac{h(x)-h(1)}{x-1} = 1 \;\Rightarrow h'(1) = 1$

On a : $h(1) = -1$ et $h'(1) = 1$

on en déduit que : $(T) : y = h'(1)(x-1) + h(1)$

$\Leftrightarrow y = 1(x-1) - 1 = x - 2$

$\Leftrightarrow \boldsymbol{(T)}: \boldsymbol{y = x - 2}$ est une équation de la tangente (T).

1.3- Dérivabilité et continuité en $\boldsymbol{x_0}$.

Propriété : Une fonction est dérivable en x_0, alors elle est continue en x_0.

Remarque : une fonction continue en x_0 n'est pas forcement dérivable en x_0.

$\boldsymbol{I_2}$ – Dérivabilité à gauche, dérivabilité à droite

2.1- Définitions et propriétés

a- Définitions :

Soit f une fonction définie en x_0.

1) On dit que f est dérivable à gauche en x_0, si f est définie sur un intervalle de la forme :$]a; x_0]$ et $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ a une limite finie à gauche en x_0 ($x_0^<$ ou x_0^-)

C'est-à-dire : $\lim_{x\to x_0^<} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f_g{}'(x_0) = l$

Cette limite est appelée nombre dérivé de f à gauche ou (par valeur inférieur) en x_0 notée $f_g{}'(x_0)$.

2) On dit que f est dérivable à droite en x_0, si f est définie sur un intervalle de la forme : $[x_0; b[\; et\; \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ a une limite finie à droite en x_0 ($x_0^>$ ou x^+).

C'est-à-dire : $\lim_{x\to x_0^>} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'_d(x_0) = l$

Cette limite est appelée nombre dérivée de f à droite ou (par valeur supérieur) en x_0 notée $f_d{}'(x_0)$.

Remarque :

Soit f une fonction et (C) sa courbe représentative si f est dérivable à gauche (respectivement, à droite) en x_0, alors (C) admet une demi-tangente à gauche (respectivement, à droite) au point d'abscisse x_0, dont le coefficient directeur est le nombre dérivé de f à gauche (respectivement, à droite) en x_0.

<u>Exemple1</u> :

Soit f une fonction définie sur $[0;\ +\infty[$ par : $f(x) = x^2$ et (Cf) sa représentation graphique.

On a : $\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2}{x} = 0$, alors f est dérivable à droite en x_0, donc (Cf) admet une demi-tangente à droite au point 0, de coefficient directeur $f'_d(0) = 0$

<u>Exemple2</u> :

Soit g la fonction définie par : $g(x) = \begin{cases} x^2, si\ x \in]-\infty, 1] \\ \frac{1}{x}, si\ x \in [1;\ +\infty[\end{cases}$, et (Cg) sa courbe représentative.

- On a: $\lim_{x\to 1^-} \frac{g(x)-g(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2-1}{x-1}$
  $= \lim\limits_{x\to 1^-} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1}$
  $= \lim_{x\to 1^-}(x+1) = 2$

$\lim_{x\to 1-} \frac{g(x)-g(1)}{x-1} = 0$, donc (Cg) admet une demi-tangente à gauche au point $A(1;1)$, de coefficient directeur $g'_g(1) = 2$.

- On a : $\lim_{x\to 1^+} \frac{g(x)-g(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^+} \frac{\frac{1}{x}-1}{x-1}$
  $= \lim\limits_{x\to 1^+} \left(-\frac{1}{x}\right) = -1,$

$\lim_{x\to 1^+} \frac{g(x)-g(1)}{x-1} = -1$, donc (Cg) admet une demi-tangente à droite au point A de coefficient directeur $g'_d(1) = -1$.

Remarque :

On en déduit que les fonctions $f\ et\ g$ ne sont pas dérivables en 0 (respectivement, en 1).

<u>Exemple 3</u> :

Soit $h(x) = \begin{cases} x^2 - 1, si\ x\ \in\ ]-\infty; 1] \\ 2 - \frac{2}{x}, si\ x\ \in\ [1;\ +\infty[\end{cases}$ et (C_h) sa courbe représentative.

- On a : $\lim_{x\to 1^-} \frac{h(x)-h(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^-} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^-} (x+1) = 2,$
  $\lim_{x\to 1^-} \frac{h(x)-h(1)}{x-1} = 2$, donc (C_h) admet une demi-tangente au point I à gauche de coefficient directeur 2.
- On a : $\lim_{x\to 1^+} \frac{h(x)-h(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^+} \frac{2-\frac{2}{x}}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^+} \left(\frac{2}{x}\right) = 2$
  $\lim_{x\to 1^+} \frac{h(x)-h(1)}{x-1} = 2$, donc (C_h) admet une demi-tangente à droite au point I de coefficient directeur 2.

On remarque que : $\lim_{x\to 1^-} \frac{h(x)-h(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{h(x)-h(1)}{x-1} = 2$, alors $\lim_{x\to 1} \frac{h(x)-h(1)}{x-1} = 2$ et la fonction h est dérivable en 1, sa courbe (C_h) admet au point I une tangente de coefficient directeur 2.

b- Propriétés :

Une fonction f est dérivable en x_0 si et seulement si, elle est dérivable à gauche et à droite et les nombres dérivés à gauche et à droite sont égaux.

C'est-à-dire si : $\lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, c'est alors qu'on dit que f est dérivable en x_0, sinon elle ne l'est pas en x_0.

I_3 –Fonctions dérivées

3.1- Définitions :

Soit f une fonction.

- L'ensemble des nombres réels en les quels f est dérivable appelé ensemble de dérivabilités de f.
- La fonction $x \to f'(x)$ est appelé fonction dérivée de f.

II. Calculs de dérivées

$\mathbf{II_1}$ – Dérivées des fonctions élémentaires

On appelle dérivée de la fonction $f(x)$ et on note : $f'(x)$

Tableau récapitulatif des dérivées des fonctions élémentaires

Fonction $f(x)$	Domaine de définition de f	Domaine de dérivabilité de f	Dérivée $f'(x)$
$f(x) = k; (k \in \mathbb{R})$	f est définie sur $\mathbb{R}$	f est dérivable sur $\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$
$f(x) = x$	f est définie sur $\mathbb{R}$	f est dérivable sur $\mathbb{R}$	$f'(x) = 1$
$f(x) = x^n; (n > 1)$	f est définie sur $\mathbb{R}$	f est dérivable sur $\mathbb{R}$	$f'(x) = n.x^{n-1}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	f est définie sur $\mathbb{R}^*$	f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$
$f(x) = \sqrt{x}$	f est définie sur $\mathbb{R}_+^*$	f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$\mathbf{1.1}$ –Dérivée de la fonction sinus, cosinus et tangente

Propriété

- La fonction sinus est dérivable en 0 et a pour nombre dérivé 1 et $\lim_{x\to 0} \frac{sinx}{x} = 1$
- La fonction cosinus est dérivable en 0 et a pour nombre dérivé 0 et $\lim_{x\to 0} \frac{cosx-1}{x} = 0$

Ces deux résultats sont appelés limites de références. On pourrait les démontrer à partir de la classe de terminale S.

Tableau récapitulatif des dérivées des fonctions sinus, cosinus et tangente

Fonction $f(x)$	Domaine de définition de f	Domaine de dérivabilité de f	Dérivée $f'(x)$
$f(x) = sinx$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = cosx$
$f(x) = cosx$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = -sinx$
$f(x) = tanx$	$\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$	$\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$	$f'(x) = 1 + tan^2x$

$\mathbf{II_2}$ –Derivées et opération sur les fonctions

Tableau récapitulatif

Dans ce tableau U et V sont des fonctions dérivables sur un intervalle ouvert K.

Operations sur les fonctions	Fonctions	Dérivées des fonctions
Dérivée de la somme de deux fonctions	$U + V$	$U' + V'$
Dérivée du produit de deux fonctions	UV	$U'V + UV'$

Dérivée de la puissance d'une fonction	U^n; $(n \in \mathbb{N}), n \geq 2$	$n.U'.U^{n-1}$
Dérivée de l'inverse d'une fonction	$\frac{1}{V}$	$-\frac{V'}{V^2}$
Dérivée du quotient de deux fonctions	$\frac{U}{V}$	$\frac{U'V - UV'}{V^2}$
Dérivée de la racine carrée d'une fonction	$\sqrt{U}$	$\frac{U'}{2\sqrt{U}}$
Dérivée de la fonction : $x \to U(ax+b)$	$U(ax+b)$	$aU'(ax+b)$
Dérivée de $cos \circ (u)$	$cos(ax+b)$	$-a.sin(ax+b)$
Dérivée de $sin \circ (u)$	$sin(ax+b)$	$a.cos(ax+b)$
Dérivée du produit d'une fonction par un scalaire	kV; $(k \in \mathbb{R})$	kV'

Exemples :

Calculons la dérivée de la fonction f dans les cas suivants :

a) $f(x) = 2x + \frac{1}{x}$.

On pose : $\begin{cases} U(x) = 2x \\ V(x) = \frac{1}{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} U'(x) = 2 \\ V'(x) = -\frac{1}{x^2} \end{cases}$

Donc $f'(x) = 2 - \frac{1}{x^2} = \frac{2x^2-1}{x^2}$

$\Rightarrow f'(x) = \frac{2x^2-1}{x^2}$; f est dérivable sur chacun des intervalles $]-\infty; 0[$ et $]0; +\infty[$, donc sur $\mathbb{R}^*$

b) $f(x) = x^2 cosx$

On pose : $\begin{cases} U(x) = x^2 \\ V(x) = cosx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} U'(x) = 2x \\ V'(x) = -sinx \end{cases}$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = U'V + UV'$

$$\Rightarrow f'(x) = 2xcosx - x^2 sinx$$

c) $f(x) = 3x^2$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 3 \times 2x = 6x$, donc $f'(x) = 6x$

d) $f(x) = sin^2 x$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 2(sinx)'.(sinx)^{2-1}$

$\Rightarrow f'(x) = 2cosx.sinx$

e) $f(x) = (2x+1)^3$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 3 \times (2x+1)'.(2x+1)^{3-1}$

$$\Rightarrow f'(x) = 6(2x+1)^2$$

f) $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$.

f est derivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = -\frac{(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} = \frac{-2x}{(x^2+1)^2}$

g) $f(x) = \frac{2x}{x+2}$

On pose : $\begin{cases} U(x) = 2x \\ V(x) = x+2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} U'(x) = 2 \\ V'(x) = 1 \end{cases}$

$f(x) = \frac{U}{V}$, f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ et on a :

$$f'(x) = \frac{U'V - V'U}{V^2} = \frac{2(x+2) - 2x}{(x+2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2x+4-2x}{(x+2)^2} \Longrightarrow f'(x) = \frac{4}{(x+)^2}$$

h) $f(x) = \sqrt{x^2+1}$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$f'(x) = \frac{(x^2+1)'}{2\sqrt{x^2+1}}$$

$$f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} \Longrightarrow f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

i) $f(x) = cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = -2sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$.

j) $f(x) = sin\left(4x + \frac{2\pi}{3}\right)$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 4cos\left(4x + \frac{2\pi}{3}\right)$.

III. Applications de la dérivée :

$\mathbf{III_1}$ – Sens de variation d'une fonction

1.1 –**Théorème:**

Soit f une fonction définie sur sur un intervalle ouvert K.

- f est croissante sur K si et seulement si f' est positive sur K

	$x \in K$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$

- f est dite décroissante sur K si et seulement si f' est négative sur K.

	$x \in K$
$f'(x)$	$-$
$f(x)$	$\searrow$

- f est constante sur K si et seulement si f' est nulle K.

<u>Exemple</u> :

soit f la fonction définie par $f(x) = x^3 - 3x - 1$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$.

On a : $f'(x) = 3(x-1)(x+1)$, donc $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3 \neq 0$ et $x = 1$ ou $x = -1$

Tableau de signe

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x-1)(x+1)$		$+$		$-$		$+$	

$f'(x) = 3(x-1)(x+1)$	$+$	$-$	$+$

Calcul de limites et d'images :

- $f(-1) = 1$
- $f(1) = -3$
- $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$
- $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

Tableau de variation

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	1	↘	-3	↗	$+\infty$

Sens de variation

- $\forall x \in]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$, $f'(x) > 0$, alors f est strictement croissante sur $]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$
- $\forall x \in]-1; 1[$, $f'(x) < 0$, alors f est strictement décroissante $]-1; 1[$.

Remarque:

- Si $f'(x) > 0$ sur K, alors f est strictement croissante sur K ;
- Si $f'^{(x)} < 0$ sur K, alors f est strictement décroissante sur K ;
- Si $f'(x)$ a un signe constant sur K et ne s'annule en un nombre fini d'élément de K, alors f est dite strictement monotone si et seulement si f est soit croissante ou soit décroissante.

1.2 −**Extremum relatif d'une fonction**

Propriété :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle $]a; b[$ et x_0 un élémentde$]a; b[$. Si f s'annule et change de signe en x_0, alors f admet un extremum relatif en x_0.

Tableaux de variations

x	a		x_0		b
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	$M\begin{pmatrix} x_0 \\ f(x_0) \end{pmatrix}$	↘	

f admet un maximum M relatif en x_0

x	a		x_0		b
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	$m\begin{pmatrix} x_0 \\ f(x_0) \end{pmatrix}$	$\nearrow$	

f admet un minimum m relatif en x_0

<u>Exemple</u> :

Soit $f(x) = x^3 - 3x - 1$

D'après l'exemple précédent, on a le tableau de variation suivante :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

- $\forall x \in]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$, $f'(x) > 0$, alors f est strictement croissante sur $]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$
- $\forall x \in]-1; 1[$, $f'(x) < 0$, alors f est strictement décroissante $]-1; 1[$.

f s'annule et change de signe en -1 et 1, donc f décrit au point $M\binom{-1}{1}$ un maximum relatif à la courbe (C_f) et au point $m\binom{1}{-3}$ un minimum relatif à (C_f).

Fi n

Chapitre 4 : Applications

I. Généralités

I_1 – Fonctions et application

1.1 – Fonctions:

1.1.1 –Définition :

Soient E et F deux ensembles.

On appelle fonction de E dans F, toute relation entre ces deux ensembles E et F pour laquelle, à chaque élément de E, on associe au plus un élément de F.

E est appelé ensemble de départ et F l'ensemble d'arrivée.

Notation :

Soit f une fonction.

$$\textbf{On note : } \begin{array}{l} \boldsymbol{f}: \boldsymbol{E} \longrightarrow \boldsymbol{F} \\ \quad \boldsymbol{x} \longmapsto \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \end{array}$$

Remarque :

$\forall x \in E, f(x) \in F$. On dit que $f(x)$ est l'image de , x et que , x est l'antécédent de , $f(x)$.

1.2 – Application:

1.2.1 –Définition :

Soient E et F deux ensembles distincts ou non.

On appelle application, c'est une relation d'un ensemble E vers un ensemble F telle que tout élément de E a une et une seule image F.

Notation :

Soit f une application.

$$\textbf{On note : } \begin{array}{l} \boldsymbol{f}: \boldsymbol{E} \longrightarrow \boldsymbol{F} \\ \quad \boldsymbol{x} \longrightarrow \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \end{array}$$

1.3 – Restriction et prolongement d'une fonction:

1.2.1 –Définition :

Soit f une fonction de E vers F et a une partie de E.

1) On appelle restriction de , f à A, la fonction notée , g définie par :

$$\begin{array}{l} \boldsymbol{g}: \boldsymbol{A} \longrightarrow \boldsymbol{F} \\ \quad \boldsymbol{x} \longmapsto \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \end{array}$$

On restreint le domaine d'étude à une partie de E.

2) On dit que f est le prolongement de g à E tel que : $\forall x \in E, f(x) = g(x)$.

1.4 – Composition des fonctions

1.4.1 – Définition:

Soient E, F et g trois ensembles.

$f: E \longrightarrow F$ et $g: F \longrightarrow G$ deux fonctions

On appelle composée de f par g, la fonction de E vers G notée $g \circ f$ définie pour tout x de E tel que $\forall x \in D_f$ et $\forall f(x) \in D_g$ par : $g \circ f(x) = g[f(x)]$.

1.4.2 – Propriété:

Soient $f: E \longrightarrow F$, $g: F \longrightarrow G$ et $h: G \longrightarrow H$ trois fonctions, on a :

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

On dit que la composée des fonctions est associative et on écrit:

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f = h \circ g \circ f$$

I_2 – Applications particulières

2.1 – Injections et surjections

2.1.1 –Définitions et propriété:

Soit f une application de E vers F.

- On dit que f est une injection ou injective, si tout élément de F a au plus un antécédent par f. f est injective si et seulement si ; pour tous réels a et b de E, on a :
$$f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$$
- On dit que f est une surjection ou surjective, si tout élément de F a au moins un antécédent par f .

2.2 – Bijections

2.1.1 –Définition:

Soit f une application.

On dit que f est bijective ou est une bijection, si et seulemnt si f est injective et surjective.

2.3 – Bijection réciproque d'une bijection :

2.3.1 –Propriété:

Soit f une application bijective de E vers F et g une application de F vers E.

Si $\boldsymbol{f \circ g = Id_F}$ **ou** $\boldsymbol{g \circ f = Id_E}$**, alors** $\boldsymbol{g}$ **est la bijection réciproque de** f. On la note f^{-1}.

2.4 – Composée de deux bijection :

2.4.1 –Propriété:

Soit f une bijective de E vers F et g l'autre bijection de F vers G.

$\boldsymbol{g \circ f}$ **est une bijection de E vers G et on a :** $\boldsymbol{(g \circ f)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}}$

I_3 – Comparaison des fonctions

3.1 –Majoration, minoration:

3.1.1 –Définition:

Soit f une fonction définie sur un ensemble E.

- f est minorée sur E, s'il existe un nombre réel m tel que : $\forall x \in E, m \leq f(x)$;
- f est majorée sur E, s'il existe un nombre réel M tel que : $\forall x \in E, f(x) \leq M$;
- f est bornée sur E, si f est à la fois minorée et majorée sur E :
$$\forall x \in E, m \leq \ f(x) \leq M.$$

Exercice d'application :

Exercice 1

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = \frac{3x+5}{2x-3}$

1) Montrer que le réel $\frac{3}{2}$ n'a pas d'antécédent par f.
2) Montrer que le réel $\frac{3}{2}$ n'a pas d'image par f et en déduire l'ensemble de définition de f
3) Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{3}{2}\right\}$ vers $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{3}{2}\right\}$ et déterminer sa bijection réciproque.
4) Déterminer la composéefof.
5) Soit A l'intervalle ; A= $\left]\frac{3}{2}; +\infty\right[$.

Déterminer l'ensemble des réels x tels que $f(x) > \frac{3}{2}$ et en déduire l'image réciproque de A par f.

Exercice 2

Soit E= $\{0; 1\}$. A tout couple (a, b) d'éléments de E, on associe le nombre $a + b - ab$

1) Vérifier qu'on établit ainsi une application de $E \times E$ dans E.
2) Cette application est-elle injective ? Est-elle surjective ?

Exercice 3

Soit f, g et h les applications de ℝ vers ℝ définies par :

$f(x) = 2x - 1$; $g(x) = x^2 - 2$; $h(x) = \frac{1}{x-3}$

1) Déterminer l'ensemble de définition de$hogof$, puis calculer $hogof$.

Déterminer l'ensemble de définition de $gohof$; puis calculer $gohof$.

Chapitre 5 : Etude des fonctions

I. Généralités sur les fonctions

I_1 – Domaine de définition

1.1 – Définition:

On appelle domaine de définition ou ensemble de définition, c'est l'ensemble des nombres réels sur lesquels la fonction est définie. Pour une fonction f, on le note : D_f.

1.2 – Domaine de définition des fonctions polynômes

Toute fonction polynôme est toujours définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$.

Exemple :

Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes :

$$f(x) = 4x^2 - 4\sqrt{3}x + 3$$
$$g(x) = 5x^2 - 2x + 3$$
$$h(x) = 2x^2 + 3x + 2$$

1.3 – Domaine de définition des fonctions rationnelles

Une fonction rationnelle est une fonction du type : $H(x) = \frac{F(x)}{G(x)}$ où F et G sont des polynômes.

Pour qu'une fonction rationnelle existe, il faut et il suffit que son dénominateur soit différent de zéro.

Exemple :

Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes :

$$f(x) = \frac{5x^2-2x+3}{x+2}$$
$$g(x) = \frac{5x^2+7x-5}{2x+3}$$
$$h(x) = \frac{x^2-3x+2}{(x+4)(x-1)}$$

1.4 – Domaine de définition des fonctions racines carrées

Soit $f(x) = \sqrt{g(x)}$.

Pour déterminer le domaine de définition de f, on pose $g(x) \geq 0$ et on résout cette inéquation.

L'ensemble de solution de cette inéquation est l'ensemble de de définition de la fonction f.

Exemple :

Déterminer le domaine de définition de fonction f dans les cas suivantes :

a) $f(x) = \sqrt{x}$

b) $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 2}$

c) $f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x-2}}$

d) $f(x) = \frac{\sqrt{x-3}}{2x+1}$

e) $f(x) = \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-3}}$

II. Parité, périodicité

II_1 – Définitions:

Soit f une fonction ayant pour ensemble de définition D_f et pour représentation graphique (C_f).

f est dite :

- Paire : Si et seulement si, $\forall x \in D_f, -x \in D_f$ et $f(-x) = f(x)$.
- Impaire : Si et seulement si, $\forall x \in D_f, -x \in D_f$ et $f(-x) = -f(x)$.
- Périodique de période P$(P \neq 0)$,Si et seulement si, $\forall x \in D_f,\ x - P \in D_f, x + P \in D_f$ et $f(x - P) = f(x + P)$.

Remarque :

Les fonctions cosinus et sinus sont périodique, de période 2π.

Exemple :

Etudier la parité de la fonction f dans chacun des cas suivants :

a) $f(x) = 2x^3 - 5x$
b) $f(x) = 4x^4 + 3x^2 + 2$
c) $f(x) = \frac{x^2-4}{x^2+1}$
d) $f(x) = x(x^2 - 1)$
e) $f(x) = \sqrt{2x^2 + 3}$

III. Eléments de symétrie

$\text{III}_1 -$ Axe de symétrie et centre de symétrie

$1.1 -$ Propriétés:

Soit f une fonction ayant pour ensemble de définition D_f et (C_f) sa représentation graphique dans un repère orthonormé.

- Pour démontrer que la droite (D) d'équation $x = a$ est un axe de symétrie de (C_f), on peut vérifier que $\forall x \in \mathbb{R}$, tel que :
  $\boldsymbol{a + x \in D_f, a - x \in D_f}$ **et** $\boldsymbol{f(a - x) = f(a + x)}$.
- Pour démontrer que le point $\Omega(a; b)$ est un centre de symétrie de (C_f), on peut vérifier que :
  $\forall x \in D_f$ tel que $\boldsymbol{a + x \in D_f, a - x \in D_f}$ **et** $\boldsymbol{f(a - x) - f(a + x) = 2b}$.

Exemple 1 :

Le plan est muni d'un repère orthogonal $(0;\ \vec{i};\vec{j})$ et (C) est la représentation graphique de la fonction f.

Démontrer que la droite (D) est un axe de symétrie dans chacun des cas suivants :

a) $f(x) = x^2 - 4x - 1$, $(D): x = 2$
b) $f(x) = -x^2 - 2x + 1, (D): x = -1$
c) $f(x) = \frac{3x}{x+1}$, $(D): x = -2$

Exemple 2:

Le plan est muni d'un repère orthogonal $(0;\ \vec{i};\vec{j})$ et (C) est la représentation graphique de la fonction f.

Démontrer que le point Ω est un centre de symétrie dans chacun des cas suivants :

a) $f(x) = (x + 1)^3 + 1$, $\Omega(-1; 1)$

b) $f(x) = \frac{1}{x-1}$, $\Omega(1;0)$.

c) $f(x) = \frac{x^2}{x+2}$, $\Omega(-2;-4)$.

III_2 −Les asymptotes :

2.1 − Asymptote parallèle à l'un des axes

Définition :

Soit f une fonction et (C_f) sa courbe représentative.

- Lorsque f admet une limite finie l en $+\infty$ ou en $-\infty$, c'est-à-dire : $\lim\limits_{x\to+\infty} \boldsymbol{f(x) = l}$ **ou** $\lim\limits_{x\to-\infty} \boldsymbol{f(x) = l}$, alors la droite d'équation $\boldsymbol{y = l}$ est dite **asymptote horizontale** à (C_f) ;
- Lorsque f admet une limite infinie à droite ou à gauche en x_0, c'est-à-dire : $\lim\limits_{x\to {x_0}^+} \boldsymbol{f(x)} = \infty$ **ou** $\lim\limits_{x\to {x_0}^-} \boldsymbol{f(x)} = \infty$, alors la droite d'équation $\boldsymbol{x = x_0}$ est dite **asymptote verticale** à (C_f).

Exemple :

a) Soit $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x+1}}$

$$x \in D_f \Leftrightarrow x + 1 > 0$$
$$\Leftrightarrow x > -1$$
$$\Leftrightarrow x \in]-1;\ +\infty[$$

Donc $D_f =]-1;\ +\infty[$

$x \in D_f$; on a :

$$\lim_{x\to-1^+} f(x) = \lim_{x\to-1^+} \frac{2x}{\sqrt{x+1}} = \frac{-2}{0^+} = -\infty$$
$$\Longrightarrow \lim_{x\to-1^+} f(x) = -\infty$$

Alors, on n'en déduit que la droite d'équation $\boldsymbol{x = -1}$ est asymptote verticale à (C_f).

b) Soit $f(x) = \frac{x^2-2x+5}{2x^2+1}$

f est définie sur $\mathbb{R}$. Calculons les limites de f aux bornes de son D_f.

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^2-2x+5}{2x^2+1} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$

  $$\Longrightarrow \lim_{x\to-\infty} f(x) = \frac{1}{2}$$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2-2x+5}{2x^2+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$

  $$\Longrightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{1}{2}$$

$\Longrightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \frac{1}{2}$, alors la droite d'équation $\boldsymbol{y} = \frac{1}{2}$ est asymptote horizontale à (C_f) en $-\infty$ et en $+\infty$.

2.2 − Asymptote oblique

Définition :

Soit f une fonction et (C_f) sa courbe représentative.

On dit que la droite d'équation $\boldsymbol{y = ax + b}$ **est une asymptote oblique à** (C_f) lorsque :

$\lim\limits_{x\to+\infty}[\boldsymbol{f(x) - (ax + b)}] = \boldsymbol{0}$ **ou** $\lim\limits_{x\to-\infty}[\boldsymbol{f(x) - (ax + b)}] = \boldsymbol{0}$

Méthode :

Pour étudier les branches infinies de la courbe représentative d'une fonction rationnelle $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ où $(d°f \geq d°g)$ en $-\infty$ et en $+\infty$, on peut effectuer la division euclidienne de f par g.

Exemple :

Soit $f(x) = x - 2 + \frac{2}{x^2+1}$.

Démontrons que la droite d'équation : $y = x - 2$ est asymptote oblique à (C_f) en en $-\infty$ et en $+\infty$.

En effet, $f(x) - y = x - 2 + \frac{2}{x^2+1} - (x - 2)$

$f(x) - y = \frac{2}{x^2+1}$

- $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x) - (x - 2)] = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{2}{x^2+1}\right) = \frac{2}{+\infty} = 0$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x) - (x - 2)] = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{x^2+1}\right) = \frac{2}{+\infty} = 0$

D'où la droite d'équation : $y = x - 2$ est asymptote oblique à (C_f) en en $-\infty$ et en $+\infty$.

Propriété :

Soit f une fonction et (C_f) sa courbe représentative.

la droite d'équation $\boldsymbol{y = ax + b}$ **est une asymptote à** (C_f) si et seulement si : $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{\boldsymbol{f(x)}}{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{a}$ **et** $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(\boldsymbol{f(x) - ax}) = \boldsymbol{b}$**.**

Remarque :

Les courbes représentatives de deux fonctions f et g sont asymptotes lorsque :

$\lim\limits_{x\to+\infty}\big(f(x) - g(x)\big) = 0$ ou $\lim\limits_{x\to-\infty}\big(f(x) - g(x)\big) = 0$.

$\mathbf{III_3}$ − Fonctions polynômes, fonctions rationnelles

Plan d'étude d'une fonction

Pour étudier une fonction dans le cas général, on adopte le plan suivant :

1) Déterminer l'ensemble de définition ;
2) Déterminer les limites aux bornes du domaine de définition ;
3) Déterminer la dérivée et le sens de variations ;
4) Points et droites remarquables : asymptotes et tangentes;
5) Construire la courbe.

Exemple d'étude de fonctions

Exemple 1 :

Soit f la fonction définie par : $f(x) = x^3 - 3x + 2$, (C_f) sa représentation graphique

1) a) Déterminer l'ensemble de définition de f

   b) Calculer les limites de f aux bornes de son D_f

2) a) Déterminer la fonction dérivée f' de f en déduire le sens de variation de f

   b) dresser le tableau de variation de f

3) a) Déterminer une équation de la tangente (T) au point A d'abscisse $x_0 = 0$

b) Etudier la position de (C_f) par rapport à (T) ;

4) Construire(C_f).

4) Démontrer que le point A $\binom{0}{y}$ est un centre de symétrie de (C_f).

Exemple 2 :

La fonction numérique f à variable réel x est définie par $f(x) = \frac{x^2+2x++2}{x+1}$

a) Quel est l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de f.

b) Déterminer les réels a, b et c tel que $g(x) = ax + b + \frac{\mathrm{c}}{\mathrm{x+1}}$

c) calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition

d) Étudier le sens de variations de f et construire la courbe (c) représentant la fonction f dans un repère orthonormé$(0; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$.

Chapitre 6 : Suites numériques

I. Généralité

I_1 –Definition d'une suite numérique

1.1 – Definition:

On appelle suite numérique, toute fonction de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{R}$ généralement notée$(u_n)_n$, $n \in \mathbb{N}$ ou tout simplement(u_n).

- Une suite peut être définie par une ***formule explicite*** qui permet de calculer u_n en fonction de n telle que : $\begin{array}{c} \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R} \\ n \longrightarrow u_n = \frac{2n+1}{n+2} \end{array}$
- Une Suite peut-être définie par son ***premier terme*** et une ***formule de récurrence*** telle que : $\begin{cases} u_n = 1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{3}U_n + 2 \end{cases}$; $\forall n \in \mathbb{N}$

II. Etude d'une suite numérique

$\mathbf{II_1}$ –Suites minorées, majorées et bornées.

1.1 – Définition : Soit$(u_n)_n$, Une suite numérique.

- $(u_n)_n$, est dite minorée, s'il existe un nombre réel m tel que : pour tout entier naturel n, on a : $m \leq u_n$;
- $(u_n)_n$, est dite majorée, s'il existe un nombre réel M tel que : pour tout entier naturel n, on a : $u_n \leq M$;
- $(u_n)_n$, est dite bornée, si elle est à la fois minorée et bornée i.e : $m \leq u_n \leq M$.

Les nombres réels m et M sont respectivement appelés minorant et majorant de$(U_n)_n$.

1.2 – Théorème :

En général, pour démontrer qu'une suite (U_n) est bornée, l'un des procédés ci-dessous est utile.

- Encadrer le terme général de la suite (U_n) par deux nombres réels.
- Etudier la fonction f lorsque (U_n) est du type $U_n = f(n)$.
- Faire un raisonnement par récurrence.

$\mathbf{II_2}$ –Sens de variations

2.1–Théorème :

Soit$(u_n)_n, n \in \mathbb{N}$, une suite numérique. $si\ \forall n \in N$:

- $u_n \leq u_{n+1}$, alors la suite (u_n) est croissante ;
- $u_n \geq u_{n+1}$, alors la suite (u_n) est décroissante ;
- $u_n = u_{n+1}$, alors la suite (u_n) est constante.

Remarque :

- Une suite (u_n) est dite monotone si elle est soit croissante, soit décroissante ;
- Une suite (u_n) est dite stationnaire, si elle est constante à un certain rang.

$\mathbf{II_3}$ –Notion de convergence

3.1–Théorème :

- Une suite (U_n) est dite ***convergente*** lorsqu'elle admet une limite finie (l) en $+\infty$

- Une suite (U_n) est dite ***divergente*** lorsqu'elle admet une limite infinie $(\pm\infty)$ en $+\infty$

III. Suites arithmétiques, suites géométrique

$\mathbf{III_1}$ –Suites arithmétiques

$\mathbf{1.1}$–Definition :

Une suite (U_n) est dite ***arithmétique*** lorsqu'il existe un nombre réel $\boldsymbol{r}$ appelé ***raison*** tel que pour tous entiers naturels n, p; on a :

$u_{n+1} = u_n + r$: Formule de récurrence

Si $n = 0$, alors $u_n = u_0 + nr$

Si $n = 1$, alors $u_n = u_1 + (n-1)r$

Si $n = 2$, alors $u_n = u_2 + (n-2)r$

D'une façon générale, pour tout entier naturel $n\ et\ p$, on a :

$U_n = U_p + (n-p)r$: Formule explicite

Retenons bien :

Pour démontrer qu'une suite est ***arithmétique***, il suffit de prouver que la différence entre deux termes consécutifs est constante, i.e. : $U_{n+1} - U_n = r, n \in \mathbb{N}$.

$\mathbf{1.2}$ –Somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique:

$(u_n)_n$, est une suite arithmétique,$\forall\ n \in \mathbb{N}$, on a :

$\boldsymbol{U_1 + U_2 + \ldots + U_n = n \times \frac{U_1+U_n}{2}}$ et $\boldsymbol{U_0 + U_1 + U_2 \ldots + U_{n-1} = n \times \frac{U_0+U_{n-1}}{2}}$

En particulier : $1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

$\mathbf{III_2}$ – Suites géométriques

$\mathbf{2.1}$– Définition :

Une suite (u_n) est dite géométrique lorsqu'il existe un nombre réel $\boldsymbol{q}$ appelé raison tel que pour tout nombre entier naturel n, p; On a :

$u_{n+1} = qu_n$: Formule de récurrence)

Si $n = 0$, alors : $u_n = u_0 q^n$

Si $n = 1$, alors : $u_n = u_1 q^{n-1}$

Si $n = 2$, alors : $u_n = u_2 q^{n-2}$

D'une façon générale, pour tout entier naturel $n\ et\ p$, on a :

$u_n = u_p q^{n-p}$: Formule explicite

<u>Retenons bien</u> :

Pour démontrer qu'une suite est ***géométrique***, il suffit de prouver que le quotient de deux termes consécutifs est constant, i.e. : $\frac{U_{n+1}}{U_n} = q, (q \in \mathbb{N})$

$\mathbf{I_{5.2.2}}$ –Somme des termes consécutifs d'une suite géométrique:

$(U_n)_n$, est une suite géométrique de raison $q, (q \neq 1)$,$\forall\ n \in \mathbb{N}$, on a :

$U_1 + U_2 + \ldots + U_n = U_n \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ et $U_0 + U_1 + U_2 \ldots + U_{n-1} = U_0 \times \frac{1-q^n}{1-q}$

IV. Limite d'une suite numérique :

$\mathbf{IV_1}$ –Calcul de limites

1.1–Propriété:

Soit (u_n), une suite definie par : $u_n = f(n)$ où f est une fonction numérique. Si f a une limite en $+\infty$, alors (u_n) a une limite et on a :

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} f(x)$, $(la\ réciproque\ est\ fausse)$

Exemple :

- $\lim\limits_{n\to+\infty} ln\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right) = 0$, donc la suite $(v_n)_{n,}$ de terme général $v_n = ln\left(\frac{n^2+1}{n^2}\right)$ converge vers 0.
- $\lim\limits_{n\to+\infty} (x \cos\frac{1}{x}) = +\infty$, donc la suite $(w_n)_n$ de terme général $w_n = n\ cos\frac{1}{n}$ est divergente.

1.2–Convergence d'une Suite arithmétique et géométrique.

Théorème :

1) Soit $(u_n)_{n,} n \in \mathbb{N}$, une suite arithmétique de raison r,$\forall\ n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 + nr$
   - Si $r > 0$, alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} (nr) = +\infty$; $(u_n)_{n,}$est divergente ;
   - Si $r = o$, alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = u_0$ la suite (u_n) converge donc vers u_0 ;
   - Si $r < 0$, alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} (nr) = -\infty$, $(u_n)_{n,}$est divergente ;
2) Soit$(u_n)_{n,} n \in \mathbb{N}$, une suite géométrique de raison q et de 1er terme $u_0 \neq 0, u_n = u_0 q^n$
   - Si $|q| > 1$, alors la suite (u_n) est divergente.
   - Si $|q| < 1$, alors la suite (u_n) est convergente.
   - Si $|q| = 1$, alors la suite (u_n) est stationnaire $(u_n = u_0)$

1.3 –Propriétés et comparaison:

On considère les suites (u_n) ,(v_n) et(w_n) et l un nombre réel.

- Si (u_n) et (u_n) sont convergentes et si à partir d'un certain indice $(rang)$, $u_n \leq v_n$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leq \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$;
- Si à partir d'un certain rang, $u_n \geq v_n\ et \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$, alors $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$
- Si à partir d'un certain rang, $v_n \leq u_n \leq w_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = l$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$;
- Si à partir d'un certain rang, $u_n \leq v_n\ et \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = -\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$;
- Si la suite (v_n) est telle qu'à partir d'un certain rang partir, on ait :

$$|u_n - l| < v_n\ et \lim_{n\to+\infty} v_n = 0, alors \lim_{n\to+\infty} u_n = l$$

Exercices d'application

Exercice 1

Soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{u_n - 1}{u_n + 3}, \forall\ n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1) Calculer u, u_2, u_3 et u_4 et prouver que $\forall\ n \in \mathbb{N}, u_n + 1 > 0$.
2) Démontrer que la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $v_n = \frac{1}{u_n + 1}$ est une suite arithmétique.
3) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n et étudier la convergente de la suite (u_n).

Exercice 2

On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{3u_n+2}{u_n+2}, \forall \in \mathbb{N} \end{cases}$

1) Démontrer que pout entier $n$de $\mathbb{N}$, $u_n \neq 2$
2) On pose : $V_n = \frac{u_n+1}{u_n+2}$; $\forall \in \mathbb{N}$
   a) Montrer que (V_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme v_0.
   b) Exprimer V_n en fonction de n
   c) En déduire u_n en fonction de n
   d) Calculer la limite de (V_n) lorsque n tend vers $+\infty$

Chapitre 7 : Dénombrement

I. Analyse combinatoire

I_1 –Notation factorielle

$\mathbf{I}_{1.1}$ $-$ Definition:

Soit n un entier naturel non nul.

On appelle factorielle de n, le produit des entiers positifs de 1 à n noté par :

$n! = n(n-1)(n-2) \times \ldots \times 2 \times 1$

On lit « factorielle n ».

Exemple :

$3! = 3 \times 2 \times 1$

$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1$

Par convention : $0! = 1$

$\mathbf{I}_2$ –Permutation :

$\mathbf{2.1}$ $-$ Definition:

Soit E un ensemble non vide de cardinal n ; (un est un entier naturel).

On appelle permutation de n éléments de E, toute suite ordonner formée à partir de de n éléments distincts de E.

On la note :$P_n = n(n-1)(n-2) \times \ldots \times 2 \times 1 = n!$

Exemple :

Soit $E = \{a; b; c\}$

Le nombre de permutation des éléments de E est :

$P_3 = 3! = 3 \times 2 \times = 6$

Les permutations des éléments de E sont : abc; acb; bac; bca; $cab\ et\ cba$.

$\mathbf{I}_3$ – Arrangement avec répétition :

$\mathbf{3.1}$ $-$ Definition:

Soit E un ensemble non vide.

On appelle arrangement avec répétition de k éléments parmi les n éléments de E, toute suite ordonnée de k éléments de E distincts ou non (non nécessairement distinct).

Le nombre est noté : $\boldsymbol{A_n^k = n^p}$**.**

$\mathbf{I}_4$ – Arrangement sans répétition :

$\mathbf{4.1}$ $-$ Definition:

Soit E un ensemble non vide.

On appelle arrangement sans répétition de k éléments de E, toute suite ordonnée de k éléments de E distincts deux à deux $(p < n)$.

On le note $\boldsymbol{A_n^k = \frac{n!}{(n-p)!}}$

Exemple :

On peut placer de 7^4 façons différentes 4 lettres distinctes dans 7 boites aux lettres.

Exercice d'application:

1) De combien de façons différentes, peut-on placer 4 lettres distinctes dans 20 boites aux lettres ?

2) A Partir de 3 lettres a, b et c, combien de mots de 2 lettres non nécessairement distincte peut-on former ?
3) De combien de façon différentes peut- on ranger 7 livres :
   a) Dans n'importe quel ordre ?
   b) Si 3 livres particuliers doivent rester ensemble ?
   c) Si 2 livres particuliers doivent prendre les positions extrêmes ?
4) Une classe comporte 9 garçons et 3 filles. De combien de façons peut-on faire un choix de 4 élèves.
   a) Quelconques ?
   b) Comprenant au moins une fille ?
   c) Comprenant exactement une fille ?

I_5 – Combinaison :

5.1 – Definition:

Soit E un ensemble non vide.

On appelle combinaison de k éléments de E, toute partie de E à k éléments.

On le note $\boldsymbol{C_n^k = \frac{n!}{p!(n-p)!}}$

Exemple :

De combien de façons peut-on former un comité de trois personnes dans une assemblée de 10 hommes et 6 femmes ?

C'est une combinaison de 3 personnes sur un total de 16.

On a : $\boldsymbol{C_{16}^3 = \frac{16!}{3!(16-3)!} = 560}$

Il y a donc 560 façons différentes de former un comité de 3 personnes dans cette assemblée.

Quelques valeurs particulières :

$\boldsymbol{A_n^0 = 1}$ $\qquad$ $\boldsymbol{C_n^0 = C_n^n = 1}$

$\boldsymbol{A_n^n = n!}$ $\qquad$ $\boldsymbol{C_n^1 = C_n^{n-1} = n}$

$\boldsymbol{A_n^1 = n}$

Propriété :

Pour tous entiers naturels n et p tel que p soit inférieur ou égal à n, on a :

$\boldsymbol{C_n^{n-p} = C_n^p}$

Si de plus $\boldsymbol{0 < p < n}$, alors : $\boldsymbol{C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p = C_n^p}$

Résumé :

Types de tirages	Ordre	Répétitions d'éléments	Dénombrement
Successifs Avec remise	On tient compte de l'ordre	Un élément peut être tiré plusieurs fois	n^p (p-uplets)
Successifs Avec remise		Un élément n'est tiré qu'une seule fois	$\boldsymbol{A_n^k = \frac{n!}{(n-p)!}}$ (arrangement)
Simultanés	L'ordre n'intervient pas		$\boldsymbol{C_n^k = \frac{n!}{p!(n-p)!}}$ (Combinatoires)

Chapitre 8 : Barycentre

I. Barycentre de deux points pondérés

I.1- Théorème et définitions

1.1-Théorème : soit A et B deux point du plan et $\propto et\ \beta$ deux nombres réels. Si $\alpha + \beta \neq 0$, alors il existe un seul point G tel que : $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = \vec{0}$

Démonstration :

$$\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GA} = \vec{0}$$
$$\Leftrightarrow \alpha\overrightarrow{GA} + \beta(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB}) = \vec{0}$$
$$\Leftrightarrow \alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{AB} = \vec{0}$$
$$\Leftrightarrow (\alpha + \beta)\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{AB} = \vec{0}$$
$$\Leftrightarrow (\alpha + \beta)\overrightarrow{GA} = -\beta\overrightarrow{AB}$$
$$\Leftrightarrow -(\alpha + \beta)\overrightarrow{AG} = -\beta\overrightarrow{AB}$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}, (\alpha + \beta \neq 0)$$

Posons $\vec{U} = \frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$

Etant donné un point A et un recteur $\vec{U}$, il existe un point unique G telque : $\overrightarrow{AG} = \vec{U}$

Remarque :

$$\text{Si } \alpha + \beta = 0 \Rightarrow \beta = -\alpha\ et\ \alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = \vec{0}$$
$$\Rightarrow \alpha\overrightarrow{GA} - \alpha\overrightarrow{GB} = \vec{0}$$
$$\Rightarrow \alpha\left(\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB}\right) = \vec{0}$$
$$\Rightarrow \alpha\left(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{BG}\right) = \vec{0}$$
$$\Rightarrow \alpha\left(\overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GA}\right) = \vec{0}$$
$$\Rightarrow \alpha\overrightarrow{BA} = \vec{0}$$

On distingue deux cas :

1er cas : Si $\alpha = 0$ou $\alpha = \beta$, alors tout point G du plant vérifie l'égalité $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = \vec{0}$

2ecas : Si $\alpha \neq 0\ et\ \alpha \neq \beta$, alors aucun point du plan ne vérifie cette égalité.

1.2-Définitions

- On appelle point pondéré tout couple(A, α) où A est un point et α un nombre réel ; α est appelé coefficient du point A.
- Soit$(A, \alpha)\ et\ (B, \beta)$ deux points pondérés tels que $\alpha + \beta \neq 0$

On appelle barycentre des points pondérés $(A, \alpha)\ et\ (B, \beta)$, l'unique point G telque :$\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = \vec{0}$

On note $G = bar\{(A, \alpha), (B, \beta)\}$ ou $G = bar\begin{array}{|c|c|}\hline A & B \\ \hline \alpha & \beta \\ \hline\end{array}$

Remarque :

$G = bar\begin{array}{|c|c|}\hline A & B \\ \hline \alpha & \beta \\ \hline\end{array} \Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$: Cette égalité permet de construire G.

- Si $A \neq B$, alors A, B, G **sont alignés** c'est-à-dire $G \in (AB)$
- Si $A = B \Rightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha\times\beta}\overrightarrow{AA}\quad or\quad \overrightarrow{AA} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = \vec{0} \Leftrightarrow A = G$

Exemple : Construire le barycentre des points G suivants

1)

$G = bar$

A	B
2	3

oùG est le barycentre de $(A, 2)$ et $(B, 3)$

$\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\propto+\beta}\overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{3}{2+3}\overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AB}$

② G est le barycentre de $(A, 2)et$ $(B, -1)$,

$G = bar$

A	B
2	-1

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{-1}{2-1}\overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{AG} = -\overrightarrow{AB}$

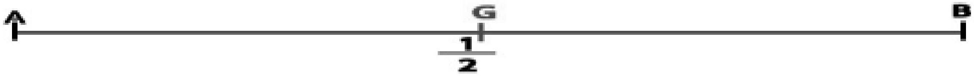
③

G est le barycentre de $(A, 1)$ $et(B, 1)$,

$G = bar$

A	B
1	1

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{1}{1+1}\overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, G est le milieu du segment$[AB]$



I.2-Propriété du barycentre de deux pondérés

2.1-Homogéniété du barycentre

$G = bar\{(A; \alpha); (B; \beta)\} \Leftrightarrow \alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = \vec{0}$

Pour tout nombre $k \neq 0$ $k\alpha\overrightarrow{GA} + k\beta\overrightarrow{GB} = \vec{0} \Leftrightarrow G = bar\{(A; k\alpha); (B; k\beta)\}$

On a la propriété suivante :

2-2-Propriété :

Le barycentre de deux points pondérés est inchangé lorsqu'on multiplie tous les coefficients par un même nombre réel non nul

2-3-Ensemble de barycentre de deux points pondérés

Un point G est barycentre de deux points A et B s'il existe un couple (a, b) de nombre réel tels que G soit l barycentre des points pondérés (a,) et (b,)

2-4-Théoréme :

Soit A et B deux distinct du plan.

L'ensemble des barycentres des points A et B est la droite (AB)

Démonstration :

- SI $G = bar\{(A; \alpha); (B; \beta)\}$ alors G $\in (AB)$
- Réciproquement, soit G un pont de la droite (AB).
- Il existe $k \in \mathbb{R}$ $telque$: $\overrightarrow{AG} = k\overrightarrow{AB}$ ou encore $\overrightarrow{AG} = \frac{k}{1-k+k}\overrightarrow{AB}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{k}{(1-k)+k}\overrightarrow{AB}$.

Donc : $G = bar\{(A; (1-k)); (B; k)\}$

2.5-Reduction de la somme $\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB}$

- Si$\alpha + \beta \neq 0 \Rightarrow \exists\ G\ tel\ que\ G = bar\{(A;\alpha);(B;\beta)\} \Leftrightarrow \alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = \vec{0}$

On a: $\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} = \alpha\left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}\right) + \beta\left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB}\right)$, M est un point du plan.

$= \alpha\overrightarrow{MG} + \beta\overrightarrow{MG} + \alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB}$

$= (\alpha + \beta)\overrightarrow{MG} + \alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB}$

$\Leftrightarrow \alpha\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = (\alpha + \beta)\overrightarrow{MG}$; car $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = \vec{0}$

- Si $\alpha + \beta = 0,\ alots\ \alpha = -\beta$

$\Leftrightarrow \alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} = -\beta\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB}$

$= \beta\overrightarrow{AM} + \beta\overrightarrow{MB}$

$\Leftrightarrow \alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} = \beta\left(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}\right)$

$\Leftrightarrow \alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} = \beta\overrightarrow{AB}$

L'on conclut que le vecteur $\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB}$ est indépendant du point M, d'où la propriété suivante :

2.6-Propriété :

Soit(A,α) et(B,β) deux points pondérés. Pour tout point M du plan :

-Si $\alpha + \beta \neq 0, alors\ \alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} = (\alpha + \beta)\overrightarrow{MG}$ où $G = bar\{(A;\alpha);(B;\beta)\}$

-Si $\alpha + \beta = 0, alors\ le\ vecteur\ \alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB}\ est\ independant\ du\ plan$

2. 7- Cordonnées du barycentre de deux points

Le plan est muni du repère (O, I, J)

On considère le point $A\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}\ et\ B\begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix}$

$G = bar\{(A;\alpha);(B;\beta)\} \Leftrightarrow \alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \alpha\left(\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OA}\right) + \beta\left(\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OB}\right) = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \alpha\overrightarrow{GO} + \alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{GO} + \beta\overrightarrow{OB} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow (\alpha + \beta)\overrightarrow{GO} + \alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow (\alpha + \beta)\overrightarrow{GO} = -\alpha\overrightarrow{OA} - \beta\overrightarrow{OB}$

$\Leftrightarrow (\alpha + \beta)\overrightarrow{GO} = \alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{OG} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\overrightarrow{OA} + \frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{OB}$

$\Leftrightarrow x_G = \frac{\alpha x_A}{\alpha+\beta} + \frac{\beta x_B}{\alpha+\beta}\ et\ y_G = \frac{\alpha y_A}{\alpha+\beta} + \frac{\beta y_B}{\alpha+\beta}$

$\Leftrightarrow x_G = \frac{\alpha x_A + \beta x_B}{\alpha+\beta}\ et\ y_G = \frac{\alpha y_A + \beta y_B}{\alpha+\beta}$

$\Leftrightarrow G\begin{pmatrix} \frac{\alpha x_A + \beta x_B}{\alpha+\beta} \\ \frac{\alpha y_A + \beta y_B}{\alpha+\beta} \end{pmatrix}$

D'où la propriété suivante :

2.8-Proprieté :

Dans le plan muni repère (O, I, J), si A$\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}\ et\ B\begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix}$ et si G et le barycentre de $(A,\alpha)et\ (B,\beta)$, alors on a : $G\begin{pmatrix} \frac{\alpha x_A + \beta x_B}{\alpha+\beta} \\ \frac{\alpha y_A + \beta y_B}{\alpha+\beta} \end{pmatrix}$

Exemple :

Calculons les coordonnées de G du point suivant

A$\binom{-1}{2}\ et\ B\binom{3}{2}, G = bar\{(A,-2),(B,4)\}$

On a : $x_G = \frac{\alpha x_A+\beta x_B}{\alpha+\beta}$ et $y_G = \frac{\alpha y_A+\beta y_B}{\alpha+\beta}$

$\Leftrightarrow x_G = \frac{2+12}{2} = 7$ et $y_G = \frac{-4+8}{2} = 2$

$\Leftrightarrow$G$\binom{7}{2}$, d'où les coordonnées du point G.

2.9-Conservation du barycentre par la projection

2.9.1-Theorème :

Le projet du barycentre de deux points pondérés est le barycentre des projetés de ces deux points affectés des mêmes coefficients

II. Barycentre de plus de deux points pondérés

II.1-Théorème et définition :

1.1-Théorème :

Soit $(A,\alpha),(B,\beta) et\ (C,\gamma)\ trois\ points\ pondérés.$

Si $\alpha+\beta+\gamma \neq 0, alors\ \exists!\ \alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\gamma\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

Preuve :

$\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\gamma\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

$$\Leftrightarrow \alpha\overrightarrow{GA}+\beta\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AB}\right)+\gamma\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AC}\right)=\vec{0}$$
$$\Leftrightarrow \alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{AB}+\gamma\overrightarrow{GA}+\gamma\overrightarrow{AC}=\vec{0}$$
$$\Leftrightarrow (\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{AB}+\gamma\overrightarrow{AC}=\vec{0}$$
$$\Leftrightarrow -(\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{GA}=-\left(\beta\overrightarrow{AB}+\gamma\overrightarrow{AC}\right)$$
$$\Leftrightarrow (\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{GA}=\beta\overrightarrow{AB}+\gamma\overrightarrow{AC}$$
$$\Leftrightarrow \text{AG} = \frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}AB+\frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}AC$$

Cette dernière égalité justifie l'existence de l'unicité de G

1.2-Définition :

Soit$(A,\alpha),(B,\beta)\ et\ (C,\gamma) trois\ point\ pondérés\ tels\ que\ \alpha+\beta+\gamma \neq 0$

On appelle barycentre des points pondérés $(A,\alpha),(B,\beta)\ et\ (C,\gamma)$, l'unique point G tel que :

$\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\gamma\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

On note: $G = bar\{(A,\alpha),(B,\beta),(C,\gamma)\}$

Remarque :

- Si l'un des coefficients est nul, par exemple $\alpha = 0, alors\ G = bar\{(B,\beta),(C,\gamma)\}$
- Cette définition et la remarque précédente se généralisent à 4 points (et plus)

Exemple :

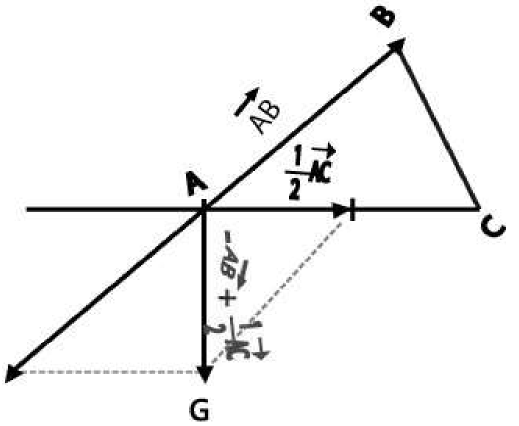
Soit ABC un triangle.

Construire le point G barycentre des points pondérés (A,3), (B,-2) et (C,1)

$G = bar\{(A,3),(B,-2),(C,1)\} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{GA}\text{-}2\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

$$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{GA}\text{-}2(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AB})+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AC}=\vec{0}$$
$$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{GA}-2\overrightarrow{GA}-2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AC}=\vec{0}$$
$$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{GA}-2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\vec{0}$$
$$\Leftrightarrow -2\overrightarrow{AG}-2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\vec{0}$$
$$\Leftrightarrow -2\overrightarrow{AG}=2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AG}=-\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

$où\ \overrightarrow{AG}=\frac{-2}{3-2+1}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3-2+1}\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AG}=-\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$



II.2-Propriétés :

2.1-Homogeniété :

2.1.2-Proprieté :

Le barycentre de trois points pondérés (ou plus) est inchangé lorsqu'on multiple tous le coefficient par un même réel non nul.

Remarques :

Le barycentre de point pondérés affectés de coefficients égaux est appelé isobarycentre de ces points.

- L'isobarycentre de deux points A et B est le milieu du segment $[AB]$
- L'isobarycentre de trois points A,B et C est le centre de gravité du triangle ABC.
- L'isobarycentre des sommets d'un parallélogramme est le centre de ce parallélogramme.

2.3-Reduction de la somme $\boldsymbol{\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC}}$

2.3.1-Propriété :

Soit $(A,\alpha),(B,\beta)\ et\ (C,\gamma)$ des points pondérés. Pour tout point M du plan, on a :

- Si $\alpha+\beta+\gamma \neq 0, alors\ \alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC} = (\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{MG}$ où G est le barycentre de $(A,\alpha),(B,\beta)\ et(C,\gamma)$.
- Si $\alpha+\beta+\gamma = 0, alors$ le vecteur $\alpha MA + \beta MB + \gamma MC$ est indépendant du point M.

Preuve :

- Si $\alpha+\beta+\gamma \neq 0 \Rightarrow \exists!\, G = bar\{(A,\alpha),(B,\beta),(C,\gamma)\}$ telque :

$$\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC} = \alpha\left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}\right) + \beta\left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB}\right) + \gamma\left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC}\right)$$
$$= \alpha\overrightarrow{MG} + \alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{MG} + \beta\overrightarrow{GB} + \gamma\overrightarrow{MG} + \gamma\overrightarrow{GC}$$
$$= (\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{MG} + \alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} + \gamma\overrightarrow{GC},$$

Or $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} + \gamma\overrightarrow{GC}$

D'où $\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC} = (\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{MG}$

-Si $\alpha+\beta+\gamma = 0 \Rightarrow \alpha = -\beta-\gamma$.

Alors on a : $\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC} = (-\beta-\gamma)\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC}$

$$= (-\beta-\gamma)\overrightarrow{MA} + \beta\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}\right)\gamma\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC}\right)$$
$$= (\beta-\gamma)\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{AB} + \gamma\overrightarrow{MA} + \gamma\overrightarrow{AC}$$
$$= (-\beta-\gamma+\beta+\gamma)\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{AB} + \gamma\overrightarrow{AC}$$
$$= 0 + \beta\overrightarrow{AB} + \gamma\overrightarrow{AC} = \beta\overrightarrow{AB} + \gamma\overrightarrow{AC}$$

Donc $\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC} = \beta\overrightarrow{AB} + \gamma\overrightarrow{AC}$. D'où le vecteur $\alpha MA + \beta MB + \gamma MC$ est indépendant du point M.

2.4- Coordonnées du barycentre de trois points pondérés

2.4.1-Propriété :

Dans le plan muni d'un repéré orthonormé (O, I, J), on a :

Si donne trois points $A\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}, B\begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix}\ et\ C\begin{pmatrix} x_C \\ y_C \end{pmatrix}$ et si G est le barycentre de $(A,\alpha),(B,\beta)\ et(C,\gamma)$, alors $GG\begin{pmatrix} \frac{\alpha x_A+\beta x_B+\gamma x_C}{\alpha+\beta+\gamma} \\ \frac{\alpha y_A+\beta y_B++\gamma y_B}{\alpha+\beta+\gamma} \end{pmatrix}$

2.5-Barycentre parties :

2.5.1-Theorème :

Soit $(A,\alpha),(B,\beta)\ et(C,\gamma)$ trois points pondérés tels que : $\alpha+\beta+\gamma \neq 0\ et\ \alpha+\beta \neq 0$

Si H est le barycentre $(A,\alpha)\ et(B,\beta), alors$:

$$G = bar\{(A,\alpha),(B,\beta),(C,\gamma)\} = bar\{(H,(\alpha+\beta)),(C,\gamma)\}$$

H est appelé barycentre partiel.

Exemple :

Soit ABC un triangle

Construisons le barycentre G des points pondérés (A, 3), (B,-2) et (C,1) en utilisant le théorème des barycentre partiels.

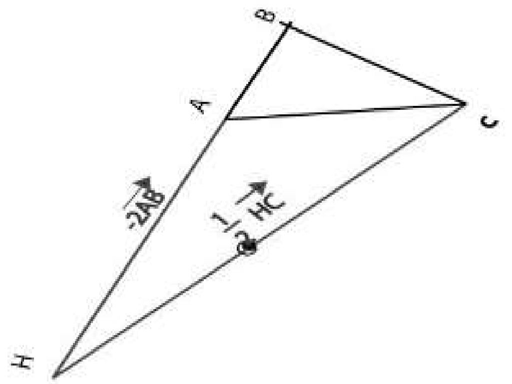
Soit H le barycentre de (A,3) et (B,-2)

$H = bar\{(A,3),(B,-2)\} \Leftrightarrow \overrightarrow{AH} = \frac{-2}{3-2}\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AH} = -2\overrightarrow{AB}$

Et $G = bar\{(A,3),(B,-2),(C,1)\}$

$= bar\{(H,1),(C,1)\} \Leftrightarrow \overrightarrow{HG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{HC}$, alors G est le milieu de $[HC]$.

On en déduit, une construction du point H et le point G



NB : Pour déterminer le barycentre de plusieurs points pondérés, on peut remplacer certains d'entre eux par leur barycentre partiel, affecté de la somme de leurs coefficients, à condition que cette somme soit diffèrent de zéro. (C'est-à-dire non nulle).

Remarque :

Soit un triangle ABC et G le barycentre de$(A,\alpha),(B,\beta)\ et(C\gamma)$.

Lorsque $\alpha+\beta \neq 0, H$ est le barycentre de $(A,\alpha)\ et\ (B,\beta)$ si et seulement si H est le point d'intersection des droites (AB) et (CG)

III. Utilisation du barycentre :

III.1 Problème d'alignement et de concours

On peut utiliser le barycentre pour démontrer l'alignement de trois points ou le concours de trois droites. Dans certains cas, cet outil permet de conclure rapidement. Nous allons en faire usage à travers quelques applications.

1.1-Alignement de points :

Application :

Soit ABC un triangle et M le milieu du segment$[AC]$. Placer les points I et J tels que :

$\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CJ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{CI}$.

Démontrer que les points B, J, M sont alignés.

NB : Pour démontrer que trois points sont alignés, il suffit de démontrer que l'un est le barycentre des deux autres.

Solution :

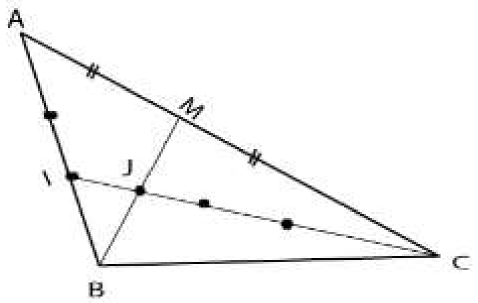
- $\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{AI} = \frac{2}{1+2}\overrightarrow{AB}$.
  Donc $I = bar\{(A,1),(B,2)\}$
- $\overrightarrow{CJ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{CI} \Rightarrow \overrightarrow{CJ} = \frac{3}{1+3}\overrightarrow{CI}$.
  Donc $J = bar\{(C,1),(I,3)\}$

$J = bar\{(C,1),(I,3)\}$

$= bar\{(C,1),(A,1),(B,2)\}$

$\Rightarrow$ J $= bar\{(M,2),(B,2)\}$ Car M est milieu de$[AC]$, donc isobarycentre de points A et C.

J est le barycentre des points M et J d'où les points B, J et M sont alignés.



1.2-Concours de droites :

Application :

Soit ABC un triangle. On désigne par P, Q et R les points tels que :

$\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CQ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{CR} = \frac{2}{5}\overrightarrow{CA}$

Démontrer que les droites (AQ), (BR) et (CP) sont concourants.

Solution :

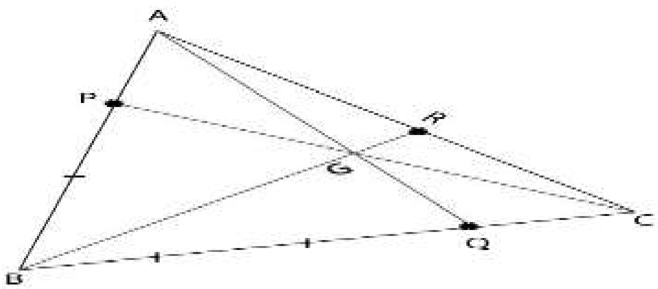
Démontrons que les droites (AQ), (BR) et (CP) sont concourants.

- $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{AP} = \frac{1}{2+1}\overrightarrow{AB}$, donc $P = bar\{(A,2),(B,1)\}$
- $\overrightarrow{CQ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{CB} \Rightarrow \overrightarrow{CQ} = \frac{1}{3+1}\overrightarrow{CB}$, donc $Q = bar\{(B,1),(C,3)\}$
- $\overrightarrow{CR} = \frac{2}{5}\overrightarrow{CA} \Rightarrow \overrightarrow{CR} = \frac{2}{3+2}\overrightarrow{CA}$, donc $R = bar\{(A,2),(C,3)\}$

Posons $G = bar\{(A,2),(B,1),(C,3)\} = bar\{(P,3),(C,3)\}$

- $G = bar\{(A,2),(B,1),(C,3)\} = bar\{(C,3),(P,3)\} \Rightarrow \mathbf{G} \in (\boldsymbol{CP})$
- $G = bar\{(A,2),(B,1),(C,3)\} = bar\{(A,2),(Q,4)\} \Rightarrow \mathbf{G} \in (\boldsymbol{AQ})$
- $G = bar\{(A,2),(B,1),(C,3)\} = bar\{(B,1),(R,5)\} \Rightarrow \mathbf{G} \in (\boldsymbol{BR})$

G appartient aux droites (CP), (AQ) et (BR), par conséquent, les droites (CP), (AQ) et (BR) sont concourantes en G. Barycentre des points pondérés (A, 2), (B, 1) et (C,3).



III.2-ligne de niveau

2.1-Définition :

Soit K un nombre réel et f une application du plan P dans ℝ. f : P→ ℝ

M→ $f(M)$.

On appelle ligne de niveau K de f, l'ensemble (E_k) des points M tels que $f(M) = k$

2.2-Lignes de niveau de M→ $\boldsymbol{\alpha MA^2 + \beta MB^2}$

Soit A et B deux points distincts du plan β, α *et* β deux nombres réel non tous nuls et f l'application de P dans R définie par : f : P→ ℝ

M→ $f(M) = \boldsymbol{\alpha MA^2 + \beta MB^2}$

Pour tout nombre réel k, on se propose de de déterminer la ligne de niveau (E_A) des points M du plan tels que : $f(M) = k$

- Si $\alpha + \beta \neq 0$, désignons par G le barycentre des points pondérés(A, α) $et(B, \beta)$. $si\ et\ seulement\ si\ \alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = \vec{0}$

On a : $(M) = \alpha MA^2 + \beta MB^2, (Ek\ )$ est tel que: $f(M) = k$ et

$$\alpha MA^2 + \beta MB^2 = \alpha(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA})^2 + \beta(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB})^2$$

$$= \alpha(MG^2 + 2\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GA} + GA^2) + \beta(MG^2 + 2\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GB} + GB^2)$$

$$= \alpha MG^2 + 2\alpha\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GA} + \alpha GA^2 + \beta GB^2 + 2\beta\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GB} + \beta GB^2$$

$$= \alpha MG^2 + 2\overrightarrow{MG}(\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB}) + \beta MG^2 + \alpha GA^2 + \beta GB^2$$

$$\alpha MA^2 + \beta MB^2 = (\alpha + \beta)MG^2 + \alpha GA^2 + \beta GB^2,$$

$or\ f(M) = \alpha MA + \beta MB = k$

Donc $(\alpha + \beta)MG^2 + \alpha GA^2 + \beta GB^2 = k \Leftrightarrow MG^2 = \frac{k - \alpha GA^2 - \beta GB^2}{\alpha + \beta}$

On pose $\rho = \frac{k - \alpha GA^2 - \beta GB^2}{\alpha + \beta}$

On envisage 3 cas suivants :

1[er] cas : si $\rho < 0, (E_K)$ est l'ensemble vide ;

2[e] cas : si $\rho = 0 (E_K)$ se réduit au point G ;

3e cas : si $\rho > 0, (E_K)$est le cercle de centre G et de rayon $\sqrt{\rho}$

- Si $\alpha + \beta = 0 \ \Rightarrow \beta = -\alpha$

$$\Rightarrow \alpha MA^2 + \beta MB^2 = \alpha MA^2 - \alpha MB^2$$

$$= \alpha(MA^2 - MB^2)$$

$$\Rightarrow \alpha MA^2 + \beta MB^2 = \alpha(MA^2 - MB^2), or\ \alpha MA^2 + \beta MB^2 = k$$

$$\Leftrightarrow \alpha(MA^2 - MB^2) = k$$

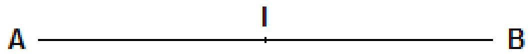
$$\Leftrightarrow MA^2 - MB^2 = \frac{k}{\alpha}$$

On pose $k' = \frac{k}{\alpha} \Leftrightarrow MA^2 - MB^2 = k'$

Le problème revient à déterminer l'ensemble des points M du plan tels que :

$MA^2 - MB^2 = k'$

Soit I le milieu du segment $[AB]$



On a: $MA^2 - MB^2 = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB})(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB})$

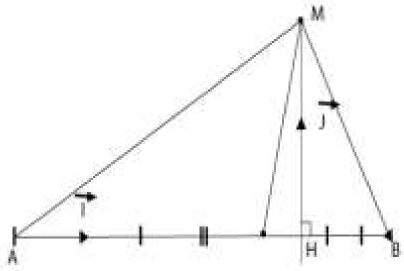
$= (\overrightarrow{M\mathrm{I}} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})(\overrightarrow{M\mathrm{I}} + \overrightarrow{IA} - \overrightarrow{MI} - \overrightarrow{IB})$

$= (2\overrightarrow{M\mathrm{I}} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB})(\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IB}), or\ \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}\ et\ \overrightarrow{IA} = -\overrightarrow{IB}$

$\Leftrightarrow MA^2 - MB^2 = 2\overrightarrow{MI}(\overrightarrow{IA} - (-\overrightarrow{IA})$

$= 2\overrightarrow{MI}(2\overrightarrow{IA})$

$= 2\overrightarrow{MI}.2\overrightarrow{IA}$; or $\overrightarrow{IA} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{IA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$



$\Leftrightarrow MA^2 - MB^2 = 2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{BA}$; or $MA^2 - MB^2 = k'$

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{MI}(-\overrightarrow{BA}) = k'$

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{IM} = k'$

Désignons par H le projet orthogonal de sur la droite (AB).

On a: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{IM} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{IH}$

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{IM} = 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{IH}$

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{IH} = k' \Leftrightarrow \overrightarrow{IH} = \frac{k\prime}{2\overrightarrow{AB}}$

On en déduit que le point H est indépendant du point M ; (Ek) est donc la droite perpendiculaire à (AB) passant par H.

Propriété :

Soit A et B deux points distincts du plan P,$\alpha\ et\ \beta$ deux nombres réel non tous nul et f l'application de P dans ℝ définie par : $f(M) = \alpha MA^2 + \beta MB^2$

- $Si\ \alpha + \beta \neq 0$, on désigne par G le barycentre de (A,α) $et\ (B, \beta)$; la ligne de niveau k de l'application f est (E_k) telle que :
  - (E_k) est ou bien l'ensemble vide ;
  - (E_k) est ou bien le point G ;
  - (E_k) est ou bien le cercle de centre G. et de rayon $\sqrt{\rho}$.
- Si $\alpha + \beta = 0$, la ligne de niveau k de l'application f est une droite perpendiculaire à (AB)

2.3-Ligne de niveau de M→ $\frac{MA}{MB}$

Soit A et B deux points distincts du plan et k un nombre réel strictement positif. On se pose propose de déterminer l'ensemble (E_k) des points M du plan tels que : $\frac{MA}{MB} = k$

- Si $k = 1, \frac{MA}{MB} = 1 \Leftrightarrow MA = MB$, alors ($E_k$) est la médiatrice de $[AB]$
- Si $k \neq 1, on\ a : \frac{MA}{MB} = k \Leftrightarrow Ma = kMB$

$\Leftrightarrow MA^2 = k^2 MB^2$

$\Leftrightarrow MA^2 - k^2 MB^2 = 0$

On se ramène au problème précédent qui est de déterminer la ligne de niveau (E_k) de l'application M→ $\alpha MA^2 + \beta MB^2$ avec $\alpha = 1\ et\ \beta = -k^2$

Soit G le barycentre (A,1) et $(B, -k^2)$

$$G = bar\{(A;1);\ (B;-k^2)\} \Leftrightarrow \overrightarrow{GA} - k^2\overrightarrow{GB} = \vec{0}$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{GA} = k^2\overrightarrow{GB}$$
$$\Leftrightarrow GA^2 = k^2GB^2$$

$M \in (E_k) \Leftrightarrow\ MA^2 - k^2MB^2 = 0$

$$\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}\right)^2 - k^2\left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB}\right) = \vec{0}$$
$$\Leftrightarrow MG^2 + 2\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GA} + GA^2 - k^2\left(MG^2 + 2\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GB} + GB^2\right) = \vec{0}$$
$$\Leftrightarrow MG^2 + 2\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GA} - k^2\overrightarrow{MG^2} - 2k^2\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GB} - k^2\overrightarrow{GB^2} = \vec{0}$$
$$\Leftrightarrow (1-k^2)MG^2 + 2\overrightarrow{MG}\left(\overrightarrow{GA} - k^2\overrightarrow{GB}\right) + GA^2 - k^2GB^2 = \vec{0}$$
$$\Leftrightarrow (1-k^2)MG^2 + GA^2 - k^2GB^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow MG^2 = \frac{-GA^2 + k^2GB^2}{1-k^2}$$
$$\Leftrightarrow MG^2 = \frac{GA^2 - k^2GB^2}{k^2-1}, or\ GA = k^2GB \Leftrightarrow GA^2 = k^4GB^2$$
$$\Leftrightarrow MG^2 = \frac{k^4GB^2 - k^2GB^2}{k^2-1}$$
$$= \frac{k^2(k^2-1)GB^2}{k^2-1}$$
$$= k^2GB^2$$
$$MG^2 = k^2GB^2 \Leftrightarrow MG = kGB$$

(E_k) est le cercle de centre G et de rayons kGB

Remarque :

- G est extérieur au segment $[AB]$
- $MG^2 = k^2GB.GB, or\ k^2GB\ = GA$

$\Rightarrow MG^2\ = GA.GB$

Donc $MG^2 = \overline{GA}.\overline{GB}$

Chapitre 9 : ANGLES ORIENTES ET TRIGONOMETRIE

I. Angles orientés :

I-1 **Mesure d'un angle orienté**

1.1 **Définition** : soit$(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ un angle orienté et α sa mesure principale. On appelle mesure de l'angle orienté $(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}})$ tout nombre réel de la forme : $\alpha + k2\pi, ou\ k \in \mathbb{Z}$

Remarque :

- A tout nombre réel x correspond un unique point M de (c), donc un unique orienté $(\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OM}})$ donc x est l'une mesure des mesures
- Si x est une mesure d'un angle orienté, les mesures de cet angle sont les nombres réels de la : $x + k2\pi\ ou\ k \in \mathbb{Z}$.
- Tous les nombres réels, mesure d'un même angle orienté, ont le même point image sur le cercle trigonométrique. ce point sera noté, selon les besoins, $M(x)$, $M(x+2\pi), M(x-2\pi)$, etc ……
- Deux angles orientés sont égaux si et seulement si une mesure de l'un est une mesure de l'autre.

Notations :

- L'angle orienté $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ de mesure α sera noté $\hat{\alpha}$.
- L'angle orienté nul et l'angle orienté plat seront notés respectivement $\hat{O}\ et\ \hat{\pi}$.

1.2. **Congruence modulo 2π**

1.2.1- **Définition** : deux nombres réels $x\ et\ y$ sont congrus modulo 2π. S'ils diffèrent d'un multiple entier de 2π

On note : $x \equiv y[2\pi]$

On lit : « $x\ est\ congru\ à\ y\ modulo\ 2\pi$ »

Retenons bien :

$\exists k \in \mathbb{Z}, x = y + 2k\pi$

$$x \equiv y[2\pi] \Leftrightarrow x - y = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$
$$\Leftrightarrow x = y + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

1.1.2- propriétés :

Pour tous nombres réels $x, y, z\ et\ a$, on a :

- $x \equiv y[2\pi] \Leftrightarrow x + a \equiv y + a[2\pi]$
- $x \equiv y[2\pi] \Leftrightarrow -x \equiv -y[2\pi]$
- $\begin{cases} x \equiv y[2\pi] \\ y \equiv z[2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow x \equiv z[2\pi]$

1.2.3- **Recherche de la mesure principale d'un angle.**

Application :

1) Déterminer la mesure principale des angles orientés $\frac{37\pi}{3}$ et$-\frac{71\pi}{6}$,
2) Placer les points $M_1(\frac{37\pi}{3})M_2(-\frac{71\pi}{6})$ sur le cercle trigonométrie.

Résolution

1) Déterminons la mesure principale des angles orientés $\frac{37\pi}{3}$ et$-\frac{71\pi}{6}$,

Nous remarquons que :

- $\frac{37\pi}{3} = \frac{\pi+36\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + 6 \times (2\pi)$

Donc $\frac{37\pi}{3} \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$

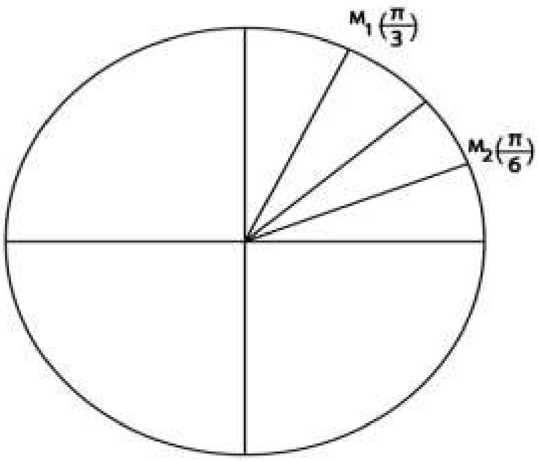
$\frac{37\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + 2(6\pi)$, avec $k = 6$; de plus $\frac{\pi}{3} \in]-\pi, \pi]$ donc la mère principale de cet angle est $\frac{\pi}{3}$.

- $-\frac{71\pi}{6} = \frac{-72\pi+\pi}{6} = -12\pi + \frac{\pi}{6}$

$$\Leftrightarrow -\frac{71\pi}{6} = \frac{\pi}{6} - 12\pi = \frac{\pi}{6} + 2(-6\pi)$$
$$\Leftrightarrow -\frac{71\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + 2(-6\pi),\ k = -6$$

Donc la mesure principale de $-\frac{71\pi}{6}$ est $\frac{\pi}{6}$

2) Plaçons les points $M_1(\frac{37\pi}{3})M_2(-\frac{71\pi}{6})$ sur le cercle trigonométrie.



Méthode :

Pour déterminer la mesure principale θ d'un angle orienté, dont une mesure α est connue, on écrit :

$$\theta = \alpha + k2\pi \quad ou - \pi < \alpha \leq \pi \ , k \in \mathbb{Z}$$

- Cette écriture peut être immédiate, sinon on détermine tout d'abord k à l'aide des inégalités : $-\pi < \alpha + k2\pi \leq \pi$
- Puis on détermine θ en utilisant l'égalité θ=$\alpha + k2\pi$.

Remarque : (passage de degré en radian)

- Si x est une mesure en radian d'un angle orienté, une mesure y en degré de cet angle orienté est obtenue par suivante : $\frac{x}{\pi} = \frac{y}{180}$
- Sauf mention contraire, si non l'unité l'égalité d'angle utilisé par la suite sera le radian.
- soit α la mesure principale (en radian) d'un angle orienté et M le point image de α sur le cercle trigonométrique, la longueur $\widehat{IM} \quad est \ |\alpha|$

I_2 –Somme de deux angles orientés

2.1- définition :

Soit $\hat{\alpha}\ et\ \hat{\beta}$ deux angles orientés de mesure respective $\alpha\ et\ \beta$,

On appelle somme des angles orientés $\hat{\alpha}\ et\ \hat{\beta}\ et\ on\ note\ :\ \hat{\alpha} + \hat{\beta}$, l'angle orienté dont l'une des mesure est $\alpha + \beta$

Remarque :

- Deux angles orientés sont supposés lorsque leur somme est l'angle nul, l'opposé $\hat{\alpha}$ est noté $-\hat{\alpha}$. On a : $\hat{\alpha}+(-\hat{\alpha})$=$\hat{0}$
- La différence de deux angles orientés est la somme premier et de l'opposé de l'autre : $\hat{\alpha}-\hat{\beta}=\hat{\alpha}+\left(-\hat{\beta}\right)$.
- Les propriétés de l'addition des angles orientés sont celles de l'addition des nombres réels, en particulier, $\hat{\alpha}+\hat{\beta}=\hat{\beta}+\hat{\alpha}$

II. Propriétés des angles orientés

II_1 − Relation de Charles

1.1 − Propriété :

Pour tous vecteurs non nuls $\vec{u}, \vec{v}\ et\ \vec{w}$

$\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right)+\left(\widehat{\vec{v},w}\right)=\left(\widehat{\vec{u},w}\right)$. (Appelé la relation de Chasles)

1.2 −Cconséquences de la relation de Chasles

1.2.1- Propriété 1 :

$soit\ \vec{u},\ \vec{v},\ \vec{u}'$ et $\vec{v}'$ quatre vecteurs non nuls.

On a: $\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right)=\left(\widehat{\vec{u}',\vec{v}'}\right)\Leftrightarrow\left(\widehat{\vec{u},\vec{u}'}\right)=\left(\widehat{v,\vec{v}'}\right)$

Preuve :

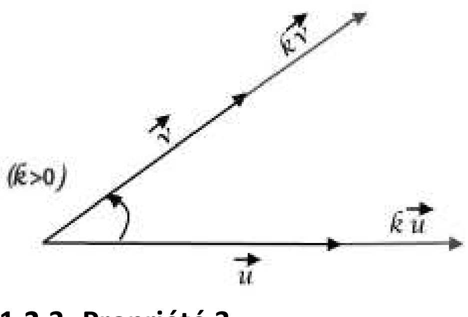
$$\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right)=\left(\widehat{\vec{u}',\vec{v}'}\right)\Leftrightarrow\left(\widehat{\vec{u},\vec{u}'}\right)+\left(\widehat{\vec{u}',\vec{v}}\right)=\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}'}\right)+\left(\widehat{\vec{v},\vec{v}'}\right)$$
$$\Leftrightarrow\left(\widehat{\vec{u},\vec{u}'}\right)=\left(\widehat{\vec{v},\vec{v}'}\right)$$

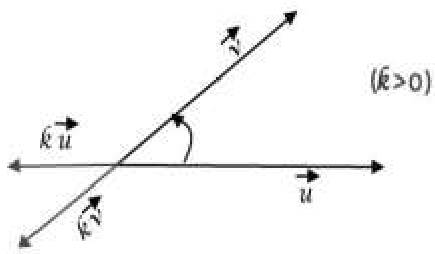
1.2.2- Propriété 2

Soit $\vec{u}\ et\ \vec{v}$ deux vecteurs non nuls et k un nombre réel non nul.

On a :

- $\left(\widehat{\vec{v},\vec{u}}\right)=-\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right)$
- $si\ k>0, alors\ \left(\widehat{k\vec{u},\vec{v}}\right)=\left(\widehat{\vec{u},k\vec{v}}\right)=\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right)$
- $si\ k<0, alors\left(\widehat{k\vec{u},\vec{v}}\right)=\left(\widehat{\vec{u},k\vec{v}}\right)=\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right)+\hat{\pi}$
- $\left(\widehat{k\vec{u},k\vec{v}}\right)=\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right)$





1.2.3- Propriété 3

Pour tous réels $\alpha\ et\ \beta$ d'images respectives A et B sur (C) (cercle trigonometrique), alors :

$\beta-\alpha$ est une mesure de l'angle orienté$(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}})$ c'est-à-dire : $mes(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}})$=$\beta-\alpha$

D'où $mes\left(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}\right)=\beta-\alpha$

II_2 − Double d'un angle orienté

2.1- Définition

Soit $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ un angle orienté

On appelle double de $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ et on note α$(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$, l'angle orienté défini par :

$2(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) = (\widehat{\vec{u},\vec{v}}) + (\widehat{\vec{u},\vec{v}})$

Remarque :

- Le double d'un angle orienté de mesure α a pour mesure 2α
- Soit $\hat{\alpha}$ *et* $\hat{\beta}$ deux angles orientés et on a : $2\hat{\alpha} + 2\hat{\beta} = 2(\hat{\alpha} + \hat{\beta})$

2.2- Propriété

Soit $\hat{\alpha}$ *et* $\hat{\beta}$ deux angles orientés et $\hat{\delta}$ l'angle orienté droit direct. On a :

- $2\hat{\alpha} = \hat{0} \Leftrightarrow \hat{\alpha} = \hat{0}$ *ou* $\hat{\alpha} = \hat{\pi}$.
- $2\hat{\alpha} = 2\hat{\beta} \Leftrightarrow \hat{\alpha} = \hat{\beta}$ *ou* $\hat{\alpha} = \hat{\beta} + \hat{\pi}$.
- $2\hat{\alpha} = \hat{\pi} \Leftrightarrow \hat{\alpha} = \hat{\delta}$ *ou* $\hat{\alpha} = -\hat{\delta}$

2.3-Exemple de l'alignement de points

Trois points A,B et c distincts du plan sont alignés si et seulement si : $2\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right) = \hat{0}$

Démonstration

$2\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right) = \hat{0} \Leftrightarrow \left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right) = \hat{0}$ *ou* $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right) = \hat{\pi}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{AC}$ *sont colénaires.*

$\Leftrightarrow A, B$ *et* C *sont alignés.*

2.3.1 Théorème :

Pour démontrer que trois points A,B et C sont alignes, on peut établir que : $2\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right) = \hat{0}$

$II_3 -$ **Angles orientés et cercle**

3.1- Caractérisation d'un cercle

3.1.1- Propriété :

Soit (C) un cercle de centre O ; A et B deux points distincts de ce cercle.

Pour tout point M distinct de A et B, on a :

$M \in (C) \Leftrightarrow 2.\left(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}}\right) = \left(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}\right)$

3.2- Points cocycliques

- Deux points situés sur un même cercle sont cocycliques
- Par deux points distincts A et B, il passe une infinité de cercles
- Par trois points distincts et non alignes A, B et C, il passe un seul cercle : le cercle circonscrit à ABC

3.2.1- Théorème

Soit A, B, C, D quatre points distincts du plan tels que trois quelconques d'entre eux ne sont pas alignés.

Les points A, B, C et D sont cocycliques si et seulement $2\left(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}}\right) = 2\left(\widehat{\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB}}\right)$

Démonstration

Démontrons que A, B, C, D sont cocycliques si et seulement $2\left(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}}\right) = 2\left(\widehat{\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB}}\right)$

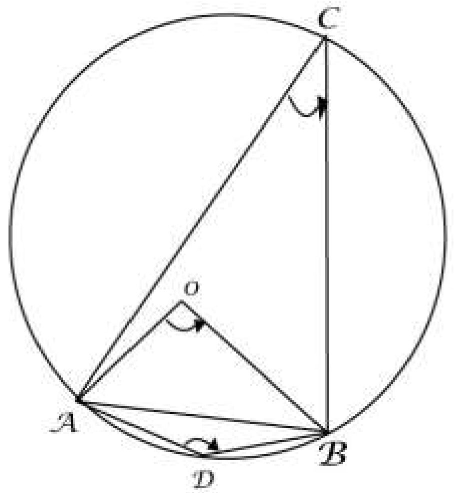
$\Longrightarrow$) Si A, B, C et D appartiennent à un même cercle (C) de centre O, alors d'après la propriété précédente, on a : $2\left(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}}\right) = \left(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}\right)$ et $2\left(\widehat{\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB}}\right) = \left(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}\right)$

Donc : $2\left(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}}\right) = 2\left(\widehat{\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB}}\right)$

$\Longleftarrow$) Réciproque si, $2\left(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}}\right) = 2\left(\widehat{\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB}}\right)$, désignons par (C) le cercle circonscrit au triangle ABC et par O le centre de ce cercle.

On a : $2\left(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}}\right) = \left(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}\right)$, donc $2\left(\widehat{\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB}}\right)$ et le point D appartient au cercle (C).

Les points A,B ,C et D sont cocycliques.



Exercice d'application :

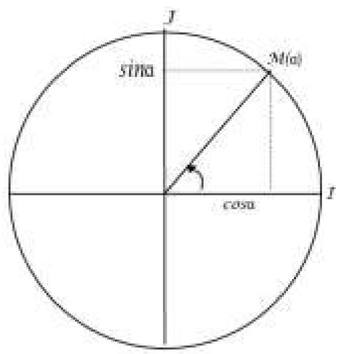
Sur le cercle trigonométrique, on considère les points A et B images respectives des nombres réels $-\frac{1999\pi}{6}$ et $\frac{3\pi}{4}$

1) Placer les points A et B
2) Quelle est la mesure principale de l'angle orienté $\left(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}\right)$

III. Trigonométrie

III_1 − Lignes trigonométriques d'un angle orienté

1.1 − Cosinus et sinus d'un angle orienté



Définition :

Soit $(\vec{u},\vec{v})$ un angle orienté de mesure α et M l'image de α sur (C).

- Le cosinus de $(\vec{u},\vec{v})$ ou de α est l'abscisse de M.
- Le sinus de $(\vec{u},\vec{v})$ ou α est l'ordonnée M

Remarque :

Dans le repère (O,I,J), on a : M$\binom{cos\alpha}{sin\alpha}$

Pour tout nombre réel α et pour tout entier relatif k,

On a: $cos^2\alpha + sin^2\alpha = 1$

$-1 \leq cos\alpha \leq 1$

$-1 \leq sin\alpha \leq 1$

$\cos(\alpha + 2k\pi) = cos\alpha$

$\sin(\alpha + 2k\pi)\ sin\alpha$

1.2- Tangente d'un angle orienté

1.2.1- Définition

Soit $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ un angle orienté non droit de mesure α. La tangente de $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ ou de α est le nombre réel, noté tan $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ ou tanα défini par : $tan(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) = \tan\alpha = \frac{sin\alpha}{cos\alpha}$

1.3- Lignes trigonométriques des angles remarquables

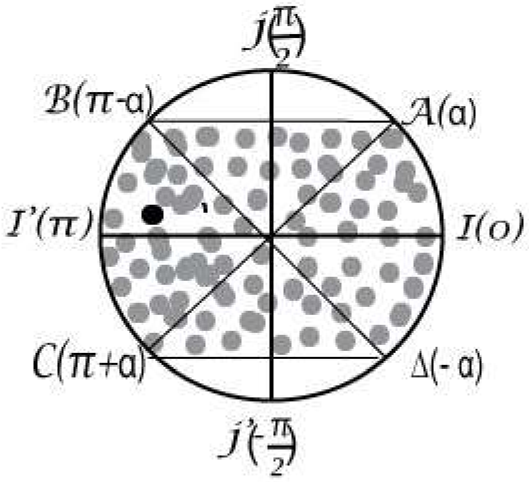
Le tableau ci-dessous indique les lignes trigonométriques remarquables à retenir

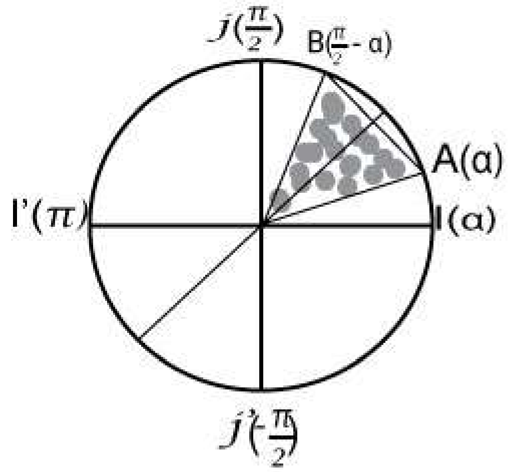
α	1	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\tan\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	?

1.4- Lignes trigonométriques d'angles associées

Soit $\hat{\alpha}$ un angle orienté de mesure α.

Les angles orientés de mesure $-\alpha, \pi-\alpha, \pi+\alpha, \frac{\pi}{2}-\alpha$ ou $\frac{\pi}{\alpha}+\alpha$ sont habituellement appels angles associés à $\hat{\alpha}$





Les deux configurations géométriques ci-dessous, ainsi que les définitions des fonctions sinus, cosinus et tangente, justifient les propriétés suivantes :

1.5- Propriétés :

Pour tous nombres réels α,
on a :

- $\cos(-\alpha) = cos\alpha \cos(\pi-\alpha) = -cos\alpha$
- $\sin(-\alpha) = -sin\alpha\sin(\pi-\alpha) = sin\alpha$
- $\cos(\pi+\alpha) = -cos\alpha \quad \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = sin\alpha$
- $\sin(\pi+\alpha) = -sin\alpha\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$=cosα

Remarque :

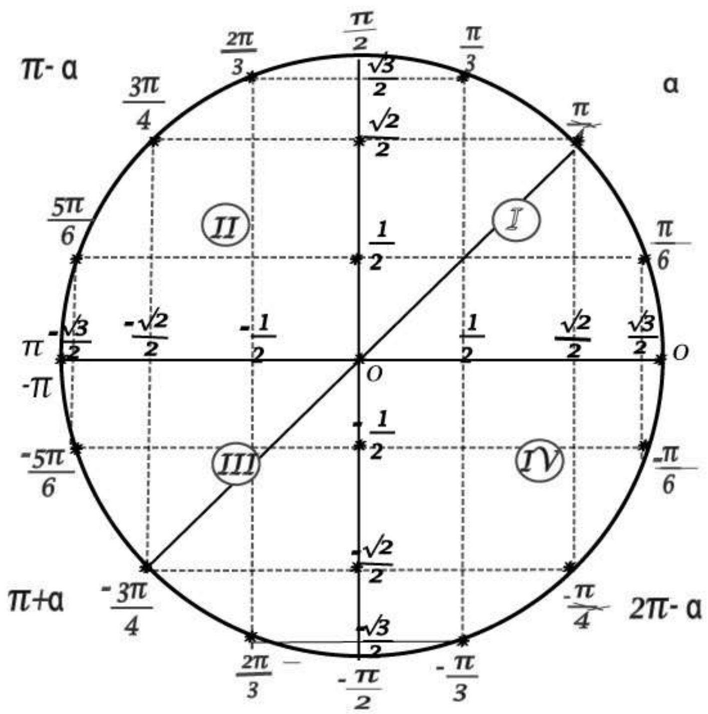
$\frac{\pi}{2}+\alpha=\pi-(\frac{\pi}{2}-\alpha)$, donc on a également les relations suivantes :

- $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-sin\alpha$
- $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=cos\alpha$

Exemples :

Les lignes trigonométriques des associées permettent de calculer les lignes trigonométriques, les nombres réels de l'intervalle$]-\pi,\pi[$ representes sur la figure ci-dessous, on a:

- $cos\,\frac{5\pi}{6}=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=-cos\,\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}\alpha=\frac{\pi}{2}$
- $sin\,\frac{5\pi}{6}=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$
- $\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)=cos\,\frac{2\pi}{3}=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)=-cos\,\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{2}$
- $\sin(-\frac{2\pi}{3})$=-sin$\frac{2\pi}{3}$=-sin$\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)=-sin\,\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$



III_2 − Formule de trigonométrie :

2.1- Formules d'addition

2.1.1- Propriétés :

Pour tous nombres réels a et b, on a :

- $\cos(a-b)=cosacosb+sinasinb$
- $\sin(a-b)=cosacosb-sinbcosa$
- $cos(a+b)=cosacosb-sinacosb$
- $\sin(a+b)=sinacosb+sinbcosa$

Exemple :

Calculer $cos\frac{5\pi}{12}, \sin\frac{5\pi}{12}\ et\ tan\frac{5\pi}{12}$

On peut décomposer $\frac{5\pi}{12}$ de la façon suivante :

$\frac{5\pi}{12} = \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\ et\ calculer$ $\cos(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{4})$, $\sin(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{4})$ et $\tan(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{4})$ en utilisant les formules d'addition.

Donc $cos\frac{5\pi}{12} = \cos\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)$

$$= cos\frac{2\pi}{3}cos\frac{\pi}{4} + sin\frac{2\pi}{3}sin\frac{\pi}{4}$$

$$= -\frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$cos\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt{3} - 1)$$

$$sin\frac{5\pi}{12} = sin\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= sin\frac{2\pi}{3}cos\frac{\pi}{4} - cos\frac{2\pi}{3}sin\frac{\pi}{4}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \times \left(\frac{-1}{2}\right)$$

$$sin\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3} + 1)$$

$$tan\frac{5\pi}{12} = \frac{sin\frac{5\pi}{12}}{cos\frac{5\pi}{12}}$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1)}{\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1)}$$

$$= \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$$

$$= \frac{(\sqrt{3} + 1)(\sqrt{3} + 1)}{(\sqrt{3} + 1)(\sqrt{3} - 1)}$$

$$= \frac{3+2\sqrt{3}+1}{3-1}$$

$$= \frac{4+2\sqrt{3}}{2}$$

$$= 2 + \sqrt{3}$$

$$tan\frac{5\pi}{12} = 2 + \sqrt{3}$$

2.2- Formules de duplication et de linéarisation

2.2.1-Proprietes

Pour tout nombre réel a, on a :

- Formule de duplication : $\begin{cases} cos2a = cos^2a - sin^2a \\ sin2a = 2sinacosa \end{cases}$
- Formule de linéarisation : $\begin{cases} cos^2a = \frac{1+cos2a}{2} \\ sin^2a = \frac{1-cos2a}{2} \end{cases}$

Exemple :

Calculons $cos\frac{\pi}{12}$ et $sin\frac{\pi}{12}$ en utilisant les formules de linéarisation.

On sait :

- $\text{Cos}^2\frac{\pi}{12} = \frac{1+cos2\times\frac{\pi}{12}}{2} = \frac{1+cos\frac{\pi}{6}}{2} = \frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{4+2\sqrt{3}}{8} = \frac{(\sqrt{3}+1)^2}{8}$

  $\text{Cos}^2\frac{\pi}{12} = \frac{(\sqrt{3}+1)^2}{8}$

  $\text{Cos}\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$

- $\sin^2\frac{\pi}{12} = \frac{1-cos\frac{\pi}{6}}{2} = \frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{4-2\sqrt{3}}{8} = \frac{(\sqrt{3}-1)^2}{8}$

  $\text{Sin}^2\frac{\pi}{12} = \frac{(\sqrt{3}-1)^2}{8}$

  $\text{Sin}\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$

2.3- Expression de cosα, sinα et tanα en fonction de tan$\frac{\alpha}{2}$

2.3.1- Propriétés :

Pour tout nombre réel α tel que tan$\frac{\alpha}{2}$ soit défini, en passant $= tan\frac{\alpha}{2}$, on a :

- cosα$= \frac{1-t^2}{1+t^2}$,
- $sin\alpha = \frac{2t}{1+t^2}$

Si, de plus, tanα est infini,

- $tan\alpha = \frac{2t}{1+t^2}$

IV. Equations trigonométriques

IV_1 − Equation de types : $cosx = a, sinx = a$, $\tan x = a$

1.1 − Equation du type : $cos = a$

$cos = a$ ou x est l'inconnue et a un nombre réel donné, on distingue deux cas :

1er cas : si $a < -1\ \ ou\ a > 1$, cette équation n'a pas de solution puis que $\forall x \in \mathbb{R}, on\ a$: $-1 \leq cosx \leq 1$

2e cas : si $a \in [-1,1]$, il existe un nombre réel α tel que $cos\alpha = a$

$$cosx = 0 \Leftrightarrow \quad cosx = cos\alpha$$

$$\Leftrightarrow x = \alpha + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\ ou\ x = -\alpha + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

On dit que $x \equiv \alpha[2\pi]\ ou\ x \equiv -\alpha[2\pi]$

L'ensemble de solution de cette équation est : $S = \{\alpha + 2k\pi, -\alpha + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

Propriété :

Pour tous nombres $x\ et\ \alpha$, on a :

$cosx = \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\ ou\ x = -\alpha + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Exemple :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) : $cos2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

On a $cos\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, alors :

$$cos2x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow cos2x = cos\frac{5\pi}{6}$$

$$\Leftrightarrow 2x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \quad ou\ 2x = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{5\pi}{12} + k\pi \quad ou\ x = -\frac{5\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$
$$S = \left\{-\frac{5\pi}{12} + k\pi, \frac{5\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$$

1.2 − Equation du type : sin$\boldsymbol{x = a}$

Pour résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $sinx = a, ou\ x$ est l'inconnue et a un nombre réel donné, on distingue deux cas :

1er cas : si $a < -1\ ou\ a > 1$, cette équation n'a pas de solution puisque $\forall x \in \mathbb{R}$, on a : $-1 \leq sinx \leq 1$

2^{e} cas : si $a \in [-1,1]$,il existe un nombre réel α tel que sinα=a

$$sinx = a \Leftrightarrow sinx = sin\alpha$$
$$\Leftrightarrow x = \alpha + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\ ou\ x = \pi - \alpha + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

On dit que $x \equiv \alpha[2\pi]\ ou\ x \equiv \pi - \alpha[2\pi]$

L'ensemble de solution de cette équation est : $S = \{\alpha + 2k\pi;\ \pi - \alpha + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

Propriété :

Pour tous nombres réels$x\ et\ \alpha, on\ a$:

$sinx = sina \ \Leftrightarrow x = \alpha + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\ ou\ x = \pi - \alpha + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Exemple :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) : $\sin(x - \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2}$

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin(x - \frac{\pi}{4}) = \sin\frac{1}{2}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ ou \\ x - \frac{\pi}{4} = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ ou \\ x = \frac{5\pi}{6} + \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5\pi}{12} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ ou \\ x = \frac{13\pi}{12} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$
$$S = \left\{\frac{5\pi}{12} + 2k\pi, \frac{13\pi}{12} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$$

1.3 − Equation du type :$\boldsymbol{tanx = a}$

Pour résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $tanx = a, ou\ x$ est l'inconnue et a un nombre réel donné, tout en sachant que la fonction tangente prend ses valeurs dans $\mathbb{R}$, $\forall a \in \mathbb{R}$, il existe un nombre réel α tel que $tan\alpha = a$

$$tanx = a \ \Leftrightarrow tanx = tan\alpha$$

$$\Leftrightarrow x = \alpha + 2k\pi \; ou \; x = \pi + \alpha + 2k\pi$$

C'est-à-dire : $x = \alpha + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

L'ensemble de solution de cette équation est : $S = \{\alpha + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

Propriété :

Pour tous nombres réels $x \; et \; \alpha$ telsque $tanx \; et \; tan\alpha$ sont définis, on a :

$$tanx = tan\alpha \; \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Exemple :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $tan3x = -\sqrt{3}$

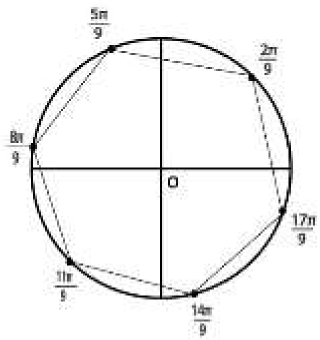
Nous savons que $tan\frac{2\pi}{3} = -\sqrt{3}$

Alors l'équation devient : $tan3x = \; tan\frac{2\pi}{3}$

$$\Leftrightarrow 3x = \frac{2\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2\pi}{9} + k\frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

$$S = \left\{\frac{2\pi}{9} + k\frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}\right\}$$



Les imagines des solutions sont des sommets d'un hexagone régulier inscrit dans le cercle trigonométrique.

IV_2 − Equation du type : $acosx + bsinx + c = 0$

Méthode de résolution :

Pour résoudre dans $\mathbb{R}$ une équation du type :$acosx + bsinx + c = 0$

On distingue deux cas

1[er] cas : $si \; a = 0 \; ou \; b = 0 \; on \; se \; raméne$ à $une \; équation \; du \; type : cosx = a \; ou \; sinx = a$

2[e] cas : $si \; a \neq 0 \; et \; b \neq 0, alors \; a^2 + b^2 \neq 0 et \; on \; a :$

$$acosx + bsinx = \sqrt{a^2+b^2}(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}cosx + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}sinx$$

Or $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = 1$, donc il existe un nombre réel $\emptyset$ tel que :

$$cos\emptyset = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \; et \; sin\emptyset = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Alors on en déduit que ;

$$acosx + bsinx = \sqrt{a^2+b^2}(cos\emptyset cosx + sin\emptyset sinx)$$

$$= \sqrt{a^2+b^2}\cos(\emptyset - x)$$

Ainsi : $acosx + bsinx = \sqrt{a^2+b^2}\cos(\emptyset - x)\,, or \; acosx + bsinx = -c$

Alors $\sqrt{a^2+b^2}\cos(\emptyset - x) = -c \; <=> \cos(\emptyset - x) = -\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$

On est donc ramené à résoudre l'équation : $\cos(\emptyset - x) = -\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$

Application 1 :

Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\frac{1}{2}cosx - \frac{\sqrt{3}}{2}sinx = \frac{\sqrt{2}}{2}$

On a : $a = \frac{1}{2}, b = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $c = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$a \neq 0 \; et \; b \neq 0, alors \; a^2 + b^2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1 \neq 0 \Longrightarrow \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{1} = 1$

Donc il existe un nombre réel Ø tel que : $cos\emptyset = \frac{1}{2}$ $et\ sin\emptyset = \frac{-\sqrt{3}}{2}$,

On en déduit que : $\emptyset = -\frac{\pi}{3}$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}cosx - \frac{\sqrt{3}}{2}sinx = cos\emptyset cosx + sin\emptyset sinx$$

$$= \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)cosx + \sin(-\frac{\pi}{3})sinx$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)cosx - \sin(\frac{\pi}{3})sinx$$

$$\frac{1}{2}cosx - \frac{\sqrt{3}}{2}sinx = \cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right), or\ \frac{1}{2}cosx - \frac{\sqrt{3}}{2}sinx = \frac{\sqrt{2}}{2} = cos\frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right) = cos\frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{3} + x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi\ \ ou\ \ \frac{\pi}{3} + x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow x = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3}2k\pi\ \ ou\ x = -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3}2k\pi$$

$$\Rightarrow x = -\frac{\pi}{12} + 2k\pi\ \ ou\ x = -\frac{7\pi}{4} - \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$x \equiv -\frac{\pi}{12}[2\pi]\ ou\ \ x \equiv -\frac{7\pi}{12}$$

$$s = \left\{-\frac{\pi}{12} + 2k\pi, -\frac{7\pi}{12} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Application 2 :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $cosx + \sqrt{3}sinx - \sqrt{2}$

IV_3 − Autres exemples d'équation trigonométrique

Application :

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) : $cos2x + \sqrt{3}sin2x = -1$ et représenter ses solutions sur le cercle trigonométrique.
2) Donner les solutions de (E) appartenant à l'intervalle $\left]-\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right[$

V. Inéquations trigonométriques

Pour la résolution des inéquations trigonométriques, on se limitera aux inéquations simples de types : $cosx \leq b\ ou\ cosax \leq b\ ou(\sin ou\ \tan)$.

Application :

1) Résoudre dans R l'inéquation (I) : $sinx > -\frac{1}{2}$ sur chacun des intervalles suivants :
   a)]-π; π] ;
   b) [0; 2π [;
   c) $\mathbb{R}$
2) Résoudre dans R l'inéquation (I) ; $cos2x \geq \frac{1}{2}$. On représentera l'ensemble de solutions appartenant à l'intervalle $]-\pi; \pi]$ sur le cercle trigonométrique.
3) Résoudre dans $]-\pi; \pi]$, l'inéquation(I) : $\tan x < 1$. Représenter l'ensemble de solution sur le cercle trigonométrique.

Chapitre 10 : GEOMETRIE ANALYTIQUE DU PLAN

I. Orthogonalité et droites du plan

I_1 − Droite définie par un point et un vecteur normal

On sait que pour tout A et tout vecteur non nul $\vec{n}$, il existe une et une seule droite passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$. Cette droite est l'ensemble des points M du plan tels que : $\overrightarrow{QM} \perp \vec{n}$

1.1 −Equation cartésienne d'une droite.

Propriétés : soit a et b deux nombres réels tels que $(a, b) \neq (o, 0)$

- Pour tout nombre réel c, la droite (D)d'équation cartesienne $ax + by + c = 0$ admet $\vec{n}\binom{a}{b}$ pour vecteur normal.
- Réciproquement, toute droite de vecteur normal $\vec{n}\binom{a}{b}$ admet une équation cartesienne de la forme : $ac + by + c = \quad ou\ c \in \mathbb{R}$

  On note $\vec{u}\binom{-b}{a}$ est un vecteur directeur de (D)

Exemples :

1) Soit (D) : $2x - 3y + 4 = 0$. Determiner une équation cartesienne de la droite (Δ) perpendiculaire à (D) et passant par point A(-1,2) ;
2) On donne les points $A\binom{-3}{4}$ et B$\binom{1}{2}$. Déterminer une équation cartésienne de la médiatrice du segment $[AB]$.

Résolution :

1) (D): $2x - 3y + 4 = 0$. Le vecteur directeur de (D) $est\ \vec{u}\binom{3}{2}$

Déterminons une équation cartésienne de la droite (Δ)

Soit M$\binom{x}{y}$ un point de la droite (Δ); on a : $\overrightarrow{AM}\binom{x+1}{y-2}$

$$M \in (\Delta) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\vec{u} = 0$$

$$\Leftrightarrow \binom{x+1}{y-2}\binom{3}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow 3(x+1) + 2(y-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow 3x + 2y - 1 = 0$$

D'où la droite (Δ) $a\ pour\ équation\ cartesienne$: $3x + 2y - 1 = 0$ de vecteur normal $\vec{n}\binom{3}{2}$

2) On donne les points $A\binom{-3}{4}$ et B$\binom{1}{2}$. Déterminons une équation cartésienne de la médiatrice du segment $[AB]$.

Soit (D) la mediatrice du segment $[AB]$ $de\ vecteur\ normal, le\ vecteur\ \overrightarrow{AB}$.

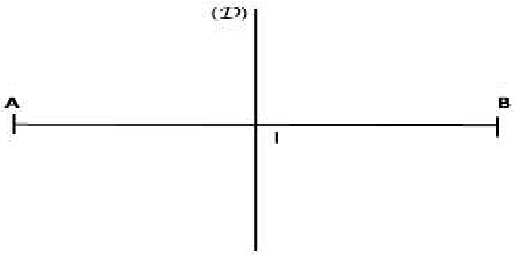
On a : $\overrightarrow{AB}\binom{4}{-2}$, donc (D) admet une équation de la forme : $4x - 2y + c = 0,\ c \in \mathbb{R}$

Soit $I\ milieu\ de$ $[AB]$, alors $I\binom{-1}{3}$

(D) Passe par $I, milieu\ de\ [AB], donc\ on\ a$:

$$4x - 2y + c = 0 \Leftrightarrow 4(-1) - 2(3) + c = 0 \Leftrightarrow c = 10$$

On n'en déduit que (D) a pour équation cartésienne suivante (D) : $4x - 2y + 10 = 0$



1. 2 −Parallélisme et orthogonalité de droites.

Propriétés :

Soit (D) et $(D^{'})$ deux droites d'équations cartésiennes respectives $ax + by + c = 0$ **et** $a^{'}x + b^{'}y + c' = 0$

1) $D)\ //\ (D')\Leftrightarrow ab' - a'b = 0$
2) $(D) \perp (D^{'}) \Leftrightarrow aa^{'} + bb^{'} = 0$

I_2 − Equation normal d'une droite

2. 1 −Propriété :

Soit(D) une droite, n un vecteur normal à (D) et O une mesure de l'angle orienté $\widehat{(\vec{\imath},\vec{n})}$. On considère le vecteur $\vec{v}$ tel que : $\vec{v} = \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|}$. $\vec{v}$ est un vecteur unitaire colinéaire à $\vec{n}$, donc $\vec{v}\begin{pmatrix}\cos\theta\\ sin\theta\end{pmatrix}$. $\vec{v}$ est un vecteur normal à (D), donc (D) admet une équation de la forme :

$x cos\,\theta + y\,sin\,\theta + k = 0$

On écrit :(D): $x\cos\theta + g\sin\theta + k = 0$ appelée équation normale de (D)

Démonstration

Soit une droite (D) d'équation cartésienne : $ax + by + c = 0$;

Si $a \neq o\ et\ b \neq 0$, alors $a^2 + b^2 = 0$ et $\vec{n}(a, b)$ tel que : $\|\vec{n}\| = \sqrt{a^2 + b^2} \neq 0$.

On a : $ax + by + c = \sqrt{a^2 + b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\mathrm{x} + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\mathrm{y} + \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$

Or $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = 1$, donc il existe un nombre réel θ tel que :

$\cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ et $\sin\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

On en déduit que :

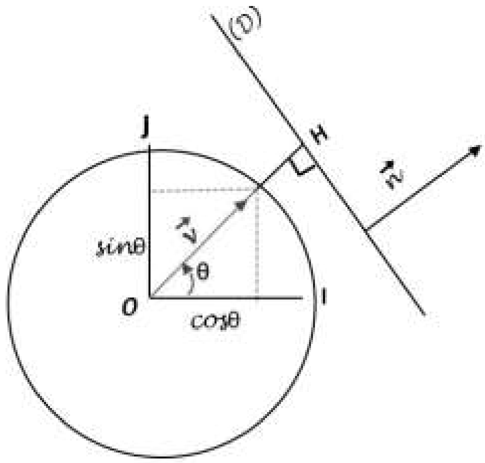
$$ax + by + c = \sqrt{a^2 + b^2}\left(\mathrm{x}\cos\theta + y\sin\theta + \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)$$

$$ax + by + c = 0 \Leftrightarrow \sqrt{a^2 + b^2}\left(\mathrm{x}\cos\theta + y\sin\theta + \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right) = 0$$

$\Leftrightarrow \mathrm{x}\cos\theta + y\sin\theta + \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} = 0$ et $\sqrt{a^2 + b^2} \neq 0$.

En posant $k = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$, on a : $\mathrm{x}\cos\theta + y\sin\theta + k = 0$

D'où (D): $\mathrm{x}\cos\theta + y\sin\theta + k = 0$ appelée équation normale de (D).



REMARQUE :

Toute droite (D) admet deux équations normales.

En effet, il existe deux vecteurs unitaires opposés, normaux à (D) qui font avec $\vec{\imath}$ des angles de mesures respectives θ et $\theta + \pi$.

Les équations normales correspondantes à ces deux valeurs sont :

$x\cos\theta + y\sin\theta + k = 0$ et $x\cos(\theta + \pi) + y\sin(\theta + \pi) - k = 0$

Exemple :

Soit (D) la droite passante par le point A (-2 ; 3) et de vecteur directeur $\vec{u}(1\,;\sqrt{3})$

Déterminer une équation normale de $(\mathcal{D})$

Résolution

A (-2 ; 3) un point de $(\mathfrak{D})$ et $\vec{u}(1\,;\sqrt{3})$ un vecteur directeur de $(\mathfrak{D})$.

$\vec{u}(1\,;\sqrt{3}) \Leftrightarrow \vec{n}(-\sqrt{3}\,;1)$ est un vecteur normal de $(\mathfrak{D})$ de norme $\|\vec{n}\| = 2$, donc le vecteur unitaire normal à $(\mathfrak{D})$ est $\vec{\mathcal{V}} = \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|} \Leftrightarrow \vec{\mathcal{V}}(-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2})$

Soit M (x ; y) $\in(\mathfrak{D}) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \perp \vec{v}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\vec{v}=0$

$\Leftrightarrow \binom{x+2}{y-3}\begin{pmatrix}\frac{-\sqrt{3}}{2}\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow -\frac{\sqrt{3}}{2}(x+2) + \frac{1}{2}(y-3) = 0$

$\Leftrightarrow -\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y - \frac{2\sqrt{3}+3}{2} = 0$

Donc l'équation normale de $(\mathfrak{D})$ est : $-\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y - \frac{2\sqrt{3}+3}{2} = 0$

METHODE :

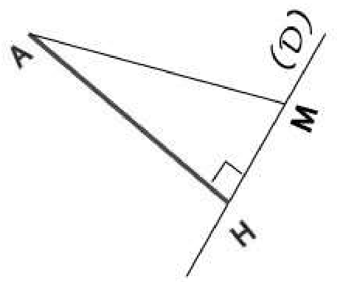
Pour obtenir une équation normale d'une droite ayant pour équations cartésienne :

$ax + by + c = 0$; il suffit de diviser les deux membres de cette équation par la norme du vecteur normale $\vec{n}\binom{a}{b}$; $\|\vec{n}\|=\sqrt{a^2+b^2}$

On obtient : $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}y + \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} = 0$

2. 2 –Distance d'un point à une droite

Soit $(\mathfrak{D})$ une droite, A un point du plan et H le projeté orthogonal de A sur $(\mathfrak{D})$



Pour tous point M et $(\mathfrak{D})$, on a AH≤AM.
AH est appelée distance de A à $(\mathfrak{D})$ noté $d(A,\mathfrak{D})$

Propriété 1

Soit A$\binom{x_0}{y_0}$ un point du plan et $(\mathcal{D})$ une droite d'équation normale : $xcos\theta \ + ysin\theta + k = 0$

On a: $d(A,\mathfrak{D}) = |x_0\cos\theta + y_0\sin\theta|$

Propriété 2

Soit A$\binom{x_0}{y_0}$ un point du plan et $(\mathcal{D})$ une droite d'équation cartésienne : a$ax + by + c = 0$

On a: $d(A,\mathfrak{D}) = \frac{|ax_0+\mathrm{b}y_0+\mathrm{c}|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

Exemple :

On considère les points A$\binom{-1}{2}$, B$\binom{-3/2}{-3/2}$ et C$\binom{3}{0}$

Calculons la distance du point A à la droite (BC).

Par définition $d\big(A,(BC)\big) = \frac{|ax_0+\mathrm{b}y_0+\mathrm{c}|}{\sqrt{a^2+b^2}}$,

Déterminons $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}3+\frac{3}{2}\\0+\frac{3}{2}\end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}\frac{9}{2}\\\frac{3}{2}\end{pmatrix}$

La droite (BC) a pour vecteur directeur $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}\frac{9}{2}\\\frac{3}{2}\end{pmatrix}$ et donc pour vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\-\frac{9}{2}\end{pmatrix}$.

Soit M$\binom{x}{y}$ un point du plan

M $\in$ (BC)⟺det $(\overrightarrow{CM},\overrightarrow{BC})$=0

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix}x-3 & \frac{9}{2}\\ y & \frac{3}{2}\end{vmatrix} = 0$$

$\Leftrightarrow \frac{3}{2}(x-3) - \frac{9}{2}y = 0$

$\Leftrightarrow \frac{3}{2}(x-3y-3) = 0$

Donc une équation cartésienne de (BC) est : $x - 3y - 3 = 0$ et $\vec{p}\binom{1}{-3}$

On a : A(-1,2) et $\|\vec{p}\|$=$\sqrt{1^2+(-3)^2} = \sqrt{10}$

Alors : $d\big(A,(BC)\big) = \frac{|1\times(-1)-3\times2-3|}{\sqrt{1^2+(-3)^2}} = \frac{|-10|}{\sqrt{10}} = \frac{10\sqrt{10}}{10} = \sqrt{10}$

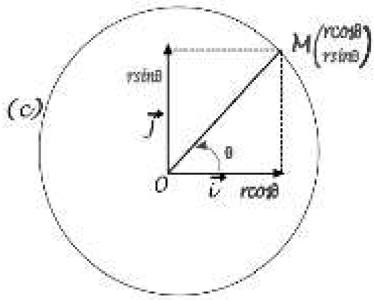
Donc $d\big(A,(BC)\big) = \sqrt{10}$

II. Cercle

II_1_Représentation paramétrique d'un cercle

1.1- Cercle centre à l'origine

Soit (C) un cercle de centre O et de rayon r pour tout point M ($\frac{x}{y}$), on a :



Mϵ (C) $\Leftrightarrow OM = r$

$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = r$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 = r^2$

$\Leftrightarrow \left(\frac{x}{r}\right)^2 + \left(\frac{y}{r}\right)^2 = 1$

$\Leftrightarrow \exists\theta\epsilon\mathbb{R}$, $\frac{x}{r} = \cos\theta$et$\frac{y}{r} = r\sin\theta$

$\Leftrightarrow$ $\exists\theta\epsilon\mathbb{R}$, x= $r\cos\theta$ et y= $r\sin\theta$ $\Rightarrow$M$\binom{r\cos\theta}{r\cos\theta}$

1.2- **Définition**

Soit $(\mathcal{C})$un cercle de centre 0 et de rayon r.

Le système $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$,($\theta\epsilon$ $\mathbb{R}$), est appelé représentation paramétrique de $(\mathcal{C})$ dans le repère (0; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$).

Exemple

1) On considère une représentation paramétrique: $\begin{cases} r = \cos\theta \\ y = \sin\theta \end{cases}$ ($\theta\epsilon\mathbb{R}$) d'un cercle trigonométrique $(\mathcal{C})$.

Déterminons une équation de ce cercle.

Soit M$\epsilon(\mathcal{C})$ $\Leftrightarrow$ OM= r

$\Leftrightarrow x^2 + \ y^2 \ = r^2$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 = \ cos^2\theta + sin^2\theta$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1.$

C'est un cercle de centre O et de rayon $r = 1$.

2) L'ensemble des points M$\binom{X}{Y}$ tels que $x^2 + \ y^2 = 8$ est le cercle de centre O et rayon $r = 2\sqrt{2}$

Déterminons une représentation paramétrique de (C) on a :

$x = r\,cos\,\theta \ \ et\ y = 2\sqrt{2}\,sin\,\theta$

$\Leftrightarrow \ x = 2\sqrt{2}\,cos\,\theta \ \ et\ y = 2\sqrt{2}\,sin\,\theta$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\sqrt{2\cos\theta} \\ y = 2\sqrt{2}\sin\theta \end{cases}$ (θ ϵ $\mathbb{R}$) est cette représentation.

1.3- Cercle de centre quelconque

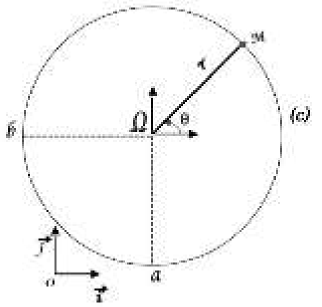
Soit (C) un cercle de centre $\Omega\binom{a}{b}$ et de rayon r pour tout point M$\binom{x}{y}$, on a :

Mϵ(C) $\Leftrightarrow \Omega M = r$

$\Leftrightarrow (x-a)^2 + (y-b)^2 = r$

$\Leftrightarrow \left(\frac{x-a}{r}\right)^2 \left(\frac{y-b}{r}\right)^2 = 1$

$\Leftrightarrow \exists\theta\epsilon\mathbb{R}$,$\frac{x-a}{r} = \cos\theta\ et\ \frac{y-b}{r} = sin\theta$



$$\Leftrightarrow \exists \theta \epsilon \mathbb{R}\,,\quad x = a + r\cos\theta \text{ et } y = b + r\sin\theta$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = a + r\cos\theta \\ y = b + r\sin\theta \end{cases},\ \theta\ \in \mathbb{R}$$

1.4- Définition

Soit (C) un cercle de centre $\Omega(a, b)$ et de rayon r.

Le système :$\begin{cases} x = a + \cos\theta \\ y = b + r\sin\theta \end{cases}$, $(\theta \epsilon \mathbb{R})$, est appelé représentation paramétrique (C) dans le repère (0; $\vec{\imath}\,;\vec{\jmath}$).

Exemple

1) Le cercle de centre A $(-3{,}4)$ et de rayon 2 a pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = -3 + 2\cos\theta \\ Y = 4 + 2\sin\theta \end{cases},\ (\theta \in \mathbb{R})$$

2) Soit (E) l'ensemble des points dont les coordonnes (x, y) vérifient l'équation :

$x^2 + y^2 - 2x + y - 1 = 0$

Déterminons les éléments caractéristiques de (E)

On a: $x^2 + y^2 - 2x + y - 1 = x^2 - 2x + y^2 + y - 1$

$$= (x-1)^2 - 1 + \left(y + \tfrac{1}{2}\right)^2 - \tfrac{1}{4} - 1$$

$$= (x-1)^2 + \left(y + \tfrac{1}{2}\right)^2 - 2 - \tfrac{1}{4}$$

$$x^2 + y^2 - 2x + y - 1 = (x-1)^2 + \left(y + \tfrac{1}{2}\right)^2 - \tfrac{9}{4}$$

$$x^2 + y^2 - 2x + y - 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + \left(y + \tfrac{1}{2}\right)^2 = \tfrac{9}{4}$$

Donc (E) est un cercle de centre $\Omega\left(1, -\frac{1}{2}\right)$ et de rayon $\frac{3}{2}$ et la représentation paramétrique de (E) est : $\begin{cases} x = 1 + \frac{3}{2}\cos\theta \\ y = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\sin\theta \end{cases},\ \ \theta \in \mathbb{R}$

3) Le système $\begin{cases} x = 3\cos\theta \\ y = -1 + 3\sin\theta \end{cases}$, $(\theta \epsilon \mathbb{R}\,)$ est une représentation paramétrique du cercle de centre $\Omega(0; -1)$ et de rayon 3.

Chapitre 11 : TRANSFORMATIONS DU PLAN

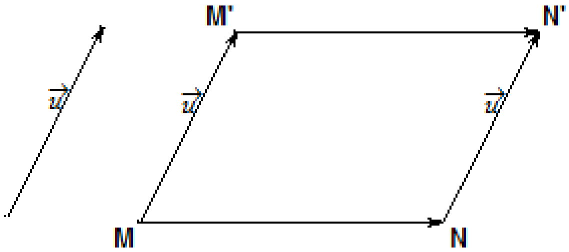
I. Translations et symétries orthogonales

I_1 – Translation

1.1 –Propriété

Soit f une application du plan dans lui-même.

f est une translation si et seulement si pour tous points M et N d'images respectives M' et N', on a : $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{M'N'}$.



On note la translation de vecteur $\vec{u}$ par $t_{\vec{u}}$.

- Si $\vec{u} = \vec{0}$, alors $t_{\vec{u}}$ est l'application identique (ou identité). Tous les points sont invariants.
- Si $\vec{u} \neq \vec{0}$, alors aucun point n'est invariant.

1.2 – Composée de deux translations

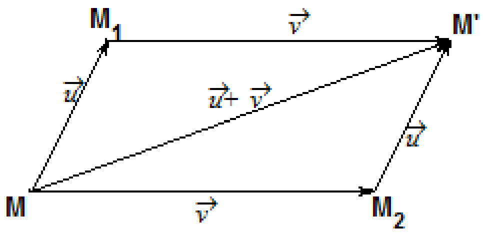
Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs.

La composée $t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{u}}$ des translations de vecteurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est la translation de vecteurs $\vec{u} + \vec{v}$.

On a : $t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{v}} = t_{\vec{u}+\vec{v}}$

<u>Demonstration</u> :

$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MM_1} + \overrightarrow{M_1M'}$
$= \vec{u} + \vec{v}$
$\Longrightarrow t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{u}} = t_{\vec{u}+\vec{v}}$
$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MM_2} + \overrightarrow{M_2M'}$
$= \vec{u} + \vec{v}$
$\Longrightarrow t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{u}} = t_{\vec{u}+\vec{v}}$



Nous avons pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$

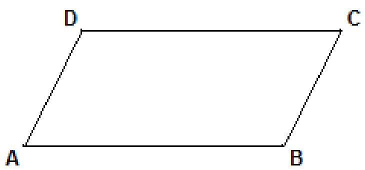
D'où : $t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{v}} = t_{\vec{v}} \circ t_{\vec{u}} = t_{\vec{u}+\vec{v}}$, on dit que la composée de la translation est commutative.

Si $\vec{u} = -\vec{v}$, alors $t_{\vec{u}} \circ t_{-\vec{u}} = t_{-\vec{u}} \circ t_{\vec{u}} = Id$.

Cette relation caracterise les bijections reciproques.

<u>Exemple</u> :

$t_{\overrightarrow{AB}} \circ t_{\overrightarrow{AD}} = t_{\overrightarrow{AC}}$
$t_{\overrightarrow{BC}} \circ t_{\overrightarrow{AB}} = t_{\overrightarrow{DC}} \circ t_{\overrightarrow{AD}}$
$\left(t_{\overrightarrow{AD}}\right)^{-1} = t_{\overrightarrow{CB}}$



1.3 – Expression analytique d'une translation

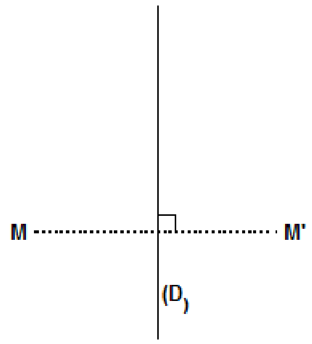
L'expression analytique de la translation de vecteur $\vec{v}(a; b)$ est : $\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$

I_2 – Symétrie orthogonale :

Toute symetrie définie par une droite est appelée symetrie orthogonale. La droite est dite axe de symetrie. S_D est la symetrie d'axe (D).

- Si $M \in (D)$, alors $M' = M$
- Si $M \notin (D)$, alors M' est le point tel que la droite (D) est la médiatrice de $[MM']$.

L'ensemble des points invariants de S_D est la droite (D).



2.1 – Composée de deux symétries orthogonales d'axes parallèles:

Propriété :

Soit (Δ) et (Δ') deux droites parallèles. $O \in (\Delta)$, et O' est le projeté orthogonal de O sur (Δ'). La composée $S_{\Delta'} \circ S_\Delta$ des symétries orthogonales d'axes (Δ) et (Δ') est la translation de vecteur $2\overrightarrow{OO'}$.

Demonstration :

Soient $S_\Delta(M) = M_1$

$S_{\Delta'}(M_1) = M'$

$H \in (\Delta)$ et H' est le projeté orthogonal de H sur Δ' ; les points H et H' sont les milieux respectifs de $[MM_1]$ et $[M_1M']$

On a : $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MM_1} + \overrightarrow{M_1M'}$

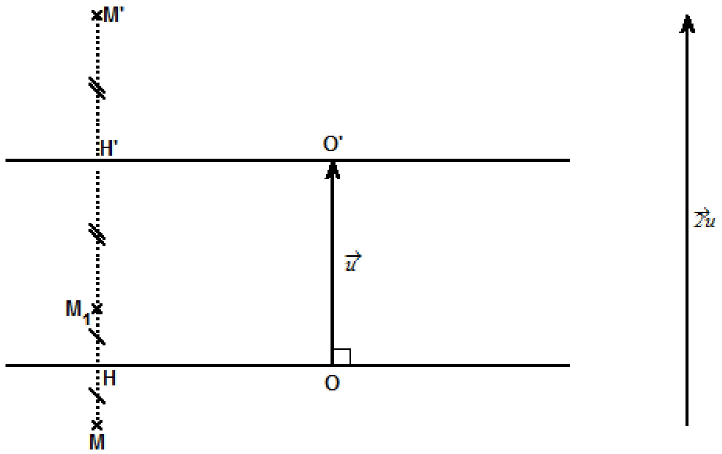
$= 2\overrightarrow{HM_1} + 2\overrightarrow{M_1H'}$ car $\overrightarrow{MM_1} = 2\overrightarrow{HM_1}$ et $\overrightarrow{M_1M'} = 2\overrightarrow{M_1H'}$

$= 2\left(\overrightarrow{HM_1} + \overrightarrow{M_1H'}\right)$

$= 2\overrightarrow{HH'}$; or $\overrightarrow{HH'} = \overrightarrow{OO'} = \vec{u}$

$\Longrightarrow \overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{OO'}$

D'où $S_{\Delta'} \circ S_\Delta = t_{2\overrightarrow{OO'}}$



Remarque :

- Si $(\Delta) = (\Delta')$, alors $S_{\Delta'} \circ S_\Delta = \mathrm{Id}$
- La reciproque de la transformation S_Δ est S_Δ.
- La reciproque de $S_{\Delta'} \circ S_\Delta$ est $S_\Delta \circ S_{\Delta'} = \mathrm{t}_{2\overrightarrow{O'O}}$

$2.2-$ Décomposition d'une translation :

Soit $t_{\vec{u}}$ une translation de vecteur non nul $\vec{u}$. Pour toute droite (Δ) de vecteur normal $\vec{u}$, il existe une droite (Δ') et une seule telle que $S_{\Delta'} \circ S_\Delta = \mathrm{t}_{\vec{u}}$.

II. Rotations :

Une rotation de centre O et d'angle θ est l'application dans lui-même noté $r(O;\ \theta)$ qui, à tout point M associe un plan M'.

- Si $M = 0$, alors $M' = 0$
- Si $M \neq 0$, alors $OM = OM'$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{OM};\ \overrightarrow{OM'}}\right) = \hat{\theta}$
- Si $\theta = \hat{0}$, alors r est l'application identique du plan ;
- Si $\theta \neq \hat{0}$, alors le seul point invariant est le centre O ;
- Si $\theta = \hat{\pi}$, alors r est symétrie de centre O ;

Toute rotation est une transformation du plan. La transformation réciproque de $r(O;\ \theta)$ est $r(O;\ -\theta)$.

$1-$ Composée de symétrie orthogonale d'axe sécants

Soit (Δ) et (Δ') deux droites sécantes en un point O, de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{u}'$. La composée $S_{\Delta'} \circ S_\Delta$ des symétries orthogonales d'axes respectifs (Δ') et (Δ) est la rotation de centre O et d'angle $2\left(\widehat{\vec{u};\ \overrightarrow{u'}}\right)$.

$S_{\Delta'} \circ S_\Delta = r\left(O;\ 2\left(\widehat{\vec{u};\ \overrightarrow{u'}}\right)\right)$

Bibliographie

- CIAM, Mathématiques Première S, Edition Edicef 1998, paru en novembre 2002
- C.Talamoni,V.Brun,P.Rousseau,JP. Beltramone, J. Labrosse, A.Truchan, O.Sidokpohou,C. Merdy, Déclic Mathématiques Première S spécifique, Editions Hachette Education 1995, Paru en Juin 2000
- Maths Première S, Collection Indice, Nouvelle Edition 2015, Editeur Bordas

Partenariat
Lycée Saint François Xavier
Label 109

Livret à ne pas vendre

Contact
info@label109.org