MATHS

1ere L

Mathématique

Première L

CHAPITRE I: EQUATIONS-INEQUATIONS-SYSTEMES 4
I. Equations 4
II. Inéquations 5
III. Equations et Inéquations associés aux fonctions homographiques 6
IV. Systèmes linéaires d'équations dans R^3 8
CHAPITRE II: FONCTIONS POLYNÔMES ET FONCTIONS RATIONNELLES 10
I. Polynôme du second degré 10
II. Factorisation du polynôme du second degré 10
III. signe du polynôme du second degré : 11
IV. Simplification d'une fraction rationnelle 13
CHAPITRE III: LES FONCTIONS NUMERIQUES D'UNE VARIABLE REELLE 14
I. Généralité 14
II. parité et éléments de symétrie 15
IV. Dérivation en x0 18
IV. Calculs de dérivées 19
V. Application de la dérivation 20
VI. Limites et continuité des fonctions numérique 21
CHAPITRE IV: DENOMBREMENT 27
I. Nombres d'éléments du produit cartésien de deux ensembles finis 27
II. P-uplets ; Arrangement et permutations 29
CHAPITRE V. LES SUITES NUMÉRIQUES 34
I. Généralité 34
II. Suite arithmétiques, suites géométriques 34
III. Détermination d'une suite arithmétique, d'une suite géométrique 36
CHAPITRE VI: STATISTIQUE 37
I. Caractéristique d'une série statistique 37
II. Série à modalités regroupés en classes 42
Bibliographie 1

CHAPITRE I: EQUATIONS-INEQUATIONS-SYSTEMES

I. Equations

1. Equations du 1er degré : $\mathbf{ax + b = 0}$ dans R

Pour résoudre une équation du 1er degré $\mathrm{ax + b = 0}$ dans **R** on procède comme suit :

- Si $a \neq 0$ $\quad \mathrm{ax + b = 0} \Rightarrow \mathrm{ax = -b} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{-b}{a}$ $\qquad$ S=$\left\{\frac{-b}{a}\right\}$
- Si a=0 et b=0 alors S= **R**
- Si a=0 et $b \neq 0$ alors $s = \emptyset$

Exemple : résolvons dans R les équations

$2x - 4 = 0 \Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow x = \frac{4}{2} \Rightarrow x = 2$ $\qquad$ S={2}

$2x + 5 = 2\left(x + \frac{5}{2}\right) \Rightarrow 2x + 5 = 2x + \frac{10}{2} \Rightarrow 2x - 2x = \frac{10}{2} - 5 \Rightarrow$ 0=0
S={R}

$3x + 8 = 3x - 7 \Rightarrow 3x - 3x = -7 - 8 \Rightarrow 0 \neq -15$ alors S={$\emptyset$}

2. Equation du second degré : $\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0}$ dans R

Une équation de la forme $ax^2 + bx + c = 0$ est dite du second degré si $a \neq 0$ (dans le cas contraire, elle est du premier degré)

Soit Δ le discriminant de cette équation : on a $\Delta = b^2 + 4ac$

- Si $\Delta = 0$ alors S=$\left\{\frac{-b}{2a}\right\}$
- Si $\Delta < 0$ alors $S = \emptyset$
- Si $\Delta > 0$ alors $S = \left\{\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}; \quad \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right\}$

Exemple : Résolvons dans R les équations suivantes :

1. $\frac{-1}{2}x^2 + 4x - 8 = 0$ On a $\Delta = b^2 - 4ac$ alors $(4)^2 - 4\left(\frac{-1}{2}\right)(-8) \Rightarrow$
   $\Delta = 16 - 16 \Rightarrow \Delta = 0$

L'équation admet une double solution

$x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{2\left(\frac{-1}{2}\right)} = \frac{-4}{-1} = 4$ $\qquad$ S={4}

2. $x^2 - x + 1 = 0$ on a : a=1 , b=-1 et c=1

$\Delta = b^2 - 4ac$ alors $(-1)^2 - 4\,(1)\,(1)$ = 1-4 $\Delta = -3 < 0$ donc l'équation n'admet pas de solution $s = \emptyset$

3. $2x^2 + x - 3 = 0$ on a : a=2, b=1 et c=-3

$\Delta = b^2 - 4ac$ alors $(1)^2 - 4\,(2)\,(-3)$ = 1+24=25 $\Delta = 25 > 0$ $\sqrt{\Delta} = 5$

L'équation admet deux solutions distinctes :

$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1-5}{2(2)} = \frac{-6}{4} = \frac{-3}{2}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1+5}{2(2)} = \frac{4}{4}$ =1 alors S=$\left\{\frac{-3}{2} ; 1\right\}$

II. Inéquations

1. Exemple de résolution d'inéquation

Soit le polygone du second degré p(x)= $ax^2 + bx + c$. Toute inéquation de l'un des types suivants est appelé inéquation du second degré.

$p(x) > 0$; $p(x) \geq 0$; $p(x) < 0$; $p(x) \leq 0$

Résoudre dans R l'inéquation : $x^2 - x + 3 \leq 0$

Posons $p(x) = x^2 - x + 3 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac$ alors $(-1)^2 - 4\,(1)\,(3)$ = 1- 12 $\Delta = -11 < 0$

Δ est négatif, le signe de a et le sens de l'inégalité ne se correspondent pas donc $S = \emptyset$

Résolvons dans R l'inéquation : $9x^2 - 6\sqrt{2}\,x + 2 > 0$

Posons $p(x) = 9x^2 - 6\sqrt{2}\,x + 2$

$\Delta = b^2 - 4ac$ $= \left(-6\sqrt{2}\right)^2 - 4 \times 9 \times 2$ = 72-72 $\Delta = 0$

$x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{6\sqrt{2}}{2 \times 9} = \frac{6\sqrt{2}}{18} = \frac{\sqrt{2}}{3}$ alors $p(x) = 9\left(x - \frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2$

Tableau de signe

x	$-\infty$		$\frac{\sqrt{2}}{3}$		$+\infty$
9		$+$		$+$	
$\left(x-\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2$		$+$	0	$+$	
$P(x)$		$+$		$+$	

$9x^2 - 6\sqrt{2}\,x + 2 \ > 0$ donc $S = \left]-\infty; \frac{\sqrt{2}}{3}\right[\ \cup \left]\frac{\sqrt{2}}{3}\ ; +\infty\right[$

Résolvons dans R l'inéquation : $-2x^2 + x + 3 \ < 0$

Posons $p(x) = \ -2x^2 + x + 3$

$\Delta = b^2 - 4ac \quad = (1)^2 - 4\,(-2)\,(3) \quad = 1+24 \quad \sqrt{\Delta} = 5$

Donc $p(x)$ a deux racines :

$x_1 \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1-5}{2(-2)} = \frac{-6}{-4} = \frac{3}{2}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1+5}{2(-2)} = \frac{4}{-4} = -1$

$p(x) = -2(x+1)(x - \frac{3}{2})$

Tableau de signe

X	$-\infty$		-1		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$X-2$		$-$		$-$		$-$	
$X+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$X-\frac{3}{2}$		$-$		$-$	0	$+$	
$P(x)$		$-$		$+$		$-$	

$S =]-\infty;\ -1[u\ \left]\frac{3}{2}\ ; +\infty\right[$

III. Equations et Inéquations associés aux fonctions homographiques

Exemple : Résolvons dans R l'équation (E) : $\frac{x+2}{3x+2} = \frac{x-3}{x-4}$

Contrainte sur l'inconnue

$3x + 2 \neq 0$ et $x - 4 \neq 0$ alors $x \neq \frac{-2}{3}$ et $x \neq 4$

$x \in R - \left\{\frac{-2}{3}; 4\right\}$

On a : $\frac{x+2}{3x+2} = \frac{x-3}{x-4} \Rightarrow (x+2)(x-4) = (3x+2)(x-3)$

Alors $x^2 - 2x - 8 = 3x^2 - 7x - 6 \rightarrow \quad x^2 - 2x - 8 - 3x^2 + 7x + 6 = 0$

$\Rightarrow \quad -2x^2 + 5x - 2 = 0$ alors $\Delta = (5)^2 - 4(-2)(-2) = 25 - 16$

$\Delta = 9$ alors $\sqrt{\Delta} = 3$

$x_1 = \frac{-5-3}{2(-2)} = \frac{-8}{-4} = 2$; $x_2 = \frac{-5+3}{2(-2)} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}$ $\quad S = \left\{\frac{1}{2}; 2\right\}$

Exemple 2 : Résolvons dans R l'inéquation : $\frac{x+2}{3x+2} < \frac{x-3}{x-4}$

Contraintes : $x \in R - \left\{\frac{-2}{3}; 4\right\}$

$\frac{x+2}{3x+2} < \frac{x-3}{x-4}$ alors $\frac{x+2}{3x+2} - \frac{x-3}{x-4} < 0$ alors $\frac{(x+2)(x-4)-(x-3)(x-3)}{(3x+2)(x-4)} < 0$ alors
$\frac{-2x^2+5x-2}{(3x+2)(x-4)} < 0$

$\frac{-2\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-2)}{(3x+2)(x-4)} < 0$

<u>Tableau de signe</u>

x	$-\infty$	$\frac{-2}{3}$		$\frac{1}{2}$		2		4	$+\infty$
-2	-	||	-		-		-	||	-
3x+2	-	||	+		+		+	||	+
X- $\frac{1}{2}$	-	||	-		+		+	||	+
X-2	-	||	-		-		+	||	+
X-4	-	||	-		-		-	||	+
$\frac{-2\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-2)}{(3x+2)(x-4)}$	-	||	+		-		+	||	-

$S = \left]-\infty; \frac{-2}{3}\right[\cup \left]\frac{1}{2}; 2\right[\cup]4; +\infty[$

IV. Systèmes linéaires d'équations dans R³

On considère le système (Σ) : $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$

Ou x et y sont des inconnues

(Σ) est appelé système de trois équations du premier degré (ou système linéaire) à trois inconnues.

Résoudre ce système, c'est déterminer tous les triplets (x, y, z) de nombre réels qui vérifient les trois équations.

Nous avons trois méthodes de résolution d'un tel système :

- Méthode par substitution
- Méthode par combinaison
- Méthode par pivot de gauss

Exemple : Résolution par pivot de gauss

Résolvons dans R³ le système : $\begin{cases} x - 5y - 7z = 3 & (1) \\ 5x + 3y + z = 3 & (2) \\ x - 5y - 7z = 1 & (3) \end{cases}$

Eliminons x dans (2) et (3) par la combinaison avec 1

$-5x \begin{cases} x - 5y - 7z = 3 & (1) \\ 5x + 3y + z = 3 & (2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -5x+15y+35z=-15 & (1) \\ 5x+3y+z=3 & (2) \\ \hline 28y+36z=-12 & \end{cases}$

$\Rightarrow 28y + 36z = -12 \quad (2')$

$-3x \begin{cases} x - 5y - 7z = 3 & (1) \\ 3x + y - 2z = -1 & (2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3x+15y+21z=-9 \\ 3x+y-2z=-1 \\ \hline 16y+19z=-10 \end{cases}$

$\Rightarrow 16y + 19z = -10 \qquad (3')$

On obtient un nouveau système

$\begin{cases} 28y + 36z = -12 & (2') \\ 16y + 19z = -10 & (3') \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7y + 9z = -3 \\ 16y + 19z = -10 \end{cases}$

$$\begin{array}{r} -16 \\ 7 \end{array}\begin{cases} 7y + 9z = -3 \\ 16y + 19z = -10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -112y - 144z = 48 \\ 112y + 133z = -70 \end{cases} \Rightarrow -11z = -22$$

$$\Rightarrow \quad z = \frac{22}{11} = 2$$

Le système devient un système triangulaire

$$\begin{cases} x - 5y - 7z \quad = 3 & (1) \\ \quad 28y + 36z \ \ = -12 & (2') \\ \qquad\qquad\qquad z = 2 & \end{cases}$$

On résout ce système en remontant de la dernière équation vers le haut : $z = 2$

$28y + 36 \times 2 \ = -12$ alors $y \ = \frac{-12-72}{28} = 3$ donc $y = -3$

$x - 5(-3) - 7(2) \ = 3$ alors $x + 15 - 14 \ = 3 \Rightarrow \quad x + 1 = 3 \quad \Rightarrow \quad x = 3 - 1 = 2$

$S = \{2;\ -3; 2\}$

Remarque : nous admettons qu'un système linéaire de trois équations à trois inconnues a :

- Ou bien aucune solution
- Ou bien une solution
- Ou bien une infinité de solution

CHAPITRE II: FONCTIONS POLYNÔMES ET FONCTIONS RATIONNELLES

I. Polynôme du second degré

a. Définition : x est une variable réelle. Un polynôme de forme réduite $P(x) = ax^2 + \mathrm{bx} + c$ avec $a \neq 0$ est appelé polynôme du second degré.

Exemple : $P(x) = 3y^2 - 10$ alors a=3, b=0 et c=-10

$f(x) = x^2 - 4x + 7$ alors a=1 ; b=-4 et c=7

$R(x) = -x^2 + 5x$ alors a=-1 ; b=5 et c=0

b. Forme canonique d'un polynôme du second degré

Méthode : pour écrire un polynôme $P(x) = ax^2 + \mathrm{bx} + c$ sous la forme canonique, on peut également utiliser la forme suivante. $P(x) = ax^2 + \mathrm{bx} + c$

Alors on aura : $P(x) = a\left[\left(x + \frac{\mathrm{b}}{2\mathrm{a}}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$ ou $\Delta = b^2 - 4ac$

Le nombre Δ est appelé discriminant de $P(x)$.

Exemple : Ecrivons le polynôme suivant sous la forme canonique :
$P(x) = -2x^2 + 5x + 3$

$a = -2; b = 5;\ c = 3$ on sait que : $P(x) = a\left[\left(x + \frac{\mathrm{b}}{2\mathrm{a}}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$

$\Delta = b^2 - 4ac = (5^2) - 4(-2)(3) = 25 + 24 = 49$

$P(x) = -2\left[\left(x + \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{49}{16}\right]$ est la forme canonique de $P(x)$

II. Factorisation du polynôme du second degré

a. Utilisation de la forme canonique pour factoriser

Reprenons l'exemple précédent : $P(x) = -2x^2 + 5x + 3$

La forme canonique de $P(x)$ est :

$-2\left[\left(x + \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{49}{16}\right]$ donc $-2\left[\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 - \left(\frac{7}{4}\right)^2\right]$

Alors $-2\left(x - \frac{5}{4} - \frac{7}{4}\right)\left(x - \frac{5}{4} + \frac{7}{4}\right) \Rightarrow -2\left(x - \frac{12}{4}\right)\left(x + \frac{2}{4}\right)$

$P(x) = -2(x - 3)\left(x + \frac{1}{2}\right)$ est la forme factorisée de $P(x)$

b. Utilisation des racines pour factoriser un polynôme

Soit le polynôme $P(x) = ax^2 + \text{bx} + c$ avec $a \neq 0$

$\Delta = b^2 - 4ac$

- si $\Delta < 0$, on ne peut pas factoriser $P(x)$
- si $\Delta = 0$, on a $x_0 = \frac{-\text{b}}{2\text{a}}$ et la factorisation de $P(x)$ s'écrit : $a(x - x_0)^2$
- si $\Delta > 0$, on a deux racines qui sont : $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

La factorisation de $P(x)$ s'écrit : $P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$

Exemple : factorisons : a) $P(x) = x^2 - x + 1$, b) $P(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 4x - 8$, c) $P(x) = 2x^2 + x$

III. signe du polynôme du second degré :

$P(x) = ax^2 + \text{bx} + c$

Le discriminant de $P(x)$ est le nombre réel : $\Delta = b^2 - 4ac$

On a : $P(x) = a\left[\left(x + \frac{\text{b}}{2\text{a}}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$

L'expression de la forme canonique montre que l'étude du signe de $P(x)$ dépend du signe de son discriminant.

Etudions quelques cas

a. cas ou le discriminant est négatif

$P(x) = -x^2 + 3\text{x} - 5$

$\Delta = (3)^2 - 4(-1)(-5)$ = 9-20= -11 < 0

$\Delta < 0$, donc la factorisation est impossible d'où $P(x)$ est du signe de a et $a = -1$

Alors $\forall x \in R \quad P(x) < 0$

b. Cas ou le discriminant est nul

$Q(x) = 4x^2 - 20x + 25$

$\Delta = (-20)^2 - 4(4)(25)$ = 400-400=0

$\Delta = 0$, $x_1 = \frac{-\text{b}}{2\text{a}} = \frac{20}{2\times4} = \frac{20}{8} = \frac{5}{2}$

$p(x) = a(x - x_0)^{\,2}$ alors $p(x) = 4\left(x - \frac{5}{2}\right)^{\,2}$ or $\left(x - \frac{5}{2}\right)^{\,2} > 0$ donc $p(x)$ dépend du signe de 4 et $4 > 0$ donc $p(x) > 0$ pour $x \in \left]-\infty, \frac{5}{2}\right[\cup \left]\frac{5}{2}, +\infty\right[$

c. Cas ou le discriminant est positif

$S(x) = 2x^2 + 5x - 3$

$\Delta = (5)^{\,2} - 4(2)(-3) = 25+24 = 49 > 0$

Donc $\Delta > 0$ on a deux racines

$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5-7}{2\times2} = \frac{-12}{4} = \frac{-3}{1} = -3$

$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5+7}{2\times2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

$p(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ alors $p(x) = 2(x+3)(x - \frac{1}{2})$

$a = 2 > 0$ donc $p(x)$ est positif à l'extérieur des racines et négatif à l'intérieur des racines d'où

$\forall\, x \in]-\infty, 3[u \left]\frac{1}{2}, +\infty\right[\; p(x) > 0$

$\forall\, x \in \left]3 \; ; \frac{1}{2}\right[\; p(x) < 0$

D'une manière générale, on peut étudier le signe d'un polynôme du second degré à l'aide de la méthode suivante

Méthode : soit le polynôme du second degré $P(x) = ax^2 + \mathrm{b}x + c$

Pour étudier le signe de $P(x)$, on peut calculer son discriminant Δ et utiliser l'un des tableaux ci-dessous :

a) $\Delta < 0$

P(X) n'a pas racine

x	$-\infty$	$+\infty$
P(x)	Signe de de a	

b) $\Delta = 0$

P(x) a une racine $-\frac{\mathrm{b}}{2\mathrm{a}}$

x	$-\infty$		$\frac{-b}{2a}$		$+\infty$
P(x)		signe de a	0	signe de a	

c) $\Delta > 0$

P(x) a deux racines x_1 et x_2

X	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
P(x)		signe de a	0	signe de -a	0	signe de a	

<u>Exercice d'application</u>

Déterminer suivant les valeurs de x, le signe des polynômes ci-dessous.

$Q(x) = -9x^2 + 6x - 1$ et $S(x) = x^2 + x + 2$

IV. Simplification d'une fraction rationnelle

Exemple : simplifions les fractions rationnelles suivantes :

a) $f(x) = \frac{x+2}{x^2-4}$; b) $g(x) = \frac{x^2-x-2}{x-2}$; $Q(x) = \frac{x^2-3x+2}{x^2-7x+2}$

$f(x) = \frac{x+2}{x^2-4} = \frac{x+2}{x^2-2^2} = \frac{(x+2)}{(x-2)(x+2)}$

$f(x)$ Existe si et seulement si $(x-2)(x+2) \neq 0$; $x - 2 \neq 0$ et $x + 2 \neq 0$

Alors $x \neq 2$ et $x \neq -2$

$Df = R\{-2; 2\}$

$f(x) = \frac{(x+2)}{(x-2)(x+2)} = \frac{1}{x-2}$

Pour $x \neq -2$ et $x \neq 2$ $f(x) = \frac{1}{x-2}$

Méthode : pour simplifier une fraction rationnelle :

- On factorise son numérateur et son dénominateur ;
- On détermine une condition d'existence d'une valeur numérique ;
- On simplifie la fraction rationnelle par chacun des facteurs communs se trouvant au numérateur et au dénominateur ;
- On écrit la fraction simplifiée précédé des conditions d'existences.

CHAPITRE III: LES FONCTIONS NUMERIQUES D'UNE VARIABLE REELLE

I. Généralité

1. Rappel

On appelle fonction numérique d'une variable réelle, toute fonction dont l'ensemble de départ et l'ensemble d'arrivé est R.

On note : $\begin{array}{l} f: R \to R \\ \quad x \to f(x) \end{array}$

Le réel x s'appelle variable et $f(x)$ est l'image de x par f.

Exemple : $\begin{array}{l} f: R \to R \\ \quad x \to 3x+2 \end{array}$; $\begin{array}{l} g: R \to R \\ \quad x \to \sqrt{x}+2 \end{array}$; $\begin{array}{l} h: R \to R \\ \quad x \to \frac{2x}{x^2-1} \end{array}$

2. Ensemble de définition de f.

Soit f une fonction numérique, on appelle ensemble de définition de la fonction f, l'ensemble des réels qui ont une image par f.

L'ensemble de définition d'une fonction numérique s'appelle Domaine de Définition ou bien Domaine d'Existence.

Exemple : Déterminons le domaine de définitions des fonctions suivantes :

a) $f(x) = 3x^2 + 4x + 1$; b) $g(x) = \sqrt{x-3}$ c) $h(x)\frac{3x+1}{x-2}$

d) $f(x) = 3x^2 + 4x + 1$

a) $f(x)$ est une fonction polynôme, toute fonction polynôme a pour domaine de définition R donc $Df = R$

b) $g(x) = \sqrt{x-3}$

$g(x)$ existe si et seulement si $x - 3 \geq 0$ alors $x \geq 3$ $x \in [3; +\infty[$

Donc $Df = [3; +\infty[$

c) $h(x)\frac{3x+1}{x-2}$

$h(x)$ existe si et seulement si $x - 2 \neq 0$; $x \neq 2$

$Df = R\{2\}$ ou $Df =]-\infty, 2[u]2, +\infty[$

II. parité et éléments de symétrie

1. Fonction paires, fonction impaire

a. Fonction paires

Définition : le repère (o, i, j) est orthogonal,

Soit f une fonction d'ensemble de définition

Df : on dit que f est la fonction paire si Df est symétrique par rapport à zéro et pour tout x, élément de Df on a : $f(-x) = f(x)$

Exemple : $f(x) = x^2 - 1$

$Df = R$ ou $Df =]-\infty, +\infty[$ d'où la symétrie par rapport à 0

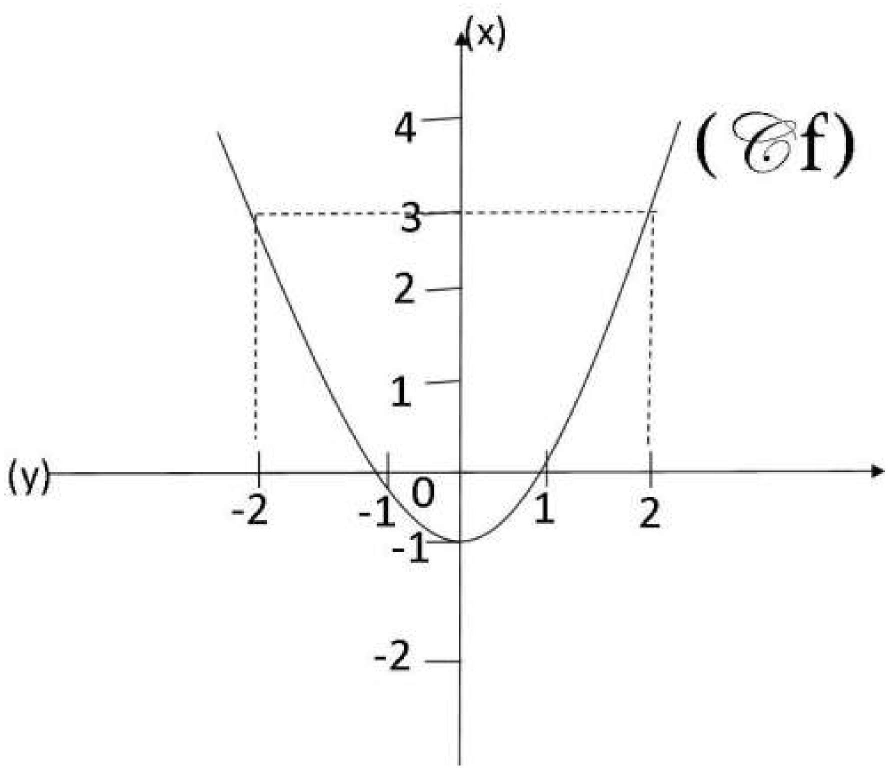
$\forall\, x \in Df$ on a : $f(-x) = (-x)^2 - 1 = x^2 - 1$ alors $f(-x) = f(x)$ d'où f est une fonction paire

<u>Représentation graphique de f</u>

Tableau de signe

x	-2	-1	0	1	2
y	3	0	-1	0	3

Posons $y = f(x) = x^2 - 1$



F est paire signifie que $\begin{cases} pour\ tout\ x\ de\ Df\ et -x\ \in Df \\ f(-x) = f(x) \end{cases}$

Le repère étant orthogonal, une fonction est paire si et seulement si l'axe des ordonnées est un axe de symétrie de sa courbe représentative.

Remarque : lorsqu'une fonction f, d'ensemble de définition Df, est paire, il suffit de l'étudier sur l'ensemble $Df \cap$ R+. La courbe obtenue est ensuite complétée par la symétrie par rapport à l'axe des ordonnées

b. Fonction impaires

Définition : soit f une fonction d'ensemble de définition Df

On dit que la fonction f est impaire si Df est symétrique par rapport à zéro et pour tout x élément de Df on a : $f(-x) = -f(x)$

Exemple : $f(x) = x^3$ Df=R

$\forall\ x \in Df \quad f(-x) = (-x)^3 \ = -x^3$

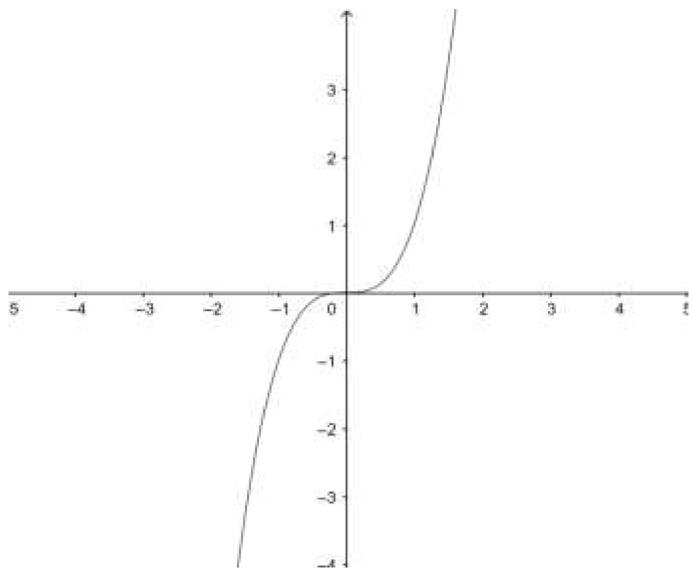
$f(-x) = -f(x)$ d'où f est une fonction impaire.

Représentation graphique

Tableau de valeur

x	-2	-1	0	1	2
y	-8	-1	0	1	8

Posons $f(x) = y = x^3$



F est impaire signifie que : $\begin{cases} pour\ tout\ x\ de\ Df\ et -x\ \in Df \\ f(-x) = -f(x) \end{cases}$

Une fonction est impair si et seulement si l'origine du repère est un cercle de symétrie de sa courbe représentative.

Remarque : lorsqu'une fonction f, d'ensemble de définition Df est impaire, il suffit de l'étudier sur l'ensemble $Df \cap$ R^+. La courbe obtenue est ensuite complétée par la symétrie par rapport à l'origine.

Vocabulaire : Etudier la parité d'une fonction, c'est préciser si cette fonction est paire ou impaire.

Exercice d'application

a) $f(x) = -x^2 + 4$; b) $f(x) = \frac{|x|}{x}$; c) $f(x) = \sqrt{x}$; d) $f(x) = -x^2 - 2x$

A. Limite et continuité en x_0

Propriété : soit f une fonction définie en x_0. Si f admet une limite finie en x_0

Alors : $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(x_0)$

Si $f(x_0) \in R$ alors on dit que f est continue en x_0

Remarque : lorsqu'une fonction admet une limite en x_0, cette limite est unique.

Exemple : $\lim\limits_{x \to 1}(-x^2 + 4x - 1) = -(1)^3 + 4(1) - 1$ = -1+4-1=2

$\lim\limits_{x \to 0}(\frac{3x+1}{x-4}) = \frac{3x+1}{x-4} = \frac{3(0)+1}{0-4} = \frac{1}{-4} = \frac{-1}{4}$

Exercice d'application

Dans chacun des cas suivants, calculer la limite de la fonction en x_0

a) $f(x) = -4x^2 + x$; $x_0=-1$ b) $f(x) = \frac{3x}{x+1}$; $x_0=1$ c) $f(x) = x^2 - 3$; $x_0=2$

d) $f(x) = \frac{2x-5}{4x+1}$ $x_0=0$

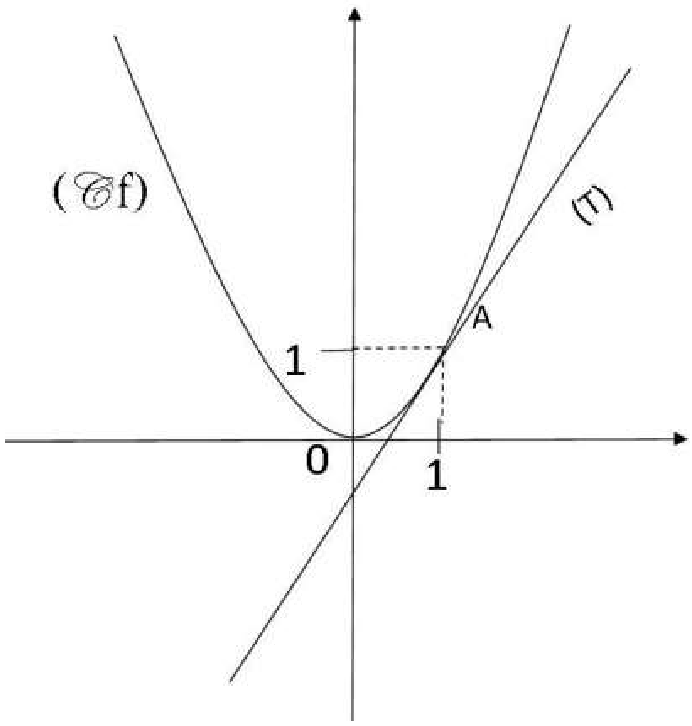
IV. Dérivation en x0

1. Tangente à une courbe

La tangente en A à une courbe (c)est la droite qui « approche le mieux » la courbe pour les points proches de A

Exemple : soit la courbe (c) de la fonction $f\colon \to x^2$

Traçons la droite (T) tangente à (f) en $A\binom{1}{1}$.



a) Nombre dérivé

Définition : soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert k et x_0 un élément de k.

- On dit que f est dérivable en x_0, lorsque la représentation graphique de f admet en un point d'abscisse x_0, une tangent non parallèle à l'axe des ordonnées.
- On appelle nombre dérivé de f en x_0, le coefficient directeur de cette tangente.
  On note : $f'(x_0)$: on lit f prime de x_0
  Méthode : pour déterminer le nombre dérivé d'une fonction f dérivable en x_0 , on peut calculer : $\lim\limits_{x \to x_0} \left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right) = f'(x_0)$

b) Equation de la tangente

Propriété : soit f une fonction (f) d'abscisse x_0. Lorsque f est dérivable en x_0, une équation de la tangente en A à la courbe (c) est : $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

IV. Calculs de dérivées

1. Dérivée de fonctions élémentaires

- Fonction dérivée

Définition :

- On dit que f est une fonction dérivable sur l'intervalle ouvert de k lorsque f est dérivable en tout élément de k

La fonction $f': x \to f'(x)$ est alors appelée dérivée (ou fonction dérivé de f)

- Dérivée de fonctions élémentaires

Le tableau ci-dessous donne les formules de dérivation des fonctions élémentaires que nous admettons ;

$f(x)$	$f'(x)$	Ensemble de dérivabilité
K $(k \in R)$	0	IR
x	1	IR
$x^n(X^{n \in N} \geq 2)$	nx^{x-1}	IR
$\frac{1}{x}$	$\frac{-1}{x^2}$	IR*
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	IR_+^*

Exemple : $f(x) = x^2$ alors $f'(x) = 2x$; $f(x) = x^3$ alors $f'(x) = 3x^2$

- Dérivées et opérations sur les fonctions

Le tableau ci-dessous récapitule : U et V sont deux fonctions

Fonction	U+V	KU $(k \in R)$	UV	$\frac{1}{U}$	$\frac{U}{V}$
Dérivée	$U' + V'$	KU'	$U'V + V'U$	$\frac{-U'}{U^2}$	$\frac{U'V - V'U}{V^2}$

Exemple :

Déterminons la dérivée des fonctions suivantes

a) $h(x) = x^2 + x$ b) $f(x) = -3x^2$
c. $g(x) = x\sqrt{x}$ d) $R(x) = \frac{1}{3x-4}$ e) $Q(x) = \frac{2x+1}{x+3}$

Solution

a) $h(x) = x^2 + x$ alors $h'(x) = x^{2-1} + 1x^{1-1}$ alors $h'(x) = 2x + 1$
b) $f(x) = -3x^2$ alors $f'(x) = -3 \times 2x^{2-1}$ alors $h'(x) = -6x$
c) $g(x) = x\sqrt{x}$ =U × V avec U= x et V=$\sqrt{x}$ alors $U' = 1$ et $V' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$g'(x) = (U \times V)' = U'V + V'U$ alors $1 \times \sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}} \times x = \sqrt{x} + \frac{x}{2\sqrt{x}} = \frac{2x+x}{2\sqrt{x}}$

$\frac{3x}{2\sqrt{x}} = \frac{3x \times \sqrt{x}}{2x} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$ alors $g'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x}$

d) $R(x) = \frac{1}{3x-4} = \frac{1}{U}$ avec $U = 3x + 4$ et $U' = 3$

$R'(x) = \frac{-U'}{U^2} = \frac{-3}{(3x-4)^2}$ alors $R'(x) = \frac{-3}{(3x-4)^2}$

e) $Q(x) = \frac{2x+1}{x+3} =$
$\frac{U}{V}$ $avec\ U = 2x - 1$ et $V = x + 3$ alors $U' = 2$ et $V' = 1$

$Q'(x) = \left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U'V - V'U}{V^2} = \frac{2(x+3) - 1(2x-1)}{(x+3)^2} = \frac{2x+6-2x+1}{(x+3)^2}$ alors $Q'(x) = \frac{7}{(x+3)^2}$

V. Application de la dérivation

1. Dérivée et sens de Variation

Propriété : soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I

- Si f' est positive sur I, alors f est croissante sur I
- Si f' est négative sur I, alors f est décroissante sur i
- Si f' est nulle sur I, alors f est constante sur I

Exercice d'application :

Soit F la fonction définie par $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$

Etudier la variation de f.

VI. Limites et continuité des fonctions numérique

1. Approche intuitive de la nation de limite
a. Limite en l'infini des fonctions élémentaires

Nous admettons les résultats suivants :

$a)\ \lim_{x\to+\infty} k = k$; $\lim_{x\to-\infty} k = k$ b) $\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$; $\lim_{x\to-\infty} x = -\infty$

c). $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$; d) $\lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$; $\lim_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$

si $n \in N$ et n est pair ; $\lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty$; $\lim_{x\to-\infty} x^n = +\infty$

e). $\lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$; $\lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$

si $n \in N^*$ et n est impair

$\lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty$; $\lim_{x\to-\infty} x^n = -\infty$

f) $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$; $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$

Si $n \in N^*$ $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^n} = 0$; $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^n} = 0$

b. Limite à gauche, limite à droite

Exemple : soit la fonction f définie par : $f(x) = \frac{1}{x+1}$

$f(x)$ existe si et seulement si $x + 1 \neq 0$ alors $x \neq -1$

$Df =]-\infty;\ -1[u\ ]-1\ ;\ +\infty[$

- Soit f_1 la restriction de f à $]-\infty;\ -1[$

$\lim_{x\to-1} f_1(x) = \lim_{x\to-1} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{-1+1} = \frac{1}{0^-} = -\infty$

On dit que la limite de $f(x)$ quand x tend vers -1 par valeur négative est égale à $-\infty$

On écrit : $\lim_{x\to-1^-} f(x) = -\infty$

- Soit f_2 la restriction de f à $]-1\ ;\ +\infty[$

$\lim_{x\to-1} f_2(x) = \lim_{x\to-1} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{-1+1} = \frac{1}{0^+} = +\infty$

On dit que la limite de $f(x)$ quand x tend vers -1 par valeur positive est égale à $+\infty$

On écrit : $\lim_{x \to -1^+} f(x) = +\infty$

Les limites à gauche et à droite de f en -1 étant distinctes, la fonction f n'a pas de limite en -1

c. Limites de fonctions élémentaires en 0

a) $\lim_{x \to x_0} k = k$; $\lim_{x \to x_0} x = x_0$; $\lim_{x \to 0} \sqrt{x} = 0$

b) Si $n \in N^*$ $\lim_{x \to x_0} x^n = 0$; si $n \in N^*$ et n est pair alors

$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x^n} = +\infty$; $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^n} = +\infty$

Si n est impair et $n \in N^*$

$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x^n} = \frac{1}{0^-} = -\infty$; $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^n} = \frac{1}{0^+} = +\infty$

2. Calculs de limites

a. Limites et Opérations sur les fonctions

Les propriétés présentées sous forme de tableaux dans ce paragraphe sont admises. Elles donnent les limites en x_0 des fonctions $f + g$; $f \times g$ et $\frac{f}{g}$

Dans certains cas, on ne peut conclure directement. Ces cas sont signalés par le symbole ?

- Limite de la somme de deux fonctions $((l\ et\ l') \in R)$

$\lim_{x \to x0} fx)$	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim_{x \to x0} g(x)$	l'	l'	l'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_{x \to x0} (f + g)x$	$l + l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	?

- Limite du produit de deux fonctions

$\lim\limits_{x\to x0} f(x)$	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty ou -\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x\to x0} g(x)$	l'	$l'(l' \neq 0)$	$l'(l' \neq 0)$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to x0} (f \times g)x$	$l \times l'$	• $+\infty\ si\ l' > 0$ • $-\infty\ si\ l' < 0$	• $-\infty\ si\ l' > 0$ • $+\infty\ si\ l' < 0$	?	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$

- Limite du quotient de deux fonctions

$\lim\limits_{x\to x0} \lvert f(x)\rvert$	l	$l'(l' \neq 0)$	0	l	$+\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x\to x0} \lvert g(x)\rvert$	$l'(l' \neq 0)$	0	0	$+\infty$	l'	$+\infty$
$\lim\limits_{x\to x0} \left(\frac{f}{g}\right)(x)$	$\frac{l}{l'}$	$+\infty$	?	0	$+\infty$	?

Une étude de signe permet ensuite de déterminer la limite de la fonction $\frac{f}{g}$

b. Propriétés

- La limite en l'infini d'un polynôme est égale à la limite en l'infini de son monôme le plus haut degré
- La limite en l'infini d'une fraction rationnelle est égale à la limite en l'infini du quotient des monômes de plus haut degré du numérateur et du dénominateur.

Exemple :

1. Calculons les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ de la fonction polynôme $f(x) = 5x^3 - x + 1$

On a:

$$f(x) = \lim_{x\to+\infty} 5x^3 = 5(+\infty)^3 = +\infty \quad ; \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} 5x^3 = 5(-\infty)^3 = -\infty$$

2. Calculons les limites en $+\infty$ et $-\infty$ de la fonction rationnelle : $g(x) = \frac{7x^5-4x^3-1}{x^2-x+6}$

On a: $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{7x^5}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} 7x^3 = 7(+\infty)^3 = +\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{7x^5}{x^2} = \lim_{x\to-\infty} 7x^3 = 7(-\infty)^3 = -\infty$$

Méthode : pour étudier une fonction f, en l'absence de consignes particulière, on peut adopter le plan suivant:

1. Déterminer l'ensemble de définition de f
2. Déterminer la dérivée de f
3. Calculer les limites aux bornes de Df
4. Donner le sens de variation de f
5. Dresser le tableau de variation de f
6. Donner une table de valeur de f
7. Construire la représentation graphique de f

Exemple : soit f la fonction définie par $f(x) = x^2 + x - 2$

Etudions les variations de f et construisons sa représentation graphique Cf

1. Déterminons l'ensemble de définition de f

$Df = R =]-\infty;\ +\infty[$ Car f est une fonction polynôme

2. Déterminons la dérivée
   $f(x) = x^2 + x - 2$ alors $f'(x) = 2x + 1$
3. Calculons les limites aux bornes du Df

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = (-\infty)^2 = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = (+\infty)^2 = +\infty$

4. Donnons le sens de variation de f

$f'(x) = 0$ alors $2x + 1 = 0$; $2x = -1$ $alors\ x = \frac{-1}{2}$

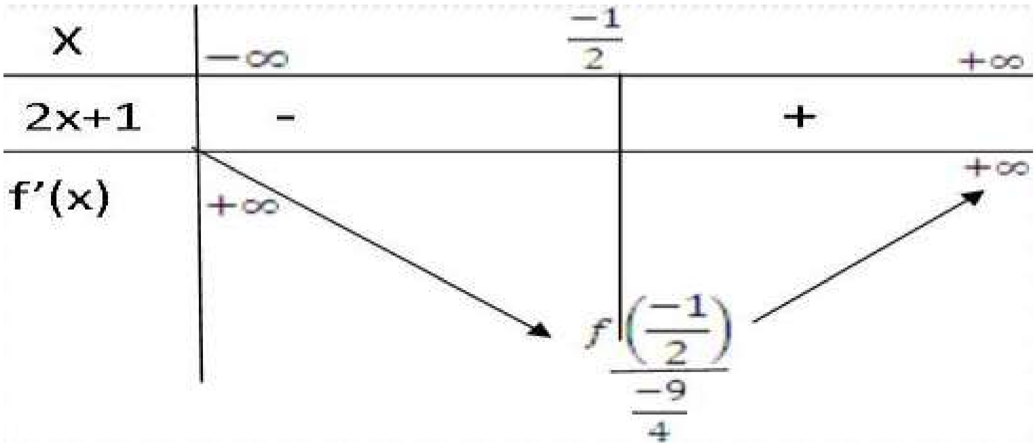
Tableau de signe

X	$-\infty$		$\frac{-1}{2}$		$+\infty$
2x+1		-	0	+	
f'(x)		-		+	

$\forall x \in \left]-\infty; \frac{-1}{2}\right[$ $f'(x) < 0$ donc f est décroissante sur $\left]-\infty; \frac{-1}{2}\right[$

$\forall x \in \left]\frac{-1}{2};\ +\infty\right[$ $f'(x) > 0$ donc f est croissante sur $\left]\frac{-1}{2}\ ; +\infty\right[$

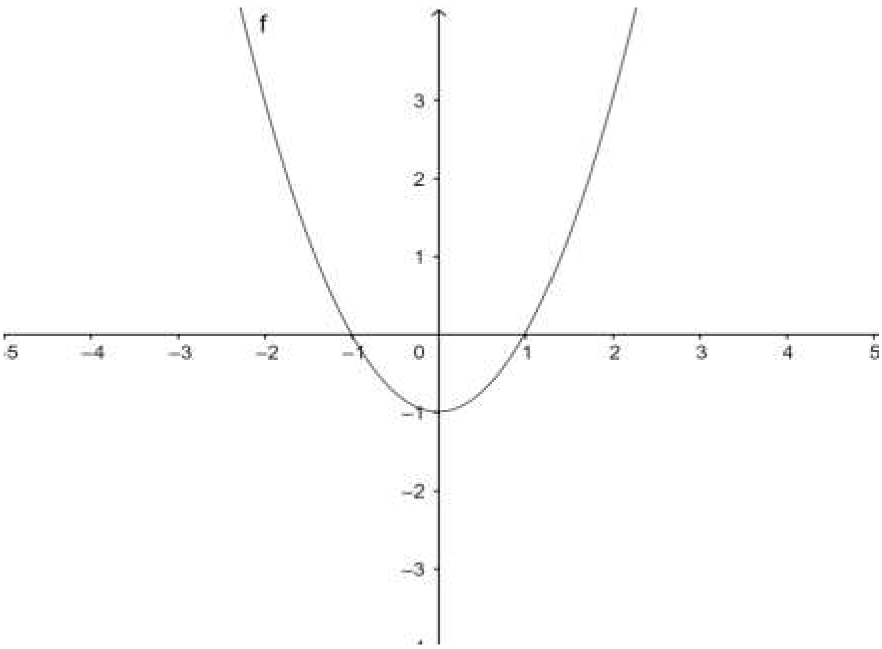
5. Dressons le tableau de variation de f



$f\left(\frac{-1}{2}\right) = \left(\frac{-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{-1}{2}\right) - 2 \quad = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 2 = \frac{2-4}{8} - 2 = \frac{-1}{4} - 2 = \frac{-9}{4}$

6. Table de valeur

x	-3	-2	-1	$\frac{-1}{2}$	0	1	2
$f(x)$	4	0	-2	$\frac{-9}{4}$	-2	0	4



Exercice d'application

Problème

Soit $g(x) = \frac{x^2}{x+1}$ on désigne par Cg sa courbe

1. a. déterminer l'ensemble de définition de g
   b. calculer les limites aux bornes du Dg
2. a. déterminer la fonction dérivée de g' de g.
   En déduire le sens de variation de g
c. dresser le tableau de variation de g
3. déterminer les nombres réels a, b et c tels que
   Pour tout x d$\{-1\}$, $g(x) = ax + b + \frac{c}{x+1}$

En déduire que Cg admet une asymptote oblique

4. construire la courbe (D) puis la courbe Cg.

CHAPITRE IV: DENOMBREMENT

I. Nombres d'éléments du produit cartésien de deux ensembles finis

1. Compléments sur les ensembles

1.1. Réunion et intersection de deux ensembles

a. Définitions : soit A et B deux parties d'un ensemble E.

- On appelle intersection de A et B, l'ensemble des éléments de E appartenant à A et à B.
  On note $A \cap B$: on lit « A inter B »
  $x \in A \cap B$ Signifie que $x \in A$ et $x \in B$
- On appelle réunion de A et B, l'ensemble des éléments de E appartenant à A et à B
  On note: $A \cup B$ on lit «A union B»
  $x \in A \cup B$ Signifie que $x \in A$ ou $x \in B$

Remarque : lorsque l'intersection de A et B est vide, on dit que A et B sont disjoints.

b. Cardinal de la réunion de deux ensembles

Le cardinal d'un ensemble fini E est le nombre d'éléments de cet ensemble

On le note « card(E) »

Soit a et b deux parties d'un ensemble fini E.

On a: Card ($A \cup B$) = Card (A) + Card (B) –Card ($A \cap B$)

Exercice d'application:

Dans une classe, tous les élèves pratiquent au moins l'un des sports proposés : le football ou le Basket. 24 élèves pratiquent le basket, 26 élèves pratiquent le football et 10 élèves pratiques les deux sports.

1. Déterminer l'effectif de cette classe
2. Déterminer le nombre d'élèves pratiquant un seul sport

Solution

Soit E l'ensemble des élèves de cette classe. F l'ensemble des élèves pratiquant le football et B l'ensemble des élèves pratiquant le Basket.

1. **Déterminons l'effectif de cette classe**

On a $F \cup B$, card (F) = 26; cars (B) = 24 et card $(F \cap B) \ = 10$

Card (E) = card($F \cup B$) = card (F) +Card (B) –card $(F \cap B)$

AN: card (E)= 26+24-10=40 alors Card(E)= 40

L'effectif de cette classe est de 40 élèves.

2. Déterminons le nombre d'élèves pratiquant un seul sport.

- Nombre d'élèves pratiquant uniquement le football

Card (F) -card($F \cap B$)= 26-10=16

- Nombre d'élèves pratiquant uniquement le basket

Card (B) -card($F \cap B$)= 24-10=14

Donc le nombre d'élèves pratiquant un seul sport est : 16+14= 30 élèves

Remarque : si $A \cap B$=∅ alors card $(A \cup B)$ = card(A) +card(B).

2) Complémentaire d'un ensemble

a) Définition : on appelle complémentaire de A dans E, l'ensemble des éléments de E n'appartenant pas à A. on note C_E^A ou $\bar{A}$

On lit : «complémentaire de A dans E »

b). cardinal du complémentaire d'un ensemble

Propriété : soit A une partie d'un ensemble fini E

On a: $card(\ \bar{A}\ ) = card(E) - card(A)$

Donc $card(E) = card(A) + card(\ \bar{A}\ )$

3. **Produit cartésien**

a) Introduction

On lance simultanément deux dés cubiques, l'un blanc et l'autre rouge. On note à chaque lancer les numéros des faces supérieures. On se propose de déterminer tous les résultats possibles.

- Utilisation d'un tableau à double entrée.

Chaque résultat correspond à un couple (a ; b) tel que le numéro du dé blanc est a et celui du dé rouge est b.

Complétons le tableau à double entrée suivants

D_B \ D_R	1	2	3	4	5	6
1	(1;1)	(1;2)	(1;3)	(1;4)	(1;5)	(1;6)
2	(2;1)	(2;2)	(2;3)	(2;4)	(2;5)	(2;6)
3	(3;1)	(3;2)	(3;3)	(3;4)	(3;5)	(3;6)
4	(4;1)	(4;2)	(4;3)	(4;4)	(4;5)	(4;6)
5	(5;1)	(5;2)	(5;3)	(5;4)	(5;5)	(5;6)
6	(6;1)	(6;2)	(6;3)	(6;4)	(6;5)	(6;6)

Il y a 36 résultats possibles.

b) Définition

Soit A et B deux ensemble

On appelle produit cartésien de A par B.

L'ensemble des couples (a ;b) tels que $a \in A\ et\ b \in B$. On note : $A \times B$ on lit : « A crois B ».

II. P-uplets ; Arrangement et permutations

1. P-uplets d'un ensemble

Définition : soit **E** un ensemble a **n** élément et **P** un nombre entier naturel non nul.

On appelle P-uplet de **E** tout élément de l'ensemble n^p .

Propriété : le nombre de P-uplets d'un ensemble à **n** éléments est n^p(**n** est le nombre total d'élément et **p** est le nombre de tirage d'élément dans **n**)

Exemple1 : soit (0 ;0 ;0) ; (0 ;0 ;1) ;(1 ;0 ;1) les triplets de l'ensemble {0 ; 1}

Déterminons le nombre de triplets de l'ensemble {0 ; 1}.

Le nombre de triplets de l'ensemble {0 ; 1} est $2^3 = 8$

Exemple2 : on dispose de 4 libres a ;b ;c et d qu'on veut ranger dans 3 tiroirs numérotés 1 ;2 et 3.

Déterminons le nombre de façons de ranger les 4 livres dans les 3 tiroirs.

Ce rangement correspond à un 4-uplets de l'ensemble { 1 ;2 ;3}

Le nombre de façons de ranger 4 livres dans 3 tiroirs est : $3^4=3\times3\times3\times3=81$

2. Arrangements

a) Définition

Soit **E** un ensemble à **n** éléments et **p** un nombre entier naturel on nul tel que : $P \leq n$

On appelle arrangement de p élément de E tout P-uplet d'éléments de E deux à deux distincts.

Exemple1 : on dispose de 4 livres a ;b ;c et d qu'on veut ranger dans 6 tiroirs numérotés 1 ;2 ;3 ;4 ;5 et 6 de telle sorte que chaque tiroir contienne au plus un livre

<u>Solution</u>

Chaque rangement des 4 livres correspond à un arrangement de 4 éléments d'un ensemble à 6 éléments : on note A_6^4.

3. L'installation de 5 personnes sur 8 chaises ; sachant que deux personnes ne peuvent occuper la même chaise,

Déterminons le nombre façons possibles

<u>Solution</u>

C'est un arrangement de 5 éléments de l'ensemble à 8 éléments : A_8^5

4. Elire un bureau composé d'un président, d'un secrétaire général et d'un trésorier parmi 20 membres d'une coopérative dont les statuts n'autorisent par le cumul de postes.

<u>Solution</u> : cela revient à réaliser un arrangement de 3 membres parmi 20 : A_{20}^3

c. **Propriété** : le nombre d'arrangement de **P** éléments d'un ensemble **E** à **n** élément est noté A_n^p est tel que : $A_n^p = n(n-1)(n-2) \dots (n-p+1)$

Exemple :

$A_{10}^{5} = 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 = 30240$; $A_{6}^{3} = 6 \times 5 \times 4 = 120$; $A_{1}^{0} = 1$; $A_{5}^{2} = 5 \times 4 = 20$

$A_{7}^{3} = 7 \times 6 \times 5 = 210$

d. Notation factorielle

Définition : soit n un ensemble entier naturel. On appelle factorielle n , le nombre entier n! Tel que :

- 0 !=1
- Si $n \neq 0$ $n! = n \times (n-1)(n-2) \dots .3 \times 2 \times 1$

Exemple : 1 !=1 ; 2 !=2×1=2 ; 3 !=3×2×1=6 ; 4 !=4×3×2×1=24 ; 5 !=5×4×3×2×1=120

Propriété : soit **n** et **p** deux entiers naturels non nuls tels que : $P \leq n$ on a : $A_{n}^{p} = \frac{n!}{(n-p)!}$

Par convention : $A_{1}^{0} = 1$

4. Permutation

Définition : soit **E** un ensemble à **n** éléments : on appelle permutation de **E** tout arrangement des **n** éléments de **E**. la permutation est un arrangement dans le cas ou **n=p**

Propriété : le Nombre de permutation d'un ensemble à **n** éléments est **n !**

Exemple :

- (P.F) et (F ;P) sont les permutation de l' ensemble {F ;P}.
- (0 ;1 ;2) ; (1 ;0 ;2) ; (0 ;2 ;1) ;(1 ;2 ;0) ;(2 ;1 ;0) et (2 ;0 ;1) sont les permutations de l'ensemble {0 ;1 ;2} sont n=3 donc 3 !=3×2×1=6 éléments.

<u>Exercice d'application</u>

A une réunion de coalition de partis politiques 5 représentants de différents partis doivent prendre la parole un à un à la tribune.

Déterminer le nombre de façons aux invités à prendre parole.

Solution : c'est donc une permutation, on a : 5 !=5×4×3×2×1=120

Il y'a donc 120 façons de les invités à prendre parole.

5. **Combinaisons**

Définition : soit **E** un ensemble à **n** éléments et **p** un nombre entier naturel tel que $P \leq n$

On appelle combinaison de p éléments de **E**, toute partie de **E** ayant **p** éléments

Propriété : le nombre de combinaison de **p** éléments d'un ensemble à **n** éléments est noté : C_n^p est tel que : $C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$

Exemple :

$$C_5^3 = \frac{5!}{3!\,(5-3)!} = \frac{5!}{3!\,2!} = \frac{5\times4\times3!}{3!\,2\times1} = \frac{20}{2} = 10$$

$$C_7^3 = \frac{7!}{3!\,(7-3)!} = \frac{7!}{3!\,4!} = \frac{7\times6\times5\times4!}{3\times2\times1\times4!} = \frac{35}{1} = 35$$

$$C_{10}^2 = \frac{10!}{2!\,(10-2)!} = \frac{10!}{2!\,8!} = \frac{10\times9\times8}{2\times1\times8:} = \frac{90}{2} = 45$$

<u>**Exercice d'application**</u> :

Lors d'un examen, un candidat doit choisir 3 matières parmi les 5 suivants : mathématique, physiologie, biologie, anglais et français.

Déterminons le nombre de façon de choisir ces 3 matières.

Solution : chaque façon de choisir est une partie de 3 éléments dans l'ensemble à 5 éléments.

C'est la combinaison de 3 dans 5.

$$C_5^3 = \frac{5!}{3!\,(5-3)!} = \frac{5!}{3!\,2!} = \frac{5\times4\times3!}{3!\,2\times1} = \frac{20}{2} = 10$$

I. Tirages successif, tirage simultanés.

Exemple : une urne contient 5 boules numérotées de 1à5. On tire 3 boules de cette urne.

Déterminer le nombre de résultats possibles dans chacun des cas suivants

a. Tirage successif avec remise

Les boules sont tirées l'une après l'autre en remettant chaque fois la boule tirée dans l'urne.

b. Tirage successif sans remise

Les boules sont tirées l'une après l'autre sans les remettre dans l'urne.

c. Tirages simultanés

Les boules sont tirées par un paquet de 3

Solution

a) Tirages successif avec remise :

On a : n=5 et p=3, le résultat possible est donc un triplé d'éléments de l'ensemble à 5 éléments

On a : $5^3 = 125$

b) Tirages successif sans remise

Le tirage possible est donc un arrangement de 3 éléments dans un ensemble de 5 éléments.

On a : $A_5^3 = 5 \times 3 \times 2 \times 1 = 30$

c) Tirage simultanés

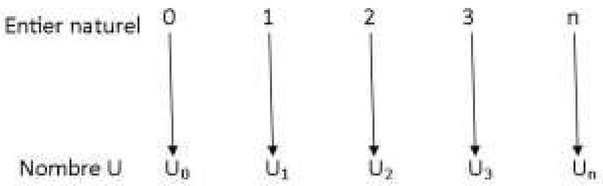
Le tirage possible est donc une combinaison de 3 éléments dans un ensemble à 5 éléments.

On a : $C_5^3 = \frac{5!}{3!\,(5-3)!} = \frac{5!}{3!\,2!} = \frac{5\times4\times3!}{3!\,2\times1} = \frac{20}{2} = 10$

CHAPITRE V. LES SUITES NUMÉRIQUES

I. Généralité

Définition : on appelle suite numérique, toute fonction de N vers R



- $U_{(n)}$ ou U_n est appelé terme d'indice n ou terme général
- $n^{ème}$ terme est appelé terme de rang n

Exemple :

- la suite des entiers naturels pairs est définie par $\forall n \in N$, $U_n=2n$
- La suite des entiers naturels impairs est définie par $\forall n \in N$, $U_n=2n+1$
- soit (ω_n) $n \in N$ la suite définie par : $\begin{cases} \omega_{0=3} \\ \omega_{\ n+1} = \frac{1}{2}\omega_n + 5 \end{cases}$

Calculons ω_1 ω_2 et ω_3

$\omega_{n+1} = \frac{1}{2}\ \omega_n + 5\ \ et\ \omega_0 = 3$

Pour n=0 alors $\omega_{(0+1)} = \frac{1}{2}\ \omega_0 + 5$

$\omega_1 \ = \frac{1}{2} \times 3 \times 5 = \frac{3+10}{2} = \frac{13}{2}$ alors $\omega_1 \ = \frac{13}{2}$

Pour n=1 alors $\omega_{(1+1)} = \frac{1}{2}\ \omega_1 + 5$

$\omega_2 \ = \frac{1}{2} \times \frac{13}{2} + 5 = \frac{13}{4} + 5 = \frac{13+20}{4} = \frac{33}{4} \Rightarrow \omega_2 \ = \frac{33}{4}$

Pour n=2 alors $\omega_{(2+1)=} \frac{1}{2}\ \omega_2 + 5$

$\omega_3 = \frac{1}{2} \times \frac{33}{4} + 5 = \frac{33}{8} + 5 = \frac{33+40}{8} = \frac{73}{8} \ \Rightarrow \omega_3 = \frac{73}{8}$

II. Suite arithmétiques, suites géométriques

1. Suites Arithmétiques

Définition : soit (U_n) $n \in N$ une suite numérique.

- (U_n) est une suite arithmétique s'il existe un nombre réel **r** tel que : pour tout n élément de **E**
  $U_{n+1}=U_{n+r}$
- Le nombre réel r est appelé raison de la suite (U_n)

Propriété : soit (U_n) une suite arithmétique de premier terme U_0 et de raison **r**. on a : pour tout nombre entier naturel n : $U_n= U_0+nr$

2. Suite géométrique

Définition : soit (U_n) $n \in N$ une suite numérique

- (U_n) est une suite géométrique s'il existe un nombre réel **q** tel que : pour tout n élément de **E**

$U_{n+1}=q\ U_n$

- Le nombre q est appelé raison de la suite (U_n)

Propriété : soit (U_n) une suite géométrique de premier terme U_0 et de raison q. on a : pour tout nombre entier naturel **n**, $U_n=U_0q^n$.

Tableau récapitulatif des suites arithmétiques et géométriques.

	Suite arithmétiques	Suites géométrique
Définition d'une suite	$U_{n+1} = u_n + r$ ou $U_{n+1} - u_n=r$	$U_{n+1}=qu_n$ ou $\frac{u_{n+1}}{u_n} = q$
Raison	r $\quad r \in R$	q $\quad (q \in IR)$
Expression en fonction de n	$u_n= u_0+nr$	$U_n= q^n \cdot u_0$
Somme des termes $S_n=u_0+u_1+\dots\dots u_{n-1}$	$S_n=\frac{n(u_0\ +u_1\ -1)}{2}$ n=nombre de terme	$S_n=\frac{u_0\ 1-\ q^n}{1-q}$ n=nombre de terme
Limite	$\lim_{n\to+\infty} u_n\ = -\infty\ si\ r < 0$ $\lim_{n\to+\infty} u_n\ = +\infty\ si\ r > 0$	$\lim_{n\to+\infty} u_n\ = 0\ si\ q < 0$ $\lim_{n\to+\infty} u_n\ = +\infty\ si\ q > 0$

III. Détermination d'une suite arithmétique, d'une suite géométrique

a) Détermination d'une suite arithmétique

Exemple : soit U_n une suite arithmétique telle que $U_6=15$ et $U_8=19$

Déterminons la raison et le premier terme de cette suite.

Solution

Soit r la raison et $u_0$le premier terme.

On sait que : $u_n=u_0+nr$

Pour n=6 on a : $u_6=u_0+6r$ $\quad \begin{cases} u_0 \ + 6r = 15 & (1) \\ u_0 \ + 8r = 19 & (2) \end{cases}$

Pour n=8 on a : $u_8=u_0+8r$

1) $U_0+6r=15$ alors $u_0=15-6r$

   U_0 dans (2) : $15 - 6r + 8r = 19$ $alors$ $15 + 2r = 19$ $alors$ $2r = 19 - 15$ alors $r = \frac{4}{2}$ alors $r = 2$

   r dans (1) : $u_0+6\times2=15$ alors $u_0+12=15$, $u_0=15-12=3$ alors $u_0=3$

   (u_n) est donc une suite définie par $u_n=3+2n$

b) Détermination d'une suite géométrique

Exemple : (u_n) $n \in N$ est une suite géométrique telle que $u_3=-5$ et $u_6=40$

Déterminons la raison et le premier terme de cette suite

On sait que : $u_n= q^n \cdot u_0$

Pour n=3 alors $u_3= q^3 \cdot u_0$ alors $-5= q^3 \cdot u_0$ alors $u_0=\frac{-5}{q^3}$

Pour n=6 alors $u_6= q^6 \cdot u_0$ alors $40= q^6 \cdot u_0$ or $u_0=\frac{-5}{q^3}$ alors $40= \ q^6 u_0 \ \left(\frac{-5}{q^3}\right)$

$40= \ q^3 \times -5$ alors $q^3 = \frac{40}{-5}$ alors $q^3 = \ (-2)^3$ alors q=-2

$u_0 \ = \frac{-5}{(-2)^3} = \frac{+5}{+8}$ alors $u_0 \ = \frac{5}{8}$

(u_n) est donc une suite définie par $u_n \ = \frac{5}{8} \ (-2)^n$

CHAPITRE VI: STATISTIQUE

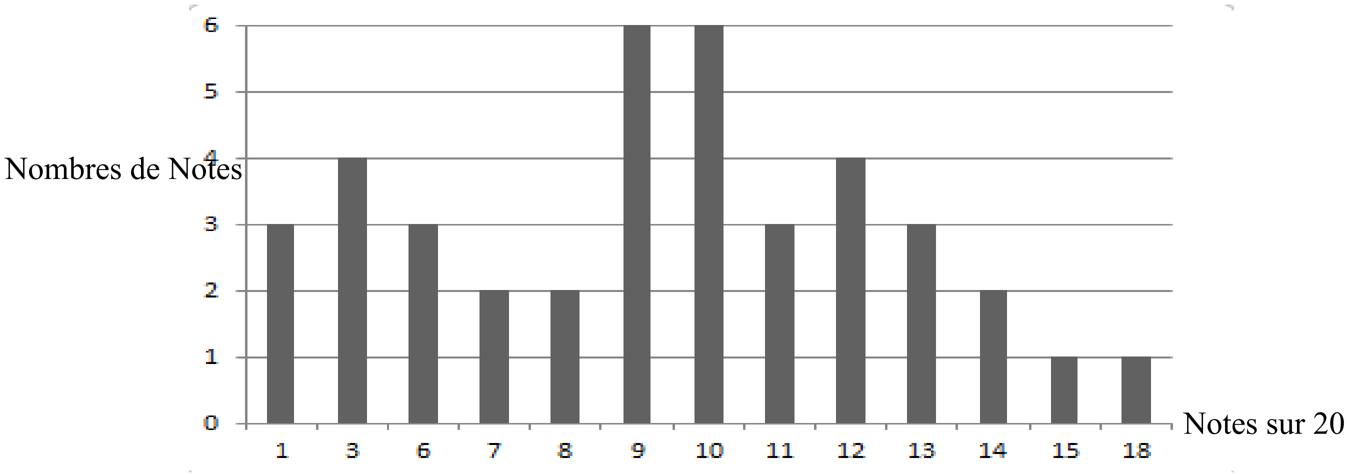
I. Caractéristique d'une série statistique

1. Caractéristique de position

a. Mode

Définition : on appelle mode d'une série statistique toute modalité qui a le plus grand effectif.

Exemple : on donne ci-dessous le diagramme en bâtons de la série des notes obtenues par les élèves d'une classe à un devoir d'anglais.



Les modalités 9 et 10 ont le plus grand effectif

La série a donc deux modes : les notes 9 et 10. On dit que 9 et 10 sont les notes obtenues par le plus grand nombre d'élèves.

b. Moyenne

Pour apprécier les résultats de ce devoir d'anglais, on peut calculer la moyenne de la classe.

Récapitulons les résultats dans le tableau ci-dessous.

Note	1	3	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	18	**Totaux**
Effectif	3	4	3	2	2	6	6	3	4	3	2	1	1	**40**
Produit de la note par son effectif	3	12	18	14	16	54	60	33	48	39	28	15	18	**358**

La moyenne de la classe est : $m = \frac{358}{40} = 8,95$

Remarque : la moyenne d'une série peut ne pas avoir le sens

Exemple : Afin de confectionner des chaussures, un cordonnier a relevé des pointures d'un échantillon de sa clientèle. Ces mesures sont récapitulées dans le tableau ci-dessous

Modalités	39	40	41	42	43	44	Totaux
Effectifs	2	12	25	20	12	9	80
Produit de la modalité par son effectif	78	480	1025	840	516	396	3335

Déterminons le mode et la moyenne de cette série

- Le Mode de la série est 41 car la modalité 41 a le plus grand effectif.
- La Moyenne de la série est $\frac{3335}{80} = 41,69$

c. Médiane

Reprenons l'exemple précèdent relative aux chaussures

Déterminons la modalité qui partage cette série en deux groupes de même effectif.

Dressons le tableau des effectifs cumulés de la série

Modalité	39	40	41	42	43	44
Effectif cumulé	2	12	25	20	12	9
Effectif cumulé croissant	2	14	39	59	71	80
Effectif cumulé décroissant	80	78	66	41	21	9

D'après ce tableau, 59 individus ont une pointure inférieure ou égale à 42 et 41 individus ont une pointure supérieure ou égale à 42. La modalité cherchée est donc égale à 42.

On dit que 42 est la médiane de cette série.

<u>Définition</u> : on appelle médiane d'une série statistique, le nombre noté Me, tel que 50% des modalités sont inférieures ou égales à Me et 50% supérieures ou égales à Me.

<u>Interprétation de la Médiane :</u>

Dans l'exemple des chaussures, une moitié des clients à une pointure inférieur ou égale à 42 et l'autre moitié à une pointure supérieure ou égale à 42.

<u>Remarque</u> : la médiane d'une série statistique n'est pas toujours une modalité de cette série.

<u>Vocabulaires</u>

La médiane, le mode et la moyenne sont appelés caractéristiques de position (ou de tendance centrale).

d. Effectifs cumulés et fréquences cumulées

Définition :

- On appelle effectif cumulé d'une série, la somme des effectifs de cette modalité et de celles qui la précèdent ou qui lui succèdent.
- On appelle fréquence cumulée d'une série, la somme des fréquences de cette modalité et de celles qui la précèdent ou qui lui succèdent.

2. Caractéristiques de dispersion

a) Introduction

Au cours d'un trimestre, Moussa a obtenu les notes suivantes respectivement en français et en anglais.

Français

Note	7,5	9	9	10
Effectif	1	2	1	1

Anglais

Note	7,5	9	9	10
Effectif	1	2	1	1

Comparons les performances de Moussa dans ces deux disciplines. Pour cela, on va déterminer la moyenne, le mode et la médiane des séries des notes de français et d'anglais.

➤ Séries des notes de français

Note	7,5	8	9	10	Totaux
Effectif	1	2	1	1	5
Produit de la note par son effectif	7,5	16	9	10	42,5
Effectif cumulé croissant	1	3	4	5	
Effectif cumulé décroissant	5	4	2	1	

- La moyenne de la série est : $\frac{42,5}{5} = 8,5$
- Le mode de la série est : 8
- La modalité 8 a un effectif cumulé croissant est un effectif cumulé décroissant tous deux supérieurs ou égaux à $\frac{N}{2} = \frac{5}{2} = 2,5$ donc, la médiane de la série est 8

➤ Séries des notes d'anglais

Note	3	3,5	8	20	Totaux
Effectif	1	1	2	1	5
Produit de la note par son effectif	3	3,5	16	20	42,5
Effectif cumulé croissant	1	2	4	5	
Effectif cumulé décroissant	5	4	3	1	

- La moyenne de la série est : $\frac{42,5}{5} = 8,5$
- Le mode de la série est 8
- La modalité 8 a un effectif cumulé croissant et un effectif cumulé décroissant tous deux supérieurs ou égaux à $\frac{5}{2} = 2,5$
- La médiane de la série est 8

Conclusion : les deux séries ont la même moyenne, le même mode et la même médiane. On remarque cependant que les notes d'anglais varient de 3 à 20 tandis que celles en français varient de 7,5 à 10.

En anglais les notes sont plus « étalées » qu'en français ou les notes sont proches de la moyenne.

Il est donc nécessaire de définir un nouvel indicateur qui permettra de mesurer la dispersion autour de la moyenne, cet indicateur est appelé **écart type**.

b) Variance, écart type

Définition :

- La variance d'une série statistique notée V est la moyenne des carrés des écarts à la moyenne.
- L'écart type noté σ est la racine carrée de la variance : $\sigma = \sqrt{V}$

Vocabulaire

La variance et l'écart type sont appelés caractéristiques de dispersion.

Calcul de la variance et de l'écart type de la série des notes d'anglais.

Note	3	3,5	8	20	Totaux
Effectif	1	1	2	1	5
Produit de la note par son effectif	3	3,5	16	20	42,5
Ecart à la moyenne	-5,5	-5	-0,5	11,5	
Carré de l'écart à la moyenne	30,25	25	0,25	132,25	
Produit du carré de l'écart à la moyenne par son effectif	30,25	25	0,5	132,85	188

La variance de la série est :$V = \frac{188}{5} = 37,6$

L'écart type est : $\sigma = \sqrt{37,6} \quad donc\ \sigma = 6,13$

Rappel : Moyenne Me $= \frac{42,5}{5} = 8,5$

$Ecart\ à\ la\ moyenne = Note - Me$

Calcul de la variance et de l'écart type de la série des notes en français

Note	7,5	8	9	10	Totaux
Effectif	1	2	1	1	5
Produit de la note par son effectif	7,5	16	9	10	42,5
Ecart à la moyenne	-1	-0,5	0,5	1,5	
Carré de l'écart à la moyenne	1	0,25	0,25	2,25	
Produit du carré de l'écart à la moyenne par son effectif	1	0,5	0,25	2,25	4

La variance de la série est :$V = \frac{4}{5} = 0{,}8$

L'écart type est : $\sigma = \sqrt{0{,}8} \quad donc\ \sigma = 0{,}89$

On constate que l'écart type des notes de français est nettement inférieur à celui des notes en anglais.

On peut conclure que Moussa est plus régulier en français qu'en anglais.

Exercice d'application

Dans un village, on a recensé le nombre d'enfants pour chaque famille. On a obtenu le tableau de répartition suivant.

Nombre d'enfants	1	2	3	4	5	6	7	8
Nombre de familles	6	8	12	15	20	10	5	4

1. Donner la population étudiée, le caractère et le mode
2. Calculer la moyenne de cette série
3. Calculer l'écart type de cette série

II. Série à modalités regroupés en classes

1. Regroupements en classe

a. Introduction

Le tableau ci-dessous donne les tailles, en centimètres, de 30 élèves

154	148	158	170	144	168	137	140	151	165
145	158	132	141	140	134	137	139	141	149
158	177	148	139	175	149	153	153	157	152

La population étudiée est l'ensemble des 50 élèves, le caractère est la taille. Pour faciliter l'étude de cette série, on regroupe les modalités dans les intervalles, appelés classes, d'amplitudes de 10 centimètres :

$[130; 140[\,, [140; 150[\,, [150; 160[\,, [160; 170[\,, [170; 180[$

La classe $[130; 140[$ contient les tailles allant de 130cm à moins de 140cm. Son effectif est 5 et sa fréquence 16%$\left(\frac{5}{30}\right)$

Le tableau suivant donne l'effectif et la fréquence de chaque classe.

Classe	$[130; 140[$	$[140; 150[$	$[150; 160[$	$[160; 170[$	$[170; 180[$	
Effectif	6	12	9	0	3	30
Fréquence	20%	40%	30%	00%	10%	100%

b. Effectif cumulés et fréquences cumulés (croissant ou décroissant)

A partir du tableau des effectifs, on veut déterminer le nombre d'élèves qui ont une taille inférieurs à 150cm, le nombre d'élèves qui ont une taille supérieure ou égale à 150 cm, et leurs pourcentages respectifs.

- Le nombre d'élèves qui ont une taille inférieure à 150 cm est : 6+12=18. Ce nombre représente 60% de l'effectif total.
- Le nombre 18 est appelé effectif cumulé croissant relatif à la classe$[140; 150[$.
- La fréquence cumulée croissant relative à la classe $[140; 150[$ est de 60%
- Le nombre d'élèves qui ont une taille supérieure ou égale à 150 cm est : $9 + 0 + 3 = 12$.
- Le nombre 12 est appelé effectif cumulé décroissante relative à la classe de $[140; 150[$
- La fréquence cumulé décroissante relative à la classe de $[140; 150[$ est de 40%

Définitions : on considère une série statistique à modalité regroupés en classe.

- On appelle effectif cumulé croissant relatif à une classe, la somme des effectifs de cette classe et de celle qui la précèdent.

- On appelle fréquence cumulé croissant relative à une classe la somme des fréquences de cette classe de celles qui la précèdent.

Remarque : on définit de la même façon les effectifs cumulés décroissants et les fréquences cumulées décroissantes.

Exemple :

Classe	[130; 140[	[140; 150[	[150; 160[	[160; 170[
Effectif	6	15	18	7
Effectif cumulé croissant	6	21	39	46
Effectif cumulé décroissant	46	40	25	7

2) Exemple de séries chronologiques

a) Définition : une série chronologique (ou chronique) est la donnée d'une suite de nombres au cours du temps.

Exemple :

- La production de café d'un pays année par année
- La feuille de température d'un malade

b) Représentations graphiques

- Diagramme à bande

Pour représenter une série chronologique, on peut utiliser un diagramme à bande

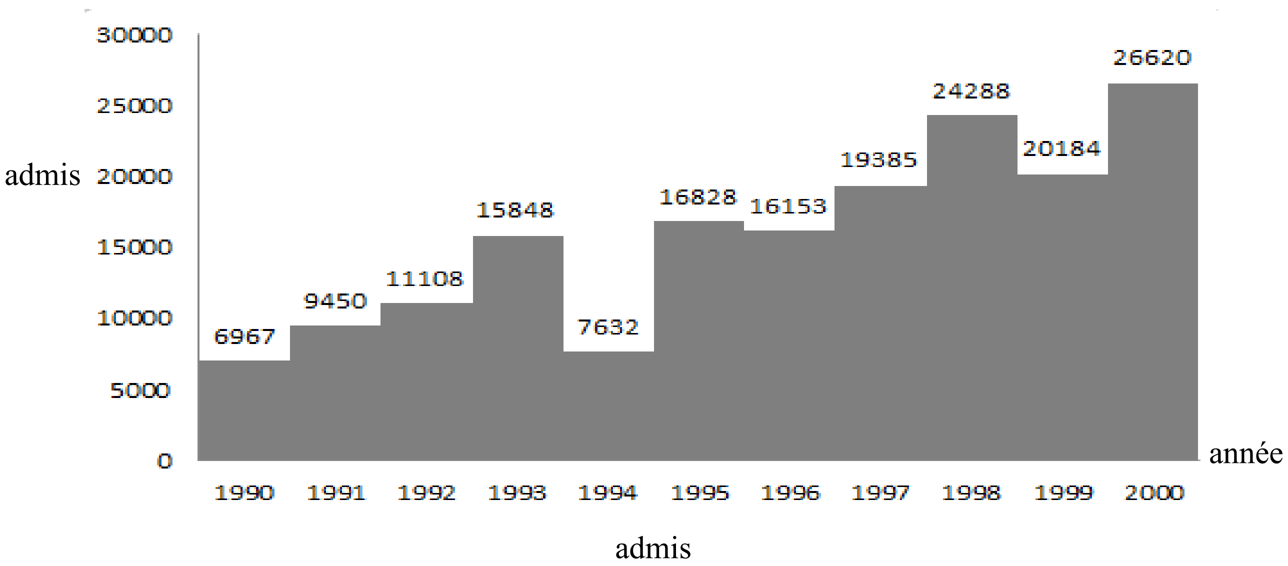
Exemple : les résultats du baccalauréat en côte d'Ivoire de 1990 à l'an 2000 sont consignés dans le tableau suivant ;

Année	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000
Nombre d'admis	6967	9450	11108	15848	7632	16828	16153	19385	24288	20184	26620

Ces mesures ont été faites tous les ans, c'est une variable au cours du temps. C'est donc une série chronologique.

Choisissons de représenter 5000 admis par une « bande » de hauteur 1cm.

On en déduit le diagramme à bande ci-dessous

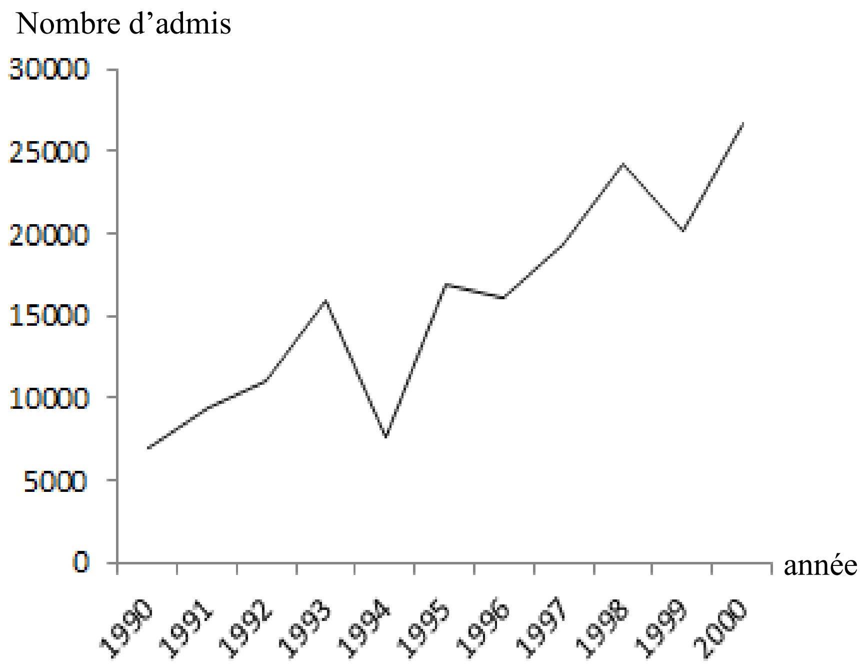


➢ Polygone des effectifs

La série précédente peut également être représentée par un polygone des effectifs.

Le plan est mini d'un repère orthogonal

- On place en abscisse les années et en ordonnées les effectifs des admis
- On construit les points de coordonnées : (1990,6967) ;(1992 ; 9450)…



La ligne brisée obtenue est appelée polygone des effectifs de la série.

Bibliographie

- CIAM, Mathématiques Première L, Edition Edicef ,2010
- Nana Léopold, Mathématique Première L, Collection Le Zénith, Edition N.A.G

Partenariat

Lycée Saint François Xavier

Label 109

Livret à ne pas vendre

Contact

info@label109.org

Télécharger gratuitement les applications et livres numériques sur le site:
http://www.tchadeducationplus.org

Mobile et WhatsApp: 0023566307383

Rejoignez le groupe: https://www.facebook.com/groups/tchadeducationplus